

多重ゼータ値の関係式 ドリinfeld・アソシエイタの方向から

早稲田大学・理工学術院 奥田 順一 (OKUDA, Jun-ichi)

Faculty of Science and Engineering,

WASEDA University.

Drinfel'd associator の係数が多重ゼータ値を用いて表されること, 及び Drinfel'd associator の満たす関係式の復習をします. 上記内容に関しては, 既に [11, 15] と詳細な本に出ています. この 2 冊の要約以下にしかならないことをお許し下さい.

0 Drinfel'd Associator の定義

KZ associator や Drinfel'd associator と呼ばれているのは, [5] で定義された \mathbb{C} -係数 2 変数非可換巾級数のことです.

定義 1 (Drinfel'd associator)

形式的 KZ 方程式 と呼ばれる $0, 1, \infty$ が特異点の Fuchs 型微分方程式

$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{X_0}{z} + \frac{X_1}{z-1} \right) G, \quad G: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C} \langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle \quad (\text{KZ})$$

の, 原点及び 1 の近傍の解 G_0, G_1 が, 次の \mathbb{R} 上の漸近挙動で一意に指定できる:

$$G_0(z) \times z^{-X_0} \rightarrow 1 \ (z \rightarrow +0), \quad G_1(z) \times (1-z)^{-X_1} \rightarrow 1 \ (z \rightarrow 1-0). \quad (1)$$

二つの解の比 $\Phi(X_0, X_1) := G_1(z)^{-1} \times G_0(z)$ を, Drinfel'd associator と呼ぶ.

$\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ の単連結閉領域が指定されると, その上の (KZ) の解の全体は右 $\mathbb{C} \langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ 加群を成します. Drinfel'd associator は, $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ で定義される解 G_0 と G_1 とのずれを計ったものです (図 1). (KZ) の解の比の微分は

$$\frac{d}{dz} (G_1^{-1} G_0) = \left\{ -G_1^{-1} \left(\frac{d}{dz} G_1 \right) G_1^{-1} \right\} G_0 + G_1^{-1} \frac{d}{dz} G_0 = 0$$

なので, $\Phi(X_0, X_1)$ は z に依らない定数 $\in \mathbb{C} \langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ となります.

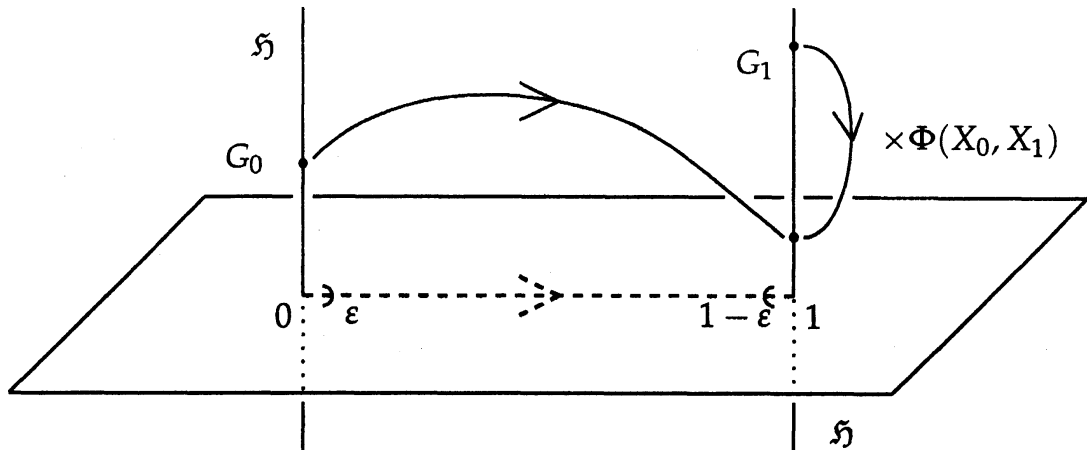
この定義を見ただけでは何が何だか良く分かりませんが, 例えば超幾何方程式

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \left\{ \frac{\gamma}{z} + \frac{\alpha + \beta + 1 - \gamma}{z-1} \right\} \frac{d}{dz} + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)} \right) u = 0 \quad (\text{HG})$$

の 2 つの (できたら線型独立な) 解 u_0, u_1 に対し, $u_{0j} = u_j, u_{1j} = \frac{1}{\beta} z \frac{d}{dz} u_j$ と置くと

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{z} \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 - \gamma \end{bmatrix} + \frac{1}{z-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\alpha & \gamma - \alpha - \beta - 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} \\ u_{10} & u_{11} \end{bmatrix}$$

図1 $\Phi(X_0, X_1)$ の定義 (のイメージ)



が成立し ([2], 6 ページ), (KZ) は (HG) のもの凄いい抽象化とすることができます。

先ずはこの Drinfel'd associator の実体に少しでも近付きたいと思います。[14] に於いて, Drinfel'd associator が多重ゼータ値を用いて表されることが示されていますが, ここでは [7, 8, 16] を参考にした [17] に沿う形で進めていきます。

(KZ) 自体は, \mathbb{C} 上の 2 変数非可換巾級数環 $\mathfrak{h} := \mathbb{C}\langle\langle X_0, X_1 \rangle\rangle$ に値を取る函数, $G(z)$ に関する方程式です。普段は函数を展開するというとその変数, 今なら z に関して展開しますが, 今回はそうではなく値を取る空間 \mathfrak{h} の単項式による基底 $\{W\}$ で展開してみます。 \mathfrak{h} と \mathfrak{h} を小文字化した非可換多項式環 $\mathfrak{h} := \mathbb{C}\langle x_0, x_1 \rangle$ の間に pairing を

$$(X_{i_1} X_{i_2} \cdots X_{i_r} \mid x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_s}) = \delta_{rs} \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \cdots \delta_{i_r j_r}$$

で入れてやり, お互いをお互いの双対と同一視します。そして W の係数は, \mathfrak{h} の単項式による基底 $\{w\}$ でパラメトライズされてるとすることにします:

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_W g_w(z) W \quad (\text{和は, } W \text{ が } \mathfrak{h} \text{ の全ての単項式をわたる, つまり}) \\ &= g_1(z)1 + g_{x_0}(z)X_0 + g_{x_1}(z)X_1 \\ &\quad + g_{x_0x_0}(z)X_0X_0 + g_{x_0x_1}(z)X_0X_1 + g_{x_1x_0}(z)X_1X_0 + g_{x_1x_1}(z)X_1X_1 \\ &\quad + g_{x_0x_0x_0}(z)X_0X_0X_0 + g_{x_0x_0x_1}(z)X_0X_0X_1 + g_{x_0x_1x_0}(z)X_0X_1X_0 \\ &\quad + g_{x_0x_1x_1}(z)X_0X_1X_1 + g_{x_1x_0x_0}(z)X_1X_0X_0 + g_{x_1x_0x_1}(z)X_1X_0X_1 \\ &\quad + g_{x_1x_1x_0}(z)X_1X_1X_0 + g_{x_1x_1x_1}(z)X_1X_1X_1 + \cdots, \end{aligned}$$

但し $g_w(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上の \mathbb{C} -値函数とします。

すると, (KZ) は $g_w(z)$ 達に関する次の連立方程式になります:

$$\frac{d}{dz} g_1(z) = 0, \quad \frac{d}{dz} g_{x_j w}(z) = \frac{1}{z-j} g_w(z) \quad (j = 0, 1). \quad (\text{KZ}')$$

