

Title	Stability of Volterra difference equations(Theory of Biomathematics and its Applications III)
Author(s)	室谷, 義昭; 石渡, 恵美子
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1551: 105-110
Issue Date	2007-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/80886
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Stability of Volterra difference equations

早稲田大学理工学部 室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)
Department of Mathematical Science, Waseda University

東京理科大学理学部 石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)
Department of Mathematical Information Science, Tokyo University of Science

1 はじめに

Volterra 差分方程式

$$\begin{cases} x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=-\infty}^i a_{i,j} f_{i-j}(x_j), & i = 0, 1, 2, \dots, \\ x_j = \phi_j, & -\infty < j \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

について考える。ここで $0 < q < 1$ であり、関数 $f_j(x) (0 \leq j < +\infty)$ が与えられ、 $a_{i,j} \geq 0$ ($-\infty < j \leq i$)、 $\sum_{j=-\infty}^i a_{i,j} > 0$ かつ $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^i a_{i,j} = +\infty$ とする。さらに、 $\phi_j, -\infty < j \leq 0$ と

$b_i = \sum_{j=-\infty}^0 a_{i,j} f_{i-j}(\phi_j), i \geq 0$ は有界であり、次を満たす狭義単調増加関数 $f(x)$ が存在するとする。

$$\begin{cases} f(0) = 0, & 0 < \frac{f_j(x)}{f(x)} \leq 1, \quad x \neq 0 (0 \leq j < +\infty), \\ f(x) \neq x \text{ のとき, } & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ が存在し有限である.} \end{cases} \quad (1.2)$$

これまでに、有限個の遅れを持つ非線形微分方程式に対して、Muroya, Ishiwata, Guglielmi [3] と Uesugi, Muroya, Ishiwata [5] の結果が得られており、本報告では、これらの結果を非有界遅れの差分方程式 (1.1) に応用する。(1.1) の零解の大域漸近安定性の十分条件には若干の制約はあるが、Volterra 積分微分方程式の差分法の安定性解析にも応用可能である (Vecchio [6] と Song, Baker [4] 参照)。

ここで、定義を述べておく。

定義 1.1 (1.1) の零解が**一様安定**とは、任意の $\varepsilon > 0$ と非負の整数 i_0 に対して、(1.1) の解 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が $\sup\{|x_{i_0-j}| \mid 0 \leq j < +\infty\} < \delta$ のとき、 $|x_i| < \varepsilon, i = i_0, i_0 + 1, \dots$ となる $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在することである。

定義 1.2 (1.1) の零解が**大域吸引性**を持つとは、(1.1) のすべての解が $i \rightarrow \infty$ に対し、0 に収束することである。

定義 1.3 (1.1) の零解が**大域漸近安定**であるとは、一様安定であり、かつ大域吸引性を持つことである。

定義 1.4 (1.1) の零解が**一様漸近安定**であるとは、一様安定であり、かつ、(1.1) の任意の解 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ が $|x_j| < \delta, -\infty < j \leq 0$ ならば、 $\lim_{i \rightarrow +\infty} x_i = 0$ となる $\delta > 0$ が存在することである。

2 Volterra 差分方程式への応用

この節では、非有界遅れを持つ (1.1) の零解の大域漸近安定性の十分条件を考える。有限個の遅れを持つ差分方程式に対する条件と比べて、証明に少し特別な工夫が必要である。

補題 2.1 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする。任意の $i \geq i_0$ に対し、 $x_i \geq 0$ (respect. $x_i \leq 0$)

となるような非負の整数 i_0 が存在し、 $\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j}$ は有界であると仮定する。このとき、 $\tilde{b}_{i,i_0} =$

$-\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j} f_{i-j}(x_j)$ は有界で、 $\limsup_{i \rightarrow \infty} x_i \leq \frac{\limsup_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0}}{1-q}$ (respect. $\liminf_{i \rightarrow \infty} x_i \geq \frac{\limsup_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0}}{1-q}$)

