

# 余次元 2 例外極小集合を持つ 力学系の構成

広島大学・理学研究科 中山 裕道 (Hiromichi Nakayama)  
Faculty of Science, Hiroshima University

余次元 1 の離散力学系では、例外極小集合はコントロール集合になる。一方、余次元が非常に高い場合、例外極小集合は様々な形を取りうる。そこで本稿では、余次元 2 の場合について考える。余次元 2 の時は、例外極小集合も平面的になる。平面的な図形で、ある種の対称性を持つものはそれほど知られていない。この点で、余次元 2 の例外極小集合は分類することができると思う。本稿では、分類と構成のうち、構成について考えたいと思う。(講究録であることを考慮し、図を多用してみた)。

## 1 $S^1$ の微分同相写像

同相写像  $f$  について、 $f$ -不変な閉部分集合で、包括関係について極小になるものを、極小集合という。円周  $S^1$  の同相写像の場合、極小集合は周期点かコントロール集合か  $S^1$  全体になる。実際に、コントロール集合になることができるかについては、 $f$  の微分可能性に関連していて、次の 2 つの定理により解決している。

定理 1 (Denjoy 1932). 周期点を持たない  $C^2$  微分同相写像  $f : S^1 \rightarrow S^1$  は、無理数回転と位相共役になる。

定理 2 (Denjoy's example (Bohl 1916)). 極小集合がコントロール集合になる  $C^1$  微分同相写像  $f : S^1 \rightarrow S^1$  が存在する。

定理 1 は、 $C^2$  微分同相写像のときは、コントロール集合にはならないことを示しており、一方、定理 2 は  $C^1$  微分同相写像のときは反例があることを主張している。

本稿では、円周上の微分同相写像についての上の古典的な結果を、曲面の微分同相写像に拡張する試みについて述べる。

## 2 目的

定義 3. 極小集合  $\mathcal{M}$  が例外的であるとは、 $\mathcal{M}$  が有限集合、有限個の単純閉曲線、多様体全体でないときとする (図 1)。

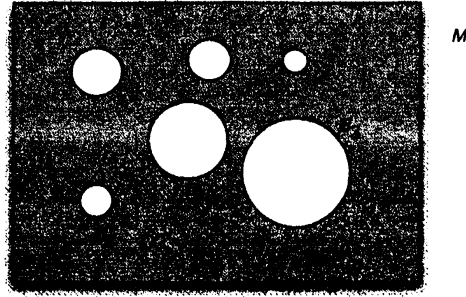


図 1: トーラスの局所連結極小集合

注意 4. 例外極小集合という場合に, カントール集合をいれない流儀もある.

予想 5. 閉曲面の  $C^3$  微分同相写像は, 局所連結な例外極小集合を持たない.

予想 5 へのアプローチとしては,  $C^3$  微分同相写像の極小集合を分類する道と  $C^2$  微分同相写像で局所連結な極小集合を持つ例を構成する道の 2 つが考えられる. 本稿では, このうちの構成について考えることにする.

### 3 $C^0$ 構成

Denjoy は, 円周の無理数回転を取り, その 1 本の軌道に沿って無限個の区間を挿入し,  $C^1$  counter example を構成した (図 2). この節では, 稠密軌道に円板を挿入していくという方針で, 高次元への拡張を行う (図 4).

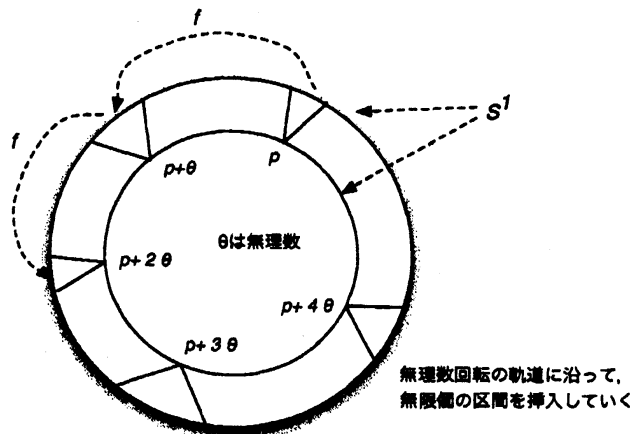


図 2: Denjoy counter example

$M$  を閉多様体とする. 次の 3 つの性質を満たす  $M$  の開球の族  $\{B_i\}_{i=1,2,\dots}$  が取れたとする (図 1).