一つ単項式が与えられればこれは単純な連立方程式ですから, $g_1(z) = 1$ と正規化して

積分作用素 $\int \frac{dz}{z}, \int \frac{dz}{z-1}$ を適当な順序で掛けていくと積分を用いた解の表示は得られます:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= 1, & g_{x_0}(z) &= \log z + c_{x_0}, & g_{x_1}(z) &= \log(1-z) + c_{x_1}, \\ g_{x_0x_0}(z) &= \frac{\log^2 z}{2!} + c_{x_0} \log z + c_{x_0x_0}, & g_{x_0x_1}(z) &= \text{Li}(x_0x_1; z) + c_{x_1} \log z + c_{x_0x_1}, \\ g_{x_1x_0}(z) &= \text{Li}(x_0x_1; 1-z) + c_{x_0} \log(1-z) + c_{x_1x_0}, \\ g_{x_1x_1}(z) &= \frac{\log^2(1-z)}{2!} + c_{x_1} \log(1-z) + c_{x_1x_1}, \end{aligned}$$

但し c_w は積分定数です。はて、Li とは何でしょう？

1 多重対数関数とその性質

定義 2

部分代数 $h^0 \subset h^1 \subset h$ を次で定義:

$$h^1 := \mathbb{C}1 + hx_1, \quad h^0 := \mathbb{C}1 + x_0hx_1.$$

それぞれつまり、「 x_1 で終わる単項式の張る部分空間」と「 x_0 で始まり x_1 で終わる単項式の張る部分空間」です。この h^1 に対して Li の定義を与えます。

定義 3 (多重対数関数, multiple-polylogarithms (of one variable))

単項式 $h^1 \ni w_1 = x_0^{k_1-1} x_1 x_0^{k_2-1} x_1 \cdots x_0^{k_r-1} x_1$ ($k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) と複素数 $|z| < 1$ に対し, 多重対数関数 Li を次で定義する:

$$\text{Li}(w_1; z) := (-1)^r \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}}, \quad \text{Li}(1; z) := 1.$$

更に, w_1 に関し \mathbb{C} -線型に拡張する。

特に $w_1 \neq 1$ ならば $\text{Li}(w_1; 0) = 0$ です。 $(-1)^r$ という符号を付けていて, 一般の定義から少し離れていますが御容赦下さい^{*1}。この級数は絶対収束していて, 項別微分すると次を満たすことがわかります。 $r = 1$ の場合ををしてみると,

$$\text{Li}(x_1; z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \log(1-z), \quad \text{Li}(x_0^{k-1} x_1; z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k} = -\text{Li}_k(z),$$

のように log や polylog となり, 多重対数関数はその一般化となっています。

^{*1} 伝統を重んずるならば, $X := X_0, Y := -X_1, x := x_0, y := -x_1$, とすると, [9] の記法になります。

補題 4 (微分漸化式)

$$\frac{d}{dz} \text{Li}(x_j; w; z) = \frac{1}{z-j} \text{Li}(w; z) \quad (j = 0, 1).$$

つまり x_0, x_1 の列は微分に関する漸化関係を表しています。これから反復積分表示が得られて Li は $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ 上の解析関数に接続されます。また、次が分かります。

命題 5 (シャッフル準同型性)

$$\text{Li}(w; z) \text{Li}(w'; z) = \text{Li}(w \sqcup w'; z) \quad (w, w' \in \mathfrak{h}^1).$$

ここで、 \sqcup は次で与えられる \mathfrak{h} の新しい積です。

定義 6 (シャッフル代数)

\mathfrak{h} 上に結合的かつ可換な積 \sqcup を帰納的に次で定義する:

1. $1 \sqcup w = w \sqcup 1 = w,$
2. $x_i w \sqcup x_j w' = x_i(w \sqcup x_j w') + x_j(x_i w \sqcup w'),$

但し $w, w' \in \mathfrak{h}, i, j = 0$ または 1 . \sqcup をシャッフル積, $\mathfrak{h} = (\mathbb{C}\langle x_0, x_1 \rangle, +, \sqcup)$ をシャッフル代数と呼ぶ。

今後 \mathfrak{h} の代数構造は、特別断らない限りシャッフル代数で考えます。 \sqcup の意味でも $\mathfrak{h}^0 \subset \mathfrak{h}^1 \subset \mathfrak{h}$ は部分代数になっています (\sqcup は最初の文字と最後の文字を保っているからです)。

簡単な計算から

$$x_1^n = \frac{\overbrace{x_1 \sqcup \cdots \sqcup x_1}^n}{n!}$$

が分かり、これと命題 5 から、

$$\text{Li}(x_1^n; z) = \frac{\text{Li}(x_1; z)^n}{n!} = \frac{(\log(1-z))^n}{n!},$$

なんことも分かります。

命題 5 の証明. $w, w' \in \mathfrak{h}^1$ の degree に関する帰納法で示します。 $\text{Li}(1; z) = 1$ なので、 $w = 1$ または $w' = 1$ のときは明らかです。 $w \neq 1 \neq w'$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \text{Li}(x_i; w; z) \text{Li}(x_j; w'; z) &= \frac{1}{z-i} \text{Li}(w; z) \text{Li}(x_j; w'; z) + \frac{1}{z-j} \text{Li}(x_i; w; z) \text{Li}(w'; z) \\ &= \frac{1}{z-i} \text{Li}(w \sqcup x_j; w'; z) + \frac{1}{z-j} \text{Li}(x_i w \sqcup w'; z). \end{aligned}$$

0 から z で両辺積分すると $\text{Li}(w; 0) = 0$ から

$$\begin{aligned} \text{Li}(x_i w; z) \text{Li}(x_j w'; z) &= \text{Li}(x_i(w \sqcup x_j w'); z) + \text{Li}(x_j(x_i w \sqcup w'); z) \\ &= \text{Li}(x_i(w \sqcup x_j w') + x_j(x_i w \sqcup w'); z) = \text{Li}(x_i w \sqcup x_j w'; z). \end{aligned}$$

□

補題 4 から Li は (KZ') を満たしているようですが, Li の定義は \mathfrak{h}^1 に対してまでです. x_0 で終わる元に対しては何も言っていません. \mathfrak{h} にまで拡張するのに \mathfrak{h} の構造定理を引きます.

定理 7 ([18])

\mathfrak{h} の単項式に $x_0 < x_1$ で辞書式順序を入れる. \mathfrak{h} は Lyndon 語

$$\{w : \text{単項式} \mid \forall u, v \neq 1, [w = uv \Rightarrow w < v]\}$$

で生成される無限生成多項式環.

特に x_0, x_1 は Lyndon 語で, 「 x_1 で始まる Lyndon 語」及び「 x_0 で終わる Lyndon 語」はそれぞれ「 x_1 」と「 x_0 」しかないことから, \mathfrak{h} は次のように直和分解されます:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= \mathfrak{h}^1[x_0]_{\sqcup} := \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathfrak{h}^1 \sqcup x_0^{\sqcup j} \\ &= \mathfrak{h}^0[x_0, x_1]_{\sqcup} := \bigoplus_{i,j=0}^{\infty} x_1^i \sqcup \mathfrak{h}^0 \sqcup x_0^{\sqcup j}. \end{aligned}$$

Lyndon 語のうちで Li が定義されていないのは x_0 だけなので, x_0 での値を決めてやりあとは \sqcup -準同型として拡張してやればよさそう, です. では, 何にしてやれば良いでしょう? もう少し \mathfrak{h} に関する情報を引いてみます.