となる。

さらに、a) $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0} = 0$ 、もしくは b) $\liminf_{j \rightarrow \infty} (\liminf_{i \rightarrow \infty} a_{i,j}) > 0$ 、かつ、 $\inf_{j \geq 0} f_j(x) \geq \underline{f}(x)$

(respect. $\sup_{j \geq 0} f_j(x) \leq \underline{f}(x)$), $x \in (-\infty, +\infty)$ と $f(0) = 0$ を満たすような $(-\infty, +\infty)$ で狭義単調増加関数 $\underline{f}(x)$ が存在すると仮定する。このとき、 $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ が成り立つ。

$\sum_{j=-\infty}^{i_0-1} a_{i,j} = \sum_{k=(i-i_0)+1}^{\infty} a_{i,i-k}$ であることに注意しよう。(1.1) が convolution タイプ、すなわち、 $a_{i,j} = a_{i-j}$ 、 $-\infty < j \leq i$ のとき、条件 $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{b}_{i,i_0} = 0$ は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$ と同等である。なぜならば、これは任意の正定数 $i_0 \geq 0$ に対して、 $\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=(i-i_0)+1}^{\infty} a_k = 0$ と同等であるからである。

補題 2.2 $f(x) \neq x$ で $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ を (1.1) の解とする。 x_i が 0 のまわりで振動し、

$\lambda = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i q^{i-k} \sum_{j=-\infty}^k a_{k,j} < +\infty$ ならば、 x_i は有界である。

注意 2.1 $f(x) \neq x$ で $\lambda < +\infty$ ならば、補題 2.2 より、0 のまわりを振動する (1.1) の任意の解 x_i は上にも下にも有界である。

ここで、 $r_1 = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i q^{i-k} (\sum_{j=0}^k a_{k,j})$ とおく。次の主定理の証明ができる。

定理 2.1 $f(x)$ が $(-\infty, +\infty)$ で連続で、任意の $L < 0$ に対して $-r_1 f(-r_1 f(L)) > L$ とする。また、次式を仮定するとき、(1.1) の零解は大域漸近安定である。

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (\limsup_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{i,i-k}) = 0. \quad (2.1)$$

(証明) 補題 2.1 より、(1.1) の解 x_i が 0 のまわりで振動すると仮定する。

I) はじめに、 $f(x) \neq x$ の場合を考えよう。(1.1) の解 x_i は補題 2.2 によって有界である。 $\underline{x} = \liminf_{i \rightarrow \infty} x_i < 0$ を仮定し、 $M = \sup_{-\infty < i < +\infty} |f(x_i)| < +\infty$ とおく。また、任意の $0 < \epsilon < \bar{x}$ と $[0, \epsilon]$ での連続関数 $F(x) = -r_1 f(-r_1 f(x) + 2x) - 3x$ をとる。 $F(0) = -r_1 f(-r_1 f(\bar{x})) > \bar{x}$ となるので、 $x = 0$ での $F(x)$ の連続性により、 $F(\epsilon_0) = -r_1 f(-r_1 f(\bar{x} - \epsilon_0) + 2\epsilon_0) - 3\epsilon_0 > \bar{x}$ となる定数 $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ が存在する。 $\underline{x} = \liminf_{i \rightarrow \infty} x_i < 0$ により、この $\epsilon_0 > 0$ に対し、 $i \geq i_0$ ならば、 $x_i > \bar{x} - \epsilon_0$ となる正整数 i_0 が存在する。仮定 (2.1) より、 $\epsilon_1 = (1-q)\epsilon_0/M > 0$ に対して、

$$\sum_{j=-\infty}^{(i-k_1)-1} a_{i,j} = \sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{i,i-k} < \epsilon_1, \quad i \geq i_1 \geq 2k_1 + i_0, \quad \text{かつ} \quad q^{k_1+1} < \epsilon_0/M.$$