- (1)  $\{\overline{B_i}\}$  は互いに交わらない閉球になっている.  
 (2)  $\overline{\bigcup_{i=1,2,\dots} B_i} = M$   
 (3)  $\{B_i\}$  は null-sequence. すなわち,  $\text{diam } B_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$  が成り立つ.

このとき,  $M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$  を Sierpiński  $M$ -set という.

定理 6 (Whyburn). もし  $M$  が閉曲面ならば, Sierpiński  $M$ -set は同相を除いて一意である.

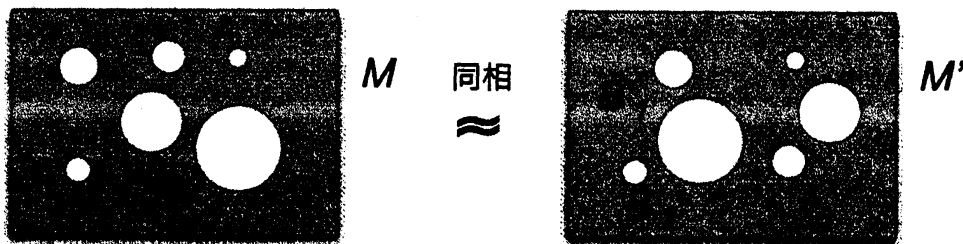


図 3:  $\{B_i\}$  と  $\{B'_i\}$  は条件 (1) (2) (3) を満たすものとする

特に,  $M$  が 2 次元球面の時, Sierpiński  $M$ -set は Sierpiński carpet と呼ばれる. (Sierpiński carpet を極小集合とする  $S^2$  の同相写像は存在しないことが知られている ([1])).

定理 7 (Aarts and Oversteegen). Sierpiński  $T^2$ -set を極小集合に持つトーラス  $T^2$  の同相写像が存在する.

以下, この節では, この拡張について紹介し, 証明の概略を述べる.

定理 8 (with Biś, Walczak).  $M$  を閉微分可能多様体とする (1 次元以上).  $G$  を, 微分同相群  $\text{Diff}(M)$  の有限生成部分群とする. 任意の点  $x \in M$  について, その軌道  $G(x)$  が稠密であるとする. このとき, 同相群  $\text{Homeo}(M)$  の部分群  $\hat{G}$  が存在して,  $G$  と同型で, かつ, Sierpiński  $M$ -set を極小集合に持つ.

証明の概略.

#### 第 1 段階 (inverse limit $\hat{M}$ の構成)

$M$  の元  $x_0$  を取り固定する. 以下,  $x_0$  を通る軌道  $G(x_0)$  の各点に円板を挿入することで, inverse limit を定義する (図 4 参照).

$G(x_0)$  の元を  $x_0, x_1, x_2, \dots$  と書くことにし (順番は特に気にしない),  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  を  $O_n$  とする. いま, 十分小さい  $\varepsilon_n > 0$  を取る. 各  $x_j \in O_n$  について,  $\{w \in T_{x_j}M; |w| < 1 + \varepsilon_n\}$  を  $D_j^n$  と書き,  $p_j^n: \{w \in D_j^n; 1 < |w| < 1 + \varepsilon_n\} \rightarrow M \setminus O_n$  を

$$p_j^n(w) = \exp_{x_j} \left( \frac{|w| - 1}{|w|} w \right)$$

( $j = 0, 1, \dots, n$ ) により定義する. そこで,  $M \cup \bigcup_{j=1}^n D_j^n$  を  $p_j^n$  により貼り合わせてできるものを  $M_n$  とする.  $M_n$  には,  $M$  と同相になるように距離  $d_n$  を入れる. 挿入