定義 8 (正規化写像, cf. [10])

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1[x_0]$ の定数項を取り出す \sqcup -準同型を reg^1 , $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^0[x_0, x_1]$ の定数項を取り出す \sqcup -準同型を reg^0 とする.

$$\text{reg}^1 : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^1, \quad \text{reg}^0 : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}^0.$$

例えば $x_1 x_1 x_0$ の場合をしてみると,

$$x_1 x_1 \sqcup x_0 = x_1 x_1 x_0 + x_1 x_0 x_1 + x_0 x_1 x_1, \quad x_1 \sqcup x_0 x_1 = x_1 x_0 x_1 + 2x_0 x_1 x_1$$

より

$$x_1 x_1 x_0 = x_1 x_1 \sqcup x_0 - x_1 x_0 x_1 - x_0 x_1 x_1 = x_1 x_1 \sqcup x_0 - x_1 \sqcup x_0 x_1 + x_0 x_1 x_1.$$

よって $\text{reg}^1, \text{reg}^0$ の値はそれぞれ次のようになります:

$$\text{reg}^1(x_1 x_1 x_0) = -x_1 x_0 x_1 - x_0 x_1 x_1, \quad \text{reg}^0(x_1 x_1 x_0) = x_0 x_1 x_1.$$

命題 9 ([10])

$m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $w_0 \in \mathfrak{h}^0$ に対し

$$\begin{aligned} \text{reg}^1(x_1^m w_1 x_0^n) &= \sum_{j=0}^n x_1^m w_1 x_0^{n-j} \sqcup \frac{(-x_0)^{\sqcup j}}{j!}, \\ \text{reg}^0(x_1^m w_0 x_0^n) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{(-x_1)^{\sqcup i}}{i!} \sqcup x_1^{m-i} w_0 x_0^{n-j} \sqcup \frac{(-x_0)^{\sqcup j}}{j!}, \\ x_1^m w_0 x_0^n &= \sum_{j=0}^n \text{reg}^1(x_1^m w_0 x_0^{n-j}) \sqcup \frac{x_0^{\sqcup j}}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \frac{x_1^{\sqcup i}}{i!} \sqcup \text{reg}^0(x_1^{m-i} w_0 x_0^{n-j}) \sqcup \frac{x_0^{\sqcup j}}{j!}. \end{aligned} \quad (2)$$

$\text{Li}(w; z)$ が方針の通りに定義されたとすると, 命題 9 より次のように分解されます.

$$\begin{aligned} \sum_W \text{Li}(w; z) W &= \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^1(w); z) W \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Li}(x_0^n; z) X_0^n \right) \\ &= \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^1(w); z) W \right) \exp(X_0 \text{Li}(x_0; z)) \\ &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \text{Li}(x_1^m; z) X_1^m \right) \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(w); z) W \right) \exp(X_0 \text{Li}(x_0; z)) \\ &= \exp(X_1 \text{Li}(x_1; z)) \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(w); z) W \right) \exp(X_0 \text{Li}(x_0; z)). \end{aligned}$$

一方 (1) は, G_0 の 0 での漸近挙動が

$$z^{X_0} := \exp(X_0 \log z) = 1 + \log z X_0 + \frac{\log^2 z}{2!} X_0 X_0 + \frac{\log^3 z}{3!} X_0 X_0 X_0 + \dots$$

でありなさい, と言っています. そこで,

定義 10 (多重対数関数の拡張)

x_0 に対し $\text{Li}(x_0; z) = \log z$ とし, 更に $w \in \mathfrak{h}$ に関し \sqcup -準同型として拡張する.

今, $|z| < 1$ で考えているので, $(-\infty, 0]$ でカットを入れて $\log z$ の分枝を $(0, 1)$ 上で主値とします. (2) を用いると $w_1 \in \mathfrak{h}^1$ に対し Li は次のようになります:

$$\text{Li}(w_1 x_0^n; z) = \sum_{j=0}^n \text{Li}(\text{reg}^1(w_1 x_0^{n-j}); z) \frac{(\log z)^j}{j!}.$$

命題 11 (G_0 の多重対数函数による表示 [7, 16])

$$G_0(z) = \sum_W \text{Li}(w; z) W.$$

証明. 漸近挙動に関してはバッチリです. $\text{Li}(w; z)$ が (KZ') を満たすこともほんの少し計算すると分かります. \square

これで定義 1 の半分まで来れました.

2 Drinfel'd associator の多重ゼータ値による表示

さて, 次に欲しいのは G_1 ですが, (HG) のときと同様に方程式の持つ対称性を用いて構成します. 対称性とは, (KZ) の特異点 $\{0, 1, \infty\}$ を保つ一次分数変換の成す次の群です:

$$\mathcal{G} := \left\{ z, \quad 1-z, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{1}{1-z} \right\}.$$

$H_0(z) := G_0(1-z)$ とすると H_0 は次の方程式を満たします:

$$\frac{d}{dz} H_0(z) = \left(\frac{X_0}{z-1} + \frac{X_1}{z} \right) H_0(z).$$

準同型 $\sigma: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ を $\sigma(X_0) = X_1, \sigma(X_1) = X_0$ で定義すると, $\sigma(H_0(z))$ の満たす微分方程式は (KZ) となります. どんな形をしているのかというと,

$$\sigma(H_0(z)) = \sum_W \text{Li}(w; 1-z) \sigma(W) = z^{X_0} \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(w); 1-z) \sigma(W) \right) (1-z)^{X_1},$$

右側に出ている特異性が $(1-z)^{X_1}$ です. これは G_1 の特異性に他なりません.

命題 12 (G_1 の多重対数函数による表示 [17])

σ と σ^* を $\sigma: X_0 \leftrightarrow X_1, \sigma^*: x_0 \leftrightarrow x_1$ なる通常の積に関する準同型とすると,

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \sigma(G_0(1-z)) = z^{X_0} \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(w); 1-z) \sigma(W) \right) (1-z)^{X_1} \\ &= z^{X_0} \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0 \circ \sigma^*(w); 1-z) W \right) (1-z)^{X_1}. \end{aligned}$$

ここで σ^* という写像を使いましたが、定義から次のことが簡単に示せます。

補題 13 ([18])

通常の積に関する準同型・反準同型は ω に関する準同型となる。

なので $\text{Li}(\bullet; z) \circ \text{reg}^0 \circ \sigma^*$ という写像も ω -準同型です。

G_0 も G_1 も Li で表せることが分かりました。定義 1 を取行するには、あとは $G_1(z)^{-1}$ さえ分かればよいこととなります。その為にもう一つ写像を用意します。

定義 14 (対合射 [18])

通常の積に関する反準同型 S を次で定義する:

$$S: X_j \mapsto -X_j, \quad x_j \mapsto -x_j$$

対合射というのは Hopf 代数の対合射のことで、つまり

$$\left(\sum_W w W \right)^{-1} = \sum_W S(w) W = \sum_W w S(W)$$

が成立します。 S を使って逆元を表すことができます。

命題 15 (対合射による逆元の表示, cf. [18])

$$G_0(z)^{-1} = S(G_0(z)), \quad G_1(z)^{-1} = S(G_1(z)).$$

さてさて、以上で材料が揃ったので Drinfel'd associator を作ってみましょう。

$$\begin{aligned} \Phi(X_0, X_1) &= (1-z)^{-X_1} \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(\sigma^* \circ S(w)); 1-z) W \right) z^{-X_0} \\ &\quad \times (1-z)^{X_1} \left(\sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(w); z) W \right) z^{X_0} \end{aligned}$$

は、 z に依らない値になっているはずなので、 z の 0 と 1 への極限を考えてみると、綺麗に特異性がキャンセルしあって

$$\begin{aligned} \Phi(X_0, X_1) &= \lim_{z \rightarrow 1-0} \sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(w); z) W \\ &= \lim_{z \rightarrow +0} \sum_W \text{Li}(\text{reg}^0(\sigma^* \circ S(w)); 1-z) W \end{aligned}$$

となります。さて、この極限は?