となる正整数 i_1 と $k_1 \geq i_0$ が存在する。このとき、 $l \geq i_1$ と $\bar{b}_{l,l-k_1} = - \sum_{j=-\infty}^{(l-k_1)-1} a_{l,j} f_{l-j}(x_j)$ に対して、

$$|\bar{b}_{l,l-k_1}| \leq \left(\sum_{j=-\infty}^{(l-k_1)-1} a_{l,j} \right) M = \left(\sum_{k=k_1+1}^{\infty} a_{l,l-k} \right) M < \epsilon_1 M = (1-q)\epsilon_0,$$

となり、よって、 $i \geq i_1 + k_1$ に対して、 $|\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1}| \leq \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} (1-q)\epsilon_0 < \epsilon_0$.

a) x_{i+1} , $i \geq i_1 + k_1$ の上界を考える。

$$x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=i-k_1}^i a_{i,j} f_{i-j}(x_j) + \bar{b}_{i,i-k_1}, \quad i \geq i_1 + k_1.$$

i) ある $i \geq i_1 + k_1$ に対して、 $x_{i+1} > x_i$ であり、 $\underline{x} - \epsilon_0 < x_{g(i)} = \min_{i-k_1 \leq j \leq i} x_j < 0$ となる正整数 $g(i) \in \{i-k_1, i-k_1+1, \dots, i\}$ が存在する場合を仮定する。このとき、(1.1) により、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &\leq q^{i-g(i)+1} x_{g(i)} - \left(\sum_{k=g(i)}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^k a_{k,j} \right) f(\underline{x} - \epsilon) - \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1} \\ &\leq - \left(\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^k a_{k,j} \right) f(\underline{x} - \epsilon) + \epsilon_0 \leq -r_1 f(\underline{x} - \epsilon) + \epsilon_0 \leq R_{\underline{x}} \end{aligned}$$

となる。ここで $R_{\underline{x}} = -r_1 f(\underline{x} - \epsilon_0) + 2\epsilon_0$ である。

ii) $x_{i+1} > x_i$ かつ、ある $i \geq i_1 + k_1$ に対して、 $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k_1} \geq 0$ となる場合を仮定する。

$x_j \geq 0$, $i-k_1 \leq j \leq i$ $q^{k_1+1} M < \epsilon_0$ かつ $|\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1}| < \epsilon_0$ なので、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q^{k_1+1} x_{i-k_1} - \left(\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^k a_{k,j} f_{k-j}(x_j) \right) + \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1} \\ &\leq - \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{(i-k_1)-1} a_{k,j} f(\underline{x} - \epsilon) + 2\epsilon_0 \leq R_{\underline{x}}. \end{aligned}$$

となる。ゆえに、i) と ii) の両方の場合に対して、 $x_{i+1} \leq R_{\underline{x}}$, $i \geq i_1 + k_1$ を得る。

b) 次に $x_{i+1} = - \sum_{j=i-k_1}^i a_{i,j} f_{i-j}(x_j) + \bar{b}_{i,i-k_1}$, $i \geq i_1 + 2k_1$ の下界を考えよう。

iii) ある $i \geq i_1 + 2k_1$ に対し、 $x_{i+1} < x_i$ であり、 $R_{\underline{x}} \geq x_{\bar{g}(i)} = \max_{i-k_1 \leq j \leq i} x_j > 0$ となる正整数 $\bar{g}(i) \in \{i-k_1, i-k_1+1, \dots, i\}$ が存在する場合を仮定する。

このとき、同様に、 $x_{i+1} \geq -r_1 f(R_{\underline{x}}) - \epsilon_0 > S_{\underline{x}}$ を得る。ここで、 $S_{\underline{x}} = -r_1 f(R_{\underline{x}}) - 2\epsilon_0$ である。

iv) $x_{i+1} < x_i$ および、ある $i \geq i_1 + 2k_1$ に対し、 $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k_1} \leq 0$ の場合を仮定する。このとき、同様に、

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= q^{k_1+1} x_{i-k_1} - \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^i a_{k,j} f_{k-j}(x_j) + \sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \bar{b}_{k,k-k_1} \\ &\geq - \left(\sum_{k=i-k_1}^i q^{i-k} \sum_{j=k-k_1}^{(i-k_1)-1} a_{k,j} \right) f(R_{\underline{x}}) - 2\epsilon_0 \geq S_{\underline{x}}. \end{aligned}$$

このように, iii) と iv) の両方の場合に対し, $x_{i+1} \geq S_{\underline{x}}$, $i \geq i_1 + 2k_1$ を得る. $S_{\underline{x}} - \epsilon_0 = F(\epsilon_0) > \underline{x}$ なので, $x_{i+1} \geq S_{\underline{x}} > \underline{x} + \epsilon_0$, $i \geq i_1 + 2k_1$ となる. これは矛盾する. よって, $\underline{x} = 0$ であり, 補題 2.1 より, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ を得る.