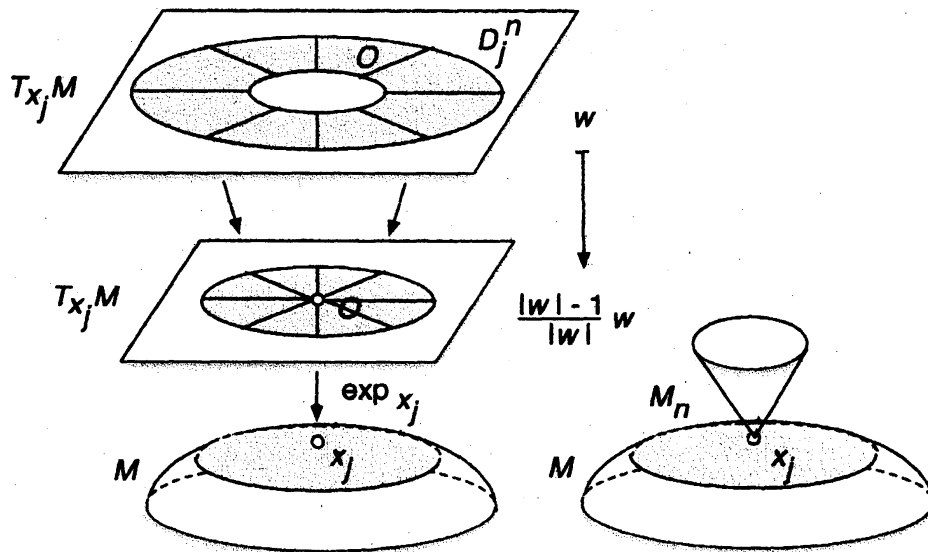


図 4:  $x_j$  に円板を挿入する

された円板  $\{w \in D_{n+1}^{n+1}; 0 \leq |w| < 1\}$  を 1 点につぶす写像を,  $\psi_{n,n+1}: M_{n+1} \rightarrow M_n$  とし,  $\psi_{kl} = \psi_{k,k+1} \circ \psi_{k+1,k+2} \circ \dots \circ \psi_{l-1,l}: M_l \rightarrow M_k$  ( $k < l$ ) を射影とする inverse limit を  $\hat{M}$  と書く. すなわち,

$$\hat{M} = \{(M_n, \psi_{kl})\} = \{(z_n) \in \prod_{n \geq 0} M_n; \psi_{kl}(z_l) = z_k \text{ (} k < l)\}$$

とする. ここで, Daverman の Decomposition theory により,  $\hat{M}$  は  $M$  と同相となり, 更に, 挿入された円板を引いた残りは Sierpiński  $M$ -set になることがわかる.

### 第 2 段階 (準同型 $G \rightarrow \text{Homeo}(M)$ の構成)

以下,  $\pi_n: M_n \rightarrow M$  を射影とする.

同相写像  $h \in G$  について,  $\hat{h}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}$  を定義する. そこで,  $(z_n) \in \hat{M} (\subset \prod_{n \geq 0} M_n)$  について,  $(w_n) = \hat{h}((z_n))$  を次のように定める.

(1)  $z_0$  が  $G(x_0)$  に含まれないとき,  $h\pi_n(z_n) = \pi_n(w_n)$  により,  $\hat{h}$  を定義する (図5).