定義 16 (多重ゼータ値)

単項式 $\mathfrak{h}^0 \ni w_0 = x_0^{k_1-1} x_1 x_0^{k_2-1} x_1 \cdots x_0^{k_r-1} x_1$ ($k_j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, k_1 \geq 2$) に対し, 極限

$$\zeta(w_0) := \lim_{z \rightarrow 1-0} \text{Li}(w_0; z) = (-1)^r \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{k_1} n_2^{k_2} \cdots n_r^{k_r}}.$$

を多重ゼータ値と呼ぶ.

というわけで, 目標であった主張 $+a$ を得ることができました.

定理 17 (Drinfel'd associator の表示, 及び双対公式)

$$\Phi(X_0, X_1) = \sum_W \zeta(\text{reg}^0(w)) W = \sum_W \zeta(\text{reg}^0(\tau(w))) W = \Phi(X_1, X_0)^{-1}, \quad (3)$$

但し $\tau = S \circ \sigma^*$. 特に $\Phi(X_0, X_1)$ の次数 1 の部分は無い. また, $w_0 \in \mathfrak{h}^0$ に対し

$$\zeta(w_0) = \zeta(\tau(w_0)).$$

命題 5 から次も直ぐ分かります.

系 18 (シャッフル準同型性)

$$\zeta(w)\zeta(w') = \zeta(w \sqcup w') \quad (w, w' \in \mathfrak{h}^0). \quad (4)$$

3 Drinfel'd associator 以外の解の比, 解の接続

Drinfel'd associator を表示するのに必要な G_1 は, G_0 を一次分数変換 $1-z$ で引き戻すことによって得られました. 同様の操作で, G_0 から全部で 6 個の解が構成できます.

定義 19

$\sigma \in \mathcal{G}$ の $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}$ への作用を次で定義する

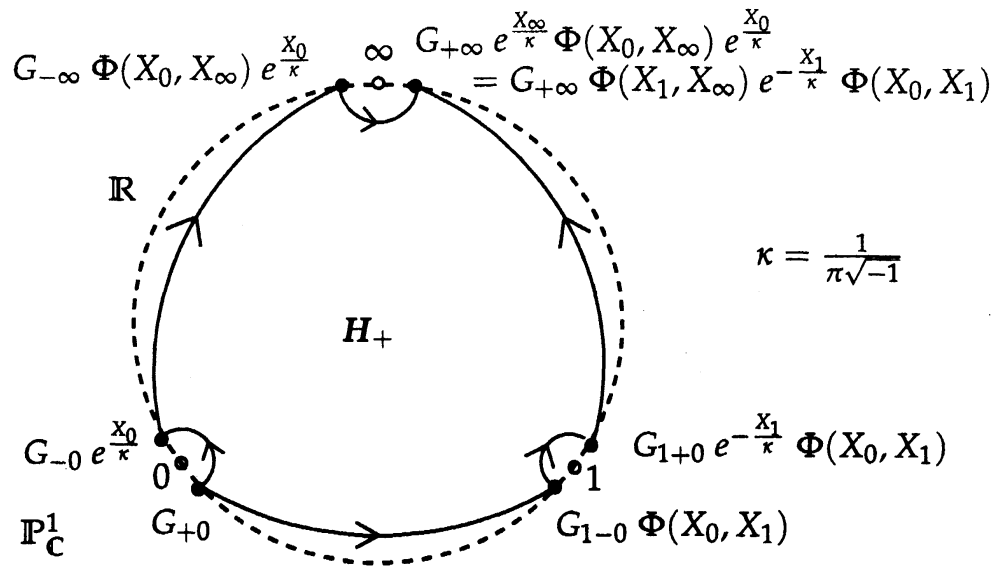
$$\sigma : X_j \mapsto X_{\sigma(j)}, \quad \sigma^* : x_j \mapsto x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(\infty)},$$

但し $X_\infty := -X_0 - X_1, x_\infty := 0$. 更に

$$\pi(\sigma)(G_0)(z) := \sum_W \text{Li}(w; \sigma^{-1}(z)) \sigma(W) = \sum_W \text{Li}((\sigma^*)^{-1}(w); \sigma^{-1}(z)) W.$$

$\pi(\sigma)(G_0)$ もやっぱり (KZ) の解になります. G_0 は $(0, \varepsilon)$ で定義されていたから, σ に

図2 G_0 の $+\infty$ への二通りの解析接続



よって各 $\pi(\sigma)(G_0)$ は以下の領域で定義された解となります:

σ	z	$1-z$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z}$	$\frac{z-1}{z}$	$\frac{1}{1-z}$
$\sigma((0, \varepsilon))$	$(0, \varepsilon)$	$(1-\varepsilon, 1)$	$(-\varepsilon, 0)$	$(\varepsilon^{-1}, +\infty)$	$(-\infty, -\varepsilon^{-1})$	$(1, 1+\varepsilon)$
略記して	$+0$	$1-0$	-0	$+\infty$	$-\infty$	$1+0$
$\pi(\sigma)(G_0)$	G_{+0}	G_{1-0}	G_{-0}	$G_{+\infty}$	$G_{-\infty}$	G_{1+0}

各像をその定義されている場所で名前を付けてやって、その領域での解の基準とします。 $G_{+0} = G_0, G_{1-0} = G_1$ でした。他の像も何者であるかを調べたいのですが、何処で考えているのかはつきりさせないと訳が分からなくなるので、 H_+ で考えていることにしましょう。

補題 20 (ご近所にお住まいの解との関係)

H_+ に於いて、次の関係式が成立:

$$G_{+0} = G_{-0} e^{X_0 \pi \sqrt{-1}}, \quad G_{-0} = G_{-\infty} \Phi(X_0, X_\infty), \quad G_{-\infty} = G_{+\infty} e^{X_\infty \pi \sqrt{-1}}, \quad (5)$$

$$G_{+0} = G_{1-0} \Phi(X_0, X_1), \quad G_{1-0} = G_{1+0} e^{-X_1 \pi \sqrt{-1}}, \quad G_{1+0} = G_{+\infty} \Phi(X_1, X_\infty). \quad (6)$$

証明は G_0 と G_1 の比が多重ゼータ値の母関数になったのを見たのと同様に、一次分数変換で作った解同士の比を適当な場所で評価してやればできます。

(5) と (6) はそれぞれ、図2の時計回り、反時計回りでの G_{+0} と $G_{+\infty}$ との比較に対応しています。この二つの比較は上半平面、つまり (KZ) の定義されている単連結閉領域、で行われていますから、一致しなくてははいけません。よって、(3) を用いて、次が得られます。

定理 21 (六角形関係式)

$$e^{X_0\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_1, X_0) e^{X_1\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_\infty, X_1) e^{X_\infty\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_0, X_\infty) = 1 \quad (7)$$

これは別の恒等式なので X_0 と X_1 を交換しても問題無しなので, H_- に対応する

$$e^{X_0\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_\infty, X_0) e^{X_\infty\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_1, X_\infty) e^{X_1\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_0, X_1) = 1$$

も成立します. これらは各係数が多重ゼータ値もしくは π の巾を係数に持つ非可換巾級数で, 係数の関係式として書き下してやることにより沢山の多重ゼータ値の関係式が得られます. と, 口に出してみるのは簡単ですが実行しようとするの大変です. [6] によると, [3] では (3), (4), (7) を用いて $\zeta(2k) = -\frac{(2\pi\sqrt{-1})^{2k}}{2(2n)!}$ が導かれているそうです.