II) $f(x) = x$ の場合に対し, 同様に $\limsup_{i \rightarrow \infty} |x_i| < +\infty$ を得る. 残りは I) と同様に証明できる. よって, 結論を得る. \square

(1.1) の convolution タイプに対して, 条件 (2.1) は $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$ になる.

定理 2.1 を特に $f(x) = x$ と $f(x) = e^x - 1$ に適用すると, 次の定理を得る.

定理 2.2 (1.1) に対して, (2.1) を仮定し, 次の条件を成り立つとする.

$$\begin{cases} f(x) = x \text{ ならば,} & r_1 < 1, \\ f(x) = e^x - 1 \text{ ならば,} & r_1 \leq 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

このとき, (1.1) の零解は大域漸近安定である.

特に, $f_j(x) = x$, $0 \leq j < \infty$ となる線形の場合に対し, (2.1) と次が成り立つとする.

$$\begin{cases} a_{i,i} \geq q, i \geq 0 \text{ ならば,} & r_1 < 1 + q \\ a_{i,i} < q, i \geq 0 \text{ ならば,} & \bar{r}_1 < 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

ここで, $\bar{r}_1 = \sup_{i \geq 0} \sum_{k=0}^i (q - \liminf_{l \rightarrow +\infty} a_{i,l})^{i-k} (\sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j})$ である. このとき, (1.1) の零解は大域漸近安定である. この場合, $q_x - a_{i,i}x = (q - a_{i,i})x$, $i \geq 0$ なので, $q \geq 1$ も考えられる.

定理 2.2 は (1.1) の零解の一樣漸近安定である十分条件を導くのに便利である.

最後に, $a_0 > \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ かつ $f(x) = f_0(x) = e^x - 1$ という条件のもとで, 次の convolution タイプの差分方程式

$$x_{i+1} = x_i - \sum_{j=-\infty}^i a_{i-j} f_{i-j}(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

に対する大域的漸近安定性の条件を考える.

定理 2.3 条件 (1.2) と $-\infty < j \leq i$ において $a_{i,j} = a_{i-j} \geq 0$ に加え,

$$\begin{cases} \bar{r}_1 > \bar{r}_2 \geq 0, & \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \leq 2, \text{ かつ} \\ \bar{r}_1 + \bar{r}_2 > 1 \text{ ならば,} & \bar{r}_1 + \bar{r}_2 - \frac{\bar{r}_2}{\bar{r}_1} e^{\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 1} \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ならば, (2.4) の零解が大域的漸近安定である. ここで, $\bar{r}_1 = a_0$ および $\bar{r}_2 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ である.

3 $|f_i(x)| \leq |x|$, $i \geq 0$ の一般的な場合

ここで, 次の方程式の解 x_i の有界性の条件と零解の大域吸引性の条件を考えよう.

$$x_0 = \phi_0, \quad x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=0}^i a_{i,j} x_j + b_i, \quad b_i = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{i,j} \phi_j, \quad i \geq 0. \quad (3.1)$$

(3.1) より, $|x_0| = |\phi_0|$, $|x_{i+1}| \leq \sum_{j=0}^i |\tilde{a}_{i,j}| |x_j| + |\tilde{b}_i|$, $i \geq 0$ となる. ここで, $\tilde{b}_i = b_i$, $i \geq 0$, $\tilde{a}_{i,j} = a_{i,j}$, $0 \leq j \leq i-1$ かつ $\tilde{a}_{i,i} = -q + a_{i,i}$ である.