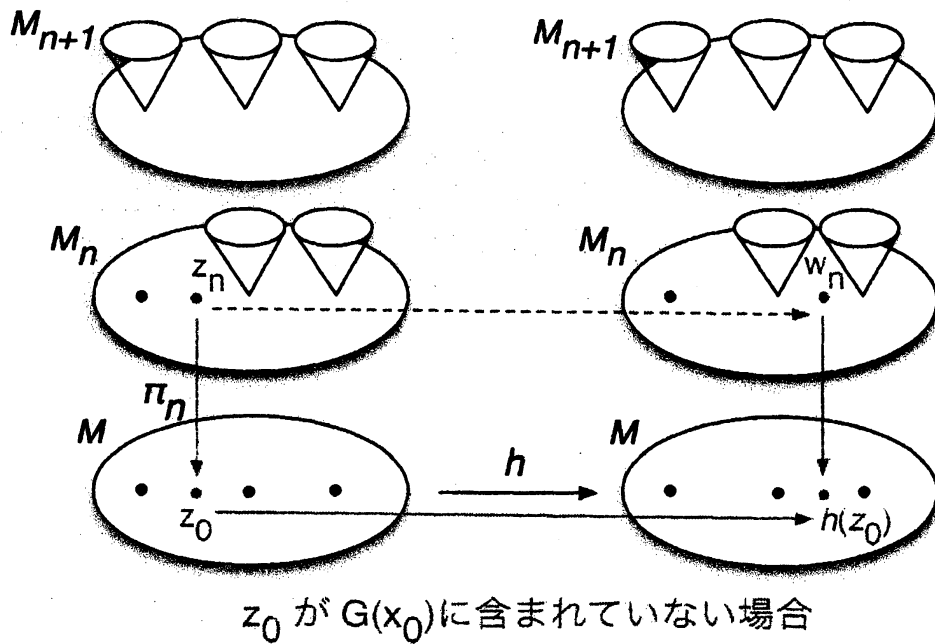
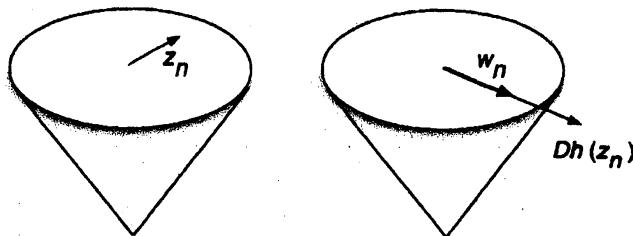


図5:  $\hat{M}$  上の同相写像の構成 (1)

(2)  $z_0$  が  $G(x_0)$  に含まれるとき. すなわち,  $z_0 \in O_m, h(z_0) \in O_m$  となる  $m$  が存在するとき (図6).