4 Drinfel'd associator のもう一つの関係式

4.1 配置空間の上の方程式としての KZ 方程式

もう一つ Φ の関係式を導かなくてははいけません. (KZ) を全微分方程式に書き直します:

$$dG = (X_0 d \log z + X_1 d \log(1 - z))G.$$

超幾何方程式はグラスマン多様体の上の方程式と思え, というのが [2] の教えでした. 特に \mathbb{P}^1 の上の点配置のモデュライが基本的でした:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{0,n}(K) &:= \text{PGL}(2, K) \setminus \left\{ (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{P}_K^1)^n \mid z_i \neq z_j, (i \neq j) \right\} \\ &= \text{GL}(2, K) \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \end{pmatrix} \mid x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i} \neq 0, (i \neq j) \right\} / (K^\times)^n \end{aligned}$$

(HG) の場合は考えるべき場所は $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1 \simeq S^2$ 上の 4 点配置 $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{C})$ となります. これは「 $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ 上の相異 4 点の組で, $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ の作用で写りあう組は同一視」と読みました. つまり, 複比です. そこで $z = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}$ を代入してみると,

$$dG = \left(X_0 d \log \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} + X_1 d \log \left(1 - \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right) \right) G,$$

少し整理してみると

$$dG = \left(\begin{aligned} &X_0 d \log(z_1 - z_2) + X_1 d \log(z_2 - z_3) + X_\infty d \log(z_1 - z_3) \\ &+ X_0 d \log(z_3 - z_4) + X_1 d \log(z_1 - z_4) + X_\infty d \log(z_2 - z_4) \end{aligned} \right) G \quad (8)$$

となります. これは所謂 KZ 方程式と呼ばれるものと全く同じ形をしています.

定義 22 (形式的 KZ 方程式)

$W : (\mathbb{P}_\mathbb{C}^1)^n \rightarrow \mathfrak{A}_n$ に関する全微分方程式

$$dW = \left(\sum_{i < j} X_{ij} d \log(z_i - z_j) \right) W \quad (\text{KZ}_n)$$

を, 形式的 KZ 方程式と呼ぶ. 但し, $\mathfrak{A}_n := \mathbb{C} \langle\langle X_{ij} \rangle\rangle_{1 \leq i \neq j \leq n} / \sim$ で, \sim は以下の関係式:

$$X_{ij} - X_{ji} = 0 \quad (\#\{i, j\} = 2) \quad (9)$$

$$[X_{ij}, X_{ik} + X_{kj}] = 0 \quad (\#\{i, j, k\} = 3) \quad (10)$$

$$[X_{ij}, X_{kl}] = 0 \quad (\#\{i, j, k, l\} = 4) \quad (11)$$

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} X_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (12)$$

つまり, $z_i = z_j$ という超平面に対して X_{ij} という形式的な特異性を置いた Fuchs 型の微分方程式です. (9) は, 超平面がインデックスの 2 点部分集合 $\{i, j\}$ で定まるということを言っています. (10) と (11) は infinitesimal pure braid relation と呼ばれ [12], この方程式が可積分であること,

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial z_j} W = \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_i} W, \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

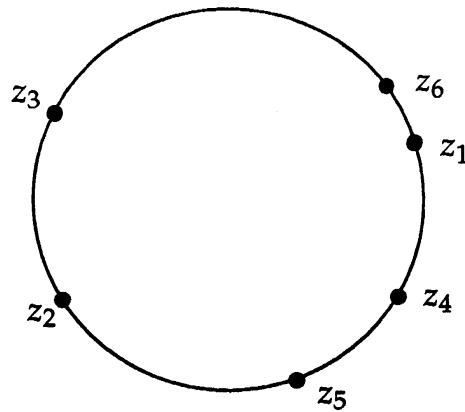
を保証しています [1]. (12) は, $z_i = \infty$ が特異点ではないことを保証しており, 更には方程式が $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$ 不変性を持ち $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{C})$ の上で定義されるようになります*2. また, (9) の下で (12) は以下のそれぞれの関係式達と同値です:

$$\sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \#\{i, j, k\} = 3}} X_{ij} = 0 \quad (k = 1, \dots, n), \quad \text{or} \quad X_{kl} = \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ \#\{i, j, k, l\} = 4}} X_{ij} \quad (1 \leq k < l \leq n).$$

\mathbb{P}^1 の配置空間の上で可積分である為の最低限の要請だけしたもので, 「形式的」という冠を被せています.

さて, (8) の一般化として (KZ_n) の接続問題はどうかになっているのでしょうか? それを考えるには, どんな解とどんな解を比べるかを考えなくてははいけません. まずはどこの解を考えるかを決めましょう. 分かり易いように基点として全ての z_i を $\mathbb{P}_\mathbb{R}^1 \simeq S^1 (\subset S^2 \simeq \mathbb{P}_\mathbb{C}^1)$ 上にとることにします. つまり n 個の点を異なるように S^1 の上に配置します. 点たちが S^1 の中を動く限りはくつつかないと順番が入れ換わることができません (くつついてしまうことは特異点となるということでした). なので, $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{R})$ 内の一つの配置を含む連結な領域は点の並ん

*2 (12) が無くても方程式は可積分なわけですが, ∞ が特異点となるので $\mathbb{P}_\mathbb{C}^1$ ではなく \mathbb{C} の n 点配置の空間の上の方程式となります. その場合, ∞ が動かなければ良いので 1 次変換不変性は残ります.

図3 $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \simeq S^1$ 上の異なる6点

でいる順番で特徴付けられます. また, $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ の作用で写り合うものは同じだと思えば, 全体をひっくり返した配置も同じものなので, 右回りか左回りかの区別は無しとなります. そんな並べ方を [19, 20] では数珠列と呼んでいます. n 個の点の並べ方は, 順列 $n!$ のうち回転ぶんを無視して $1/n$, 折り返しのぶんを無視して $1/2$ で $(n-1)!/2$ 個あります. 自由度が $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$ の作用で3個落ちるので, $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{R})$ は $(n-1)!/2$ 個の連結な $n-3$ 次元空間の貼り合わせとなります.

$\mathcal{M}_{0,n}$ は「ある点とくっつく点が高々1点」という多様体を境界として補うことによりコンパクト化することができます (例えば $n=5$ で「 $z_1 = z_2 \neq z_4 = z_5$ 」は境界としてOKだけど「 $n_1 = n_2 = n_3$ 」はダメ). このコンパクト化の下で各連結領域は n 個の $z_i = z_j$ という超平面によって囲まれています. その超平面達の交点での特異性を決めてやることで解が特定できるようになりますが, 話が込み入ってきたのでちょっと具体例を見てみましょう.