このとき, Crisci 他 [2] の定理 3.1 と系 3.1 を改良する次の定理を得る.

定理 3.1 $A = \sup_{0 \leq j \leq i} |\tilde{a}_{i,j}| < +\infty$ と $B = \max(|\phi_0|, \sup_{i \geq 0} |\tilde{b}_i|) < +\infty$ を仮定と, $|x_i| \leq (1+A)^i B$, $i \geq 0$ である. 特に, $\bar{A}_0 = \sup_{i \geq i_0} \sum_{j=i_0}^i |\tilde{a}_{i,j}| < 1$ となるような正整数 i_0 が存在するならば, x_i は有界であり, また $|x_i| \leq (1+A)^{i_0} B / (1-\bar{A}_0) < +\infty$, $i \geq i_0$ となる. さらに, $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = 0$ 及び $\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=k_1+1}^i |a_{i,i-k}|) = 0$ ならば, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ となる.

Crisci 他 [1] の証明と同様に, さらに次の定理を得る.

定理 3.2 $\bar{A} = \sup_{j \geq 0} \sum_{i=j}^{\infty} |\tilde{a}_{i,j}| < 1$ および $\bar{B} = |\phi_0| + \sum_{i=0}^{\infty} |\tilde{b}_i| < +\infty$ ならば, $\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \leq \bar{B} / (1-\bar{A}) < +\infty$ であり, さらに $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ となる.

線形方程式

$$x_{i+1} = qx_i - \sum_{j=0}^i a_{i,j} x_j + b_i, \quad b_i = \sum_{j=-\infty}^{-1} a_{i,j} \phi_j, \quad i \geq 0 \quad (3.2)$$

に対して, (3.2) の零解の大域安定性に関する次の定理を得る (Crisci 他 [2] の定理 3.1 および系 3.1 を参照).

定理 3.3 線形方程式 (3.2) に対し, 次を仮定する.

$$\begin{cases} \tilde{c}_{i,j} = a_{i-1,j} - a_{i,j}, & 0 \leq j \leq i-2, \quad i \geq 2 \\ \tilde{c}_{i,i-1} = -q + a_{i-1,i-1} - a_{i,i-1}, & i \geq 1, \quad \tilde{c}_{i,i} = 1 + q - a_{i,i}, \quad i \geq 0 \\ \tilde{d}_0 = b_0 \quad \text{と} \quad \tilde{d}_i = b_i - b_{i-1}, & i \geq 1. \end{cases}$$

i) $C = \sup_{0 \leq j \leq i} |\tilde{c}_{i,j}|$ および $D = \max(|\phi_0|, \sup_{i \geq 0} |\tilde{d}_i|) < +\infty$ を仮定するとき, $|x_i| \leq (1+C)^{i_0} D$, $i \geq 0$

となる. 特に $\bar{C}_0 = \sup_{i \geq i_0} \sum_{j=i_0}^i |\tilde{c}_{i,j}| < 1$ となる正整数 i_0 が存在するならば, x_i が有界であり, $|x_{i+1}| \leq (1+C)^{i_0} D / (1-\bar{C}_0) < +\infty$, $i \geq i_0$ である. さらに,

$$\lim_{k_1 \rightarrow \infty} (\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=k_1+1}^i |\tilde{c}_{i,i-k}|) = 0 \quad \text{かつ} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (b_i - b_{i-1}) = 0$$

ならば, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ となる.

ii) もし, $\bar{C} = \sup_{j \geq 0} \sum_{i=j}^{\infty} |\tilde{c}_{i,j}| < 1$ かつ $\bar{D} = \sum_{i=0}^{\infty} |b_{i+1} - b_i| + |b_0| < +\infty$ ならば, $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leq \bar{D} / (1-\bar{C}) < +\infty$ となり, さらに $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ である.

例 3.1 $a_{i,j} = a$, $0 \leq j \leq i$ とする. この場合, (2.1) は満足しないが, $2q < a < 2$ および $\sum_{i=0}^{\infty} |b_{i+1} - b_i| + |b_0| < +\infty$ のとき, $\bar{C}_0 < 1$ は $|1+q-a| + q < 1$ となり, 定理 3.3 より, $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ が成り立つ.