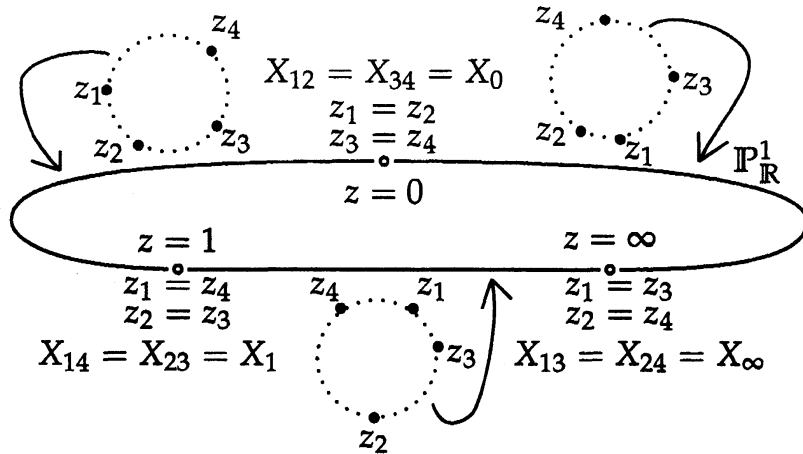
4.2 $n=4$ の場合

$n=4$ の場合は, 点配置が動ける連結領域は $4-3=1$ 次元で $(4-1)!/2=3$ 個あります. z_1, z_2, z_3, z_4 を $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ 上に $z_{i_1}, z_{i_2}, z_{i_3}, z_{i_4}$ の順に並べる方法を $(i_1 i_2 i_3 i_4)$ と書くと

$$\begin{aligned} (1234) &= (2341) = (3412) = (4123) = (1432) = (2143) = (3214) = (4321), \\ (4231) &= (2314) = (3142) = (1423) = (4132) = (2413) = (3241) = (1324), \\ (2134) &= (1342) = (3421) = (4213) = (2431) = (1243) = (3124) = (4312), \end{aligned}$$

です (図4の点線円上の4点). この3つが $z_i = z_j$ という0次元の境界で隣り合っています. $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R})$ の点は $z = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_4} \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_1}$ で $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ に実現され, $0, 1, \infty$ を境界に持つ3つの線分に分かれます (図4の実線円). これは例えば, $(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (0, z, 1, \infty)$ という実現と思うと良いかもしれません. $z_2 = z_1, z_3, z_4$ となる部分と $z = 0, 1, \infty$ となる部分に対応しています. この $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R})$ の $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ への実現は, $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{C})$ の

図4 $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R})$ 上の異なる4点とその複比



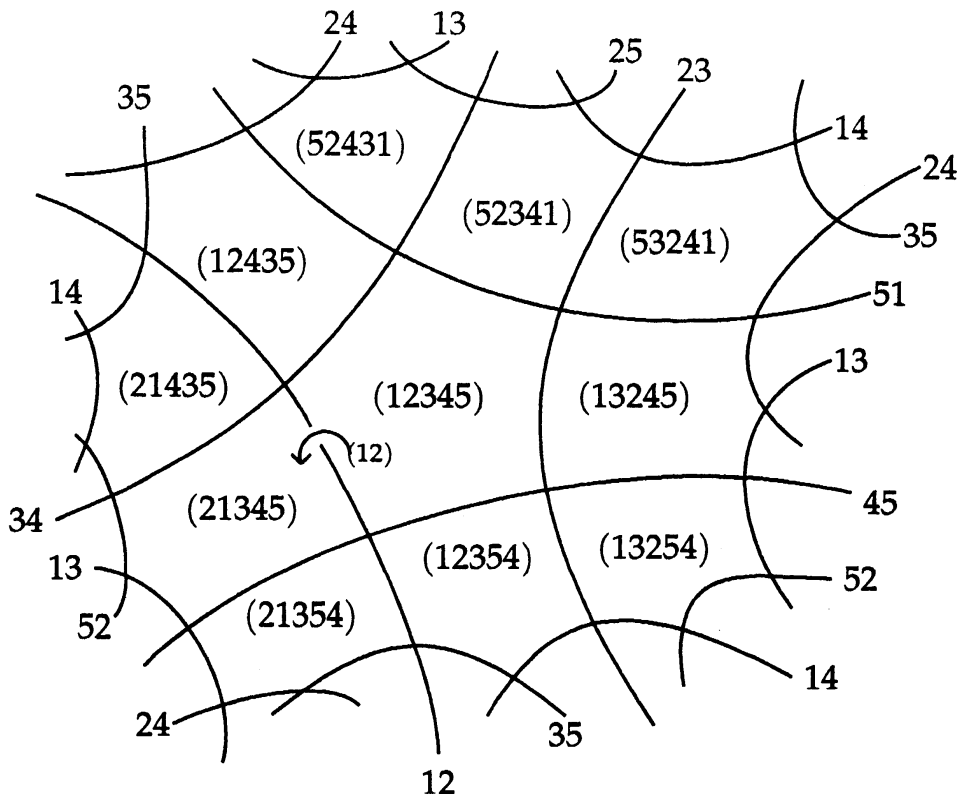
$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ への実現に拡張され, $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{C})$ は $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R})$ によって半分に分けられている, なんていうことが分かります. 特異点への近付き方は, 3つの連結領域に2つの端があるので全部で6つあります. 実現の方で見ると, z が $0, 1, \infty$ に左右から近付くときの特異性で解を特徴付けていました.

\mathfrak{P}_4 の関係式から, $X_{13} = X_{24} = -X_{12} - X_{23}$, $X_{14} = X_{23}$, $X_{34} = X_{12}$, が得られ, $X_0 := X_{12}$, $X_1 := X_{23}$ とすれば (8) となります. また, $z = 0$ のところは $z_1 = z_2, z_3 = z_4$ に対応していることと, $X_{12} = X_{34}$ という事とも対応しています. 連結領域内の両端点の解を比較するのが Φ で, 異なる線分に移る為に z が複素領域経由で特異点を跨ぐのを表したのが $e^{\pm X_j \pi \sqrt{-1}}$ でした ($\mathcal{M}_{0,1}(\mathbb{R})$ が $\mathcal{M}_{0,1}(\mathbb{C})$ を H_+ と H_- に分けていました).

4.3 $n = 5$ の場合

$n = 5$ の場合はどうでしょう? 連結領域は $5 - 3 = 2$ 次元で, S^1 の上に5点を配置する方法は $(5 - 1)!/2 = 12$ 通りあります. そのコンパクト化を図5に図示します. といっても向き付け不可能な閉曲面なので, 一部だけにします (この図には11個の五角形しか描かれていませんが, もう一つ, (12345) の双対と呼ばれる (13524) が居ます). 境界は, ある z_i と z_j が一致した曲線で, ij の名付けています. 曲線 $z_i = z_j$ は $\mathcal{M}_{0,4}(\mathbb{R})$ と同相となります (その近傍の作る帯がメビウスの帯になります). 境界では, 異なる i, j, k, l に対して $z_i = z_j, z_k = z_l$ とはなれますが, $z_i = z_j = z_k$ と3点が一致することは許されず, 一つの境界と交わる他の境界は3つとなります (12と交わるのは34, 35, 45の三つです, ちなみに $[X_{12}, X_{34}] = [X_{12}, X_{35}] = [X_{12}, X_{45}] = 0$, $X_{12} = X_{34} + X_{35} + X_{45}$ でした). 5本の境界に囲まれた五角形が, 数珠の並び方一つに対応します. 曲線 ij を横断するという事は, 隣接する z_i と z_j が入れ換わるということです. そのとき配置は, ラベル $(i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ の付いた五角形から互換 (ij) が作用したラベルの五角形へ移動します. この五角形の中で頂点へ近付いたとき,

図5 (12345) を中心とした数珠の作る空間



つまり $z_i = z_j$ かつ $z_k = z_l$ ($\#\{i, j, k, l\} = 4$) に近付くときの漸近挙動を指定することにより (KZ₅) の解を指定してやりましょう。ではそれはどんな漸近挙動でしょうか？

以下, (12345) の中で話を進めましょう。(KZ₅) は式 (12) を用いると, 例えば

$$dW = \left(\begin{array}{l} X_{12} d \log \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_5 - z_3}{z_5 - z_2} + X_{34} d \log \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_5} \frac{z_2 - z_5}{z_2 - z_4} + X_{51} d \log \frac{z_5 - z_1}{z_5 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \\ + X_{23} d \log \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3} + X_{45} d \log \frac{z_4 - z_5}{z_4 - z_1} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_5} \end{array} \right) W$$

と複比の方程式となります。 $\lambda = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_5 - z_3}{z_5 - z_2}$, $t = \frac{z_4 - z_5}{z_4 - z_1} \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_5}$ と置けば,

$$dW = \left(\begin{array}{l} X_{12} d \log \lambda + X_{34} d \log \frac{1-t}{1-\lambda t} + X_{51} d \log(1-\lambda t) \\ + X_{23} d \log \frac{1-\lambda}{1-\lambda t} + X_{45} d \log t \end{array} \right) W$$

です。一次分数変換 $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \mapsto (0, \lambda, 1, 1/t, \infty)$ による $0 < \lambda, t < 1$ への実現と思うと分かり易いかもかもしれません。(12345) の中で考えているので, $\lambda = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_5 - z_3}{z_5 - z_2}$ の分母分子の中で0になりそうなのは $z_1 - z_2$ だけです。 $\lambda = 0$ に近付くとき, $\lambda = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \frac{z_5 - z_3}{z_5 - z_2}$ と見れば z_1 と z_3 の間の z_2 が z_1 に近付くように見えますし, $\lambda = \frac{z_1 - z_2}{z_5 - z_2} \frac{z_5 - z_3}{z_1 - z_3}$ と見れば z_5 と z_2 の間の z_1 が z_2 に近付くように見えます。そこで, 各頂点の近傍での解を次のように定義:

定義 23

(KZ₅) の解 $W_{45,12}, W_{12,34}, W_{34,51}, W_{51,23}, W_{23,45}$ を, 漸近挙動

$$\begin{aligned} W_{45,12} \times t^{-X_{45}} \lambda^{-X_{12}} &\rightarrow 1 \quad (\lambda, t \rightarrow +0), \\ W_{12,34} \times (1-t)^{-X_{34}} \lambda^{-X_{12}} &\rightarrow 1 \quad (\lambda \rightarrow +0, t \rightarrow 1-0), \\ W_{34,51} \times \left(\frac{1-t}{1-\lambda t}\right)^{-X_{34}} (1-\lambda t)^{-X_{51}} &\rightarrow 1 \quad (\lambda < t, \lambda, t \rightarrow 1-0), \\ W_{51,23} \times (1-\lambda t)^{-X_{51}} \left(\frac{1-\lambda}{1-\lambda t}\right)^{-X_{23}} &\rightarrow 1 \quad (t < \lambda, \lambda, t \rightarrow 1-0), \\ W_{23,45} \times (1-\lambda)^{-X_{23}} t^{-X_{45}} &\rightarrow 1 \quad (\lambda \rightarrow 1-0, t \rightarrow +0), \end{aligned}$$

で定義する. ここで, 添字は交点とその頂点となる 2 本の曲線の名前.

補題 24

$W_{ij,kl}$ の間には次の関係式が成立する:

$$\begin{aligned} W_{45,12} \times \Phi(X_{34}, X_{45}) &= W_{12,34}, & W_{12,34} \times \Phi(X_{51}, X_{12}) &= W_{34,51}, \\ W_{34,51} \times \Phi(X_{23}, X_{34}) &= W_{51,23}, & W_{51,23} \times \Phi(X_{45}, X_{51}) &= W_{23,45}, \\ W_{23,45} \times \Phi(X_{12}, X_{23}) &= W_{45,12}. \end{aligned}$$

証明は^{*3}, 先ず比較する二つの解を, 共通する特異性で割ります. そしてその特異性を除去した点での評価を行うと, 結果が (KZ) の解になることが分かります. よって, 解の比較に (KZ) の接続の言葉が出てきます.

これを用いて 図 6 のように解析接続してやると次が得られます:

定理 25 (五角形関係式)

$$\Phi(X_{34}, X_{45}) \Phi(X_{51}, X_{12}) \Phi(X_{23}, X_{34}) \Phi(X_{45}, X_{51}) \Phi(X_{12}, X_{23}) = 1 \quad (13)$$

添字を固定して書いてしまいましたが, もちろん添字に適当に置換を働かせても問題ありません. この中にも多重ゼータ値の関係式が沢山入っています.

また, 蛇足かもしれませんが, ij に沿って一周してくるとしましょう (図 7). すると ij と交わる三つの S^1 を跨いで, 最後に ij を跨いで帰ってきます. 解の接続を追ってやれば

$$e^{-X_{ij}\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_{mk}, X_{kl}) e^{X_{mk}\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_{lm}, X_{mk}) e^{X_{lm}\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_{kl}, X_{lm}) e^{X_{kl}\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

ここで $X_{ij} = X_{kl} + X_{lm} + X_{mk}$ と $[X_{ij}, X_{kl}] = [X_{ij}, X_{lm}] = [X_{ij}, X_{mk}] = 0$ を用いれば

^{*3} [11, 15] に詳しく説明してありますので, そちらを御参照下さい

図6 五角形の中で頂点を結ぶ解析接続

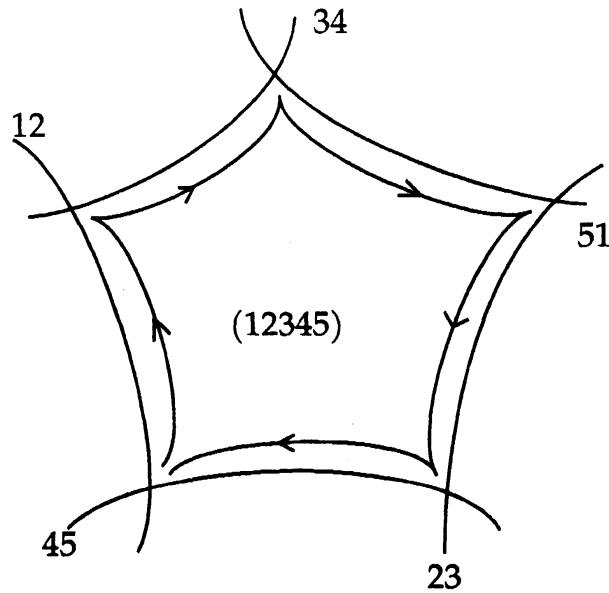
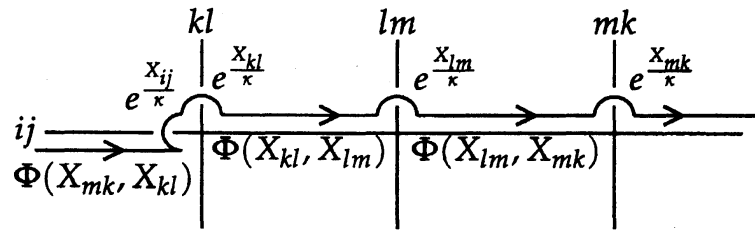


図7 $\mathcal{M}_{0,5}(\mathbb{C})$ 中の六角形関係式



$$\Phi(X_{mk}, -X_{lm} - X_{mk}) e^{X_{mk}\pi\sqrt{-1}} \Phi(X_{lm}, X_{mk}) \times e^{X_{lm}\pi\sqrt{-1}} \Phi(-X_{lm} - X_{mk}, X_{lm}) e^{(-X_{lm} - X_{mk})\pi\sqrt{-1}} = 1,$$

これは六角形関係式そのものです (Φ の中身の X_{kl} が無くなるのは, $\Phi(X_0, X_1)$ が Lie 級数の exponential になっていて更に 1 次の項が無いからです. Lie 級数の exponential になるのは (4) と同値です [18]).