4 応用

次の Volterra 差分方程式を考える.

$$x_{i+1} = x_i - \sum_{j=-\infty}^i a_{i-j} f(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

ここで, $f(x) = e^x - 1$, $a_j = \lambda c_j$, $0 \leq j < +\infty$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j = \lambda$, さらに, $i = 0, 1, 2, \dots$ に対し,

$$c_0 = \int_0^1 (1-t)k(t)dt, \quad c_{i-j} = \int_0^1 \int_0^1 k(i-j+u-s)dsdu, \quad -\infty < j \leq i-1, \quad (4.2)$$

かつ $\sum_{j=0}^{\infty} c_j = \int_i^{i+1} \int_{-\infty}^u k(u-s)dsdu = \int_0^{\infty} k(t)dt = k^* < +\infty$ である.

このとき, (4.1) に定理 2.2 の結果を応用できる. たとえば, $k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\alpha t^2}$, $\alpha > 0$ とおくと, $k^* = 1$ および $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^1 (1-t)e^{-\alpha t^2} dt \geq \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \int_0^1 (1-t)(1-\alpha t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} (\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{12})$ である. ここで少なくとも, $\alpha \leq \frac{1}{4\pi}$ に対して, $c_0 > \frac{1}{2}$ を得て, 条件 $a_0 > \sum_{j=1}^{\infty} a_j$ が成り立ち, 特に, $\sum_{j=1}^{\infty} a_j/a_0 \leq 1/e$ ならば, 定理 2.3 の (2.5) を満足し, (4.1) の零解は $0 < \lambda \leq 2$ ならば, 大域漸近安定である.

定理 2.2 を (4.1) の $f(x) = x$ の場合に適用すると, (4.1) の零解の一樣漸近安定性の十分条件を得る. たとえば, $0 < \lambda < 2$ ならば, $k(t) = te^{-t}$ の (4.1) の場合の零解は一樣漸近安定である (cf. Song, Baker [4]).

他の応用として, 次の離散 Wazewska-Czyzewska-Lasota モデルがある (Wazewska, Czyzewska, Lasota [7] 参照).

$$y_{i+1} = qy_i + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j e^{-\gamma y_{i-j}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < q < 1, \quad \gamma > 0, \quad \beta_j \geq 0, \quad \beta = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j > 0. \quad (4.3)$$

正の平衡点 y^* は $y^* = \beta e^{-\gamma y^*} / (1-q)$ の正根で, 定理 2.2 の (2.2) より, $\gamma y^* \leq 1$ ならば, y^* は大域漸近安定である.

参考文献

- [1] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, Stability results on some direct quadrature methods for Volterra integro-differential equations, *Dynam. Systems Appl.* **7** (1998), 501-518.
- [2] M. R. Crisci, V. B. Kolmanovskii, E. Russo, A. Vecchio, A priori bounds on the solution of a nonlinear Volterra discrete equation. Special issue: Hereditary systems qualitative properties and applications, Part I. *Stab. Control Theory Appl.* **3** (2000), 38-47.
- [3] Y. Muroya, E. Ishiwata, N. Guglielmi, Global stability for nonlinear difference equations with variable coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* (2007), doi:10.1016/j.jmaa.2006.12.028.
- [4] Y. Song, Ch.T.H. Baker, Qualitative behavior of numerical approximations to Volterra integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **172** (2004), 101-115.
- [5] K. Uesugi, Y. Muroya, E. Ishiwata, On the global attractivity for a logistic equation with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.* **294** (2004), 560-580.
- [6] A. Vecchio, Stability of backward differentiation formulas for Volterra integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* **115** (2000), 565-576.
- [7] M. Wazewska-Czyzewska, A. Lasota, Mathematical problems of the dynamics of the red-blood cells systems, *Ann. Polish Math. Soc. Series III, Appl. Math.* **17** (1988), 23-40.