5 まとめ?

では次に 6 点の場合を, とはならず, もっと点が多い場合の (KZ_n) の接続関係は今迄の関係式を用いて表わされることが知られています. つまり, $\mathcal{M}_{0,n}(\mathbb{C})$ の基本群^{*4} から来る Drinfel'd associator の関係式は全て述べたこととなります.

^{*4} 「基本群」と口走りましたが, その基本群とは点配置の空間の基本群ですから Artin や Hurwitz の純組み紐群です. 更に \mathfrak{P}_n と $\mathcal{M}_{0,n}$ には自然に対称群が働き, その作用は (KZ_n) にまで及びます. 割った所で同様の考察を行えば KZ 方程式の接続から組み紐群連の表現が得られ [12, 5], 更には結び目の不変量へと話が展開していきます [13, 14].

というわけで, Drinfel'd associator は \mathfrak{h} の元で,

- degree 1 の部分が無い, • 係数が \mathfrak{h} 準同型性 (4) を持つ,
- 双対性 (3), • 六角形関係式 (7), • 五角形関係式 (13),

を満たすものでした. Drinfel'd associator の係数には多重ゼータ値が現れていたもので, 上の関係式から多くの多重ゼータ値の関係式が存在することが導かれました. なんと, これらの関係式に関して次の予想があります.

予想

Drinfel'd associator の associator relation は全ての多重ゼータ値の関係式を導く.

つまり, 「点配置のモデュライの基本群のモノドロミー表現を考えると, 多重ゼータ値の関係式は全部分かっちゃうよ」ということです. 根拠には, 数式処理に因っても随分と確認されているようですが, もっと本質的な説明には \mathbb{Q} の絶対ガロア群に関する難しい話が必要で私には説明する力が欠如しています. [6] によると, Grothendieck-Teichmüller 群 ($\cong \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$) の Lie 環版である安定導分環と呼ばれる Lie 環の構造の予想が正しければ, associator relation を経由して多重ゼータ値の次元に関する予想の上限の方が従うそうです.

上に挙げた Drinfel'd associator が満たした条件をまとめて “associator relation” と呼び, associator relation を満たす \mathfrak{h} の元を associator と呼びます. 元々は, Drinfel'd は単純 Lie 環の普遍展開環の変形である量子展開環を, 更に変形した準三角準 Hopf 量子展開環を (と, その表現) 構成する為に KZ 方程式を用いて具体的に associator を構成したのでした. Drinfel'd associator は具体的に構成できる特別な associator ですが, それも含めた associator 全体というのがとても大切な対象で, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ と密接に関係するのです. \mathfrak{h}^1 には [9] で定義された, $*$ で表される通常の積とも \mathfrak{h} とも違った積が定義されていますが, [4] では associator relation から (Drinfel'd associator とは限らない) 一般の associator の係数が $*$ -準同型になることが示されています. $*$ と \mathfrak{h} , 二つの積による多重ゼータ値の積の展開を比較して得られる線型関係式は複シャッフル関係式 (cf. [10]) と呼ばれていますが, 複シャッフル関係式は一般の associator の係数が満たすということになります. この関係式は多重ゼータ値の次元を予想される次元まで落とすことが予想されており, この予想が正しければ Drinfel'd associator の関係式からも多重ゼータ値の次元の上限が得られます.

参考文献

- [1] Aomoto K.: A construction of integrable differential system associated with braid groups. In *Braids (Santa Cruz, CA, 1986)*, Vol. 78 of *Contemp. Math.*, pp. 1–11. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.
- [2] 青本和彦, 喜多通武: 超幾何関数論. シュプリンガー現代数学シリーズ. シュプリンガー・フェアラーク, 東京, 1994.
- [3] P. Deligne: Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points. In *Galois groups over \mathbb{Q} (Berkeley, CA, 1987)*, Vol. 16 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pp. 79–297. Springer, New York, 1989.
- [4] P. Deligne and Terasoma T.: Harmonic shuffle relation for associators. preprint, 2004.
- [5] V. G. Drinfel'd: On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. *Algebra i Analiz*, Vol. 2, No. 4, pp. 149–181, 1990.
- [6] Furusho H.: The multiple zeta value algebra and the stable derivation algebra. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. 39, No. 4, pp. 695–720, 2003.
- [7] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot, and J. van der Hoeven: Computation of the monodromy of generalized polylogarithms. In *Proceedings of the 1998 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (Rostock)*, pp. 276–283 (electronic), New York, 1998. ACM.
- [8] Hoang Ngoc Minh, M. Petitot, and J. van der Hoeven: L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices. In *Proc. of FPSAC'99, 11-th international Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, Barcelona, June 1999.
- [9] M. E. Hoffman: The algebra of multiple harmonic series. *J. Algebra*, Vol. 194, No. 2, pp. 477–495, 1997.
- [10] Ihara K., Kaneko M., D. B. Zagier: Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values. *Compos. Math.*, Vol. 142, No. 2, pp. 307–338, 2006.
- [11] C. Kassel: *Quantum groups*, Vol. 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [12] Kohno T.: Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 37, No. 4, pp. 139–160, 1987.
- [13] M. Kontsevich. Vassiliev's knot invariants. In *I. M. Gel'fand Seminar*, Vol. 16 of *Adv. Soviet Math.*, pp. 137–150. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

- [14] Le T. Q. T. and Murakami J.: Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions. *Topology Appl.*, Vol. 62, No. 2, pp. 193–206, 1995.
- [15] Ohtsuki T.: *Quantum invariants*, Vol. 29 of *Series on Knots and Everything*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002. A study of knots, 3-manifolds, and their sets.
- [16] Okuda J.: Duality formulas of the Special Values of Multiple Polylogarithms. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 37, No. 2, pp. 230–242, 2005.
- [17] Okuda J. and Ueno K.: The Sum Formula of Multiple Zeta Values and Connection Problem of the Formal Knizhnik-Zamolodchikov Equation. In T. Aoki, S. Kanemitsu, M. Nakahara, and Y. Ohno eds., *Zeta functions, topology and quantum physics*, Vol. 14 of *Dev. Math.*, pp. 145–170. Springer, New York, 2005.
- [18] C. Reutenauer.: *Free Lie algebras*, Vol. 7 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.
- [19] Yoshida M.: *Hypergeometric functions, my love*. Aspects of Mathematics, E32. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.
- [20] 吉田正章. 私説 超幾何関数. 共立講座 21 世紀の数学. 共立出版, 1997.