(a)  $n \geq m$  のとき,

$$w_n = \frac{Dh(z_n)}{|Dh(z_n)|} |z_n|$$



(b)  $n < m$  のとき,

$$w_n = \psi_{n,m}(w_m)$$

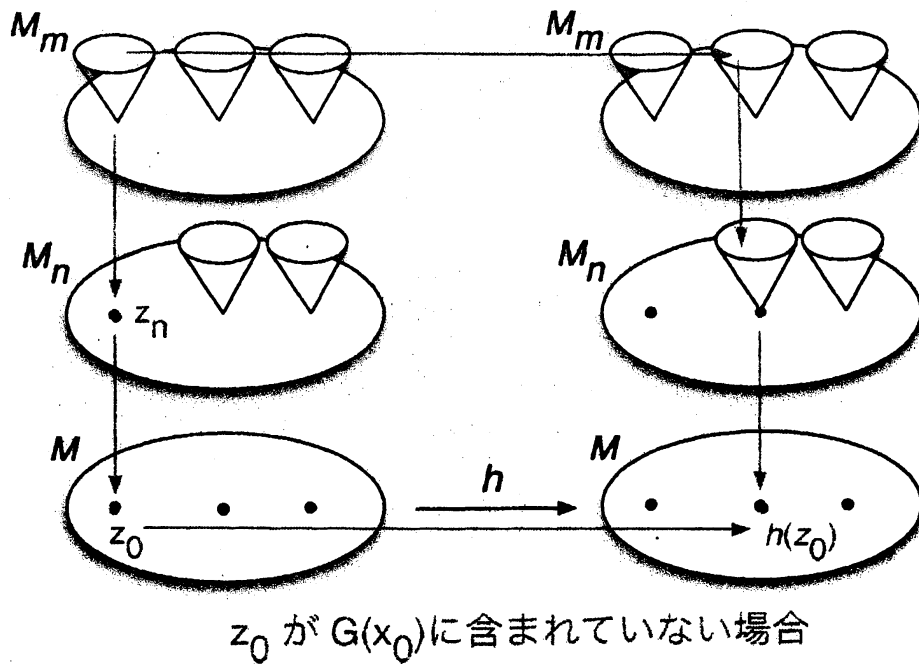


図 6:  $\hat{M}$  上の同相写像の構成 (2)

性質

- (1)  $h \rightarrow \hat{h}$  は準同型写像になる.

実際,

$$\frac{D(\hat{h}'\hat{h})(z_n)}{|D(\hat{h}'\hat{h})(z_n)|} \Big|_{z_n} = \frac{Dh'(Dh(z_n))}{|Dh'(Dh(z_n))|} \Big|_{z_n}$$

から証明できる.

- (2) 挿入した円板を引いた残りが  $\hat{h}$  の極小集合になる.

■

注意 9. 一般に, *inverse limit* は微分可能多様体にならない.

注意 10. *minimal action* から自由に局所連結な例外極小集合を作ることができる.

## 4 $C^2$ -構成

トーラスの微分同相写像  $f: T^2 \rightarrow T^2$  が Denjoy 型であるとは, minimal translation  $g$  と  $\psi$  により半共役で (すなわち,  $\psi \circ f = g \circ \psi$ ),  $\psi^{-1}(x)$  が, 可算個の  $x$  を除いて, 1 点になるときをいう.

定理 11 (Norton-Sullivan[5]).  $f$  を Denjoy 型の  $T^2$  の微分同相写像とする. その補集合がすべて幾何学的な円板 (正方形) になるような極小集合を持つとき,  $f$  は  $C^3$  にならない.

一方, McSwiggen は次のような例を構成している.

定理 12 (McSwiggen[4]). 任意の  $\varepsilon > 0$  について, Denjoy 型の  $T^2$  の  $C^{3-\varepsilon}$  微分同相写像で, 極小集合が Sierpiński  $T^2$ -set となるものが存在する.

そこで, 極小集合の補集合の幾何学的な形が大事であると見込まれる. McSwiggen の例の場合, その極小集合の補集合は滑らかな単純閉曲線で囲まれている. ここでは, 次のような例を構成する.

定理 13 (with Asaoka). 任意の  $\varepsilon > 0$  について, Denjoy 型の  $C^{3-\varepsilon}$  微分同相写像  $f: T^2 \rightarrow T^2$  で, 次の性質を満たすものが作れる.

- (1)  $f$  は, ただ一つの極小集合  $\mathcal{M}$  を持ち, その補集合は開円板の可算和  $\{U_i\}$  をからなり, その閉包は互いに交わらない.
- (2)  $\overline{U_i}$  は角がある.

### 構成の概略

$A$  を  $SL(3, \mathbb{Z})$  の元とする.  $A$  の固有値を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , (長さが 1 の) 固有ベクトルを  $v_1, v_2, v_3$  とするとき, 次の条件を満たすものとする.

- (1)  $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < \frac{1}{8} < 1 < \lambda_3$
- (2)  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < \sqrt{2e^{1-\sqrt{2}} - 1}$
- (3)  $\lambda_1^2 < \lambda_2^{2-\varepsilon}$

行列  $A$  は  $T^3$  の微分同相写像を誘導する. ここで, McSwiggen は, 原点の周りに周期軌道を挿入した. そこで, 本稿では原点の周りに dominated splitting を挿入する (図 7). 正確には, 図 8 のように作られた関数  $\alpha$  について,  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を

$$F(x, y, z) = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \alpha(r)x, \alpha(r)y, \lambda_3 z \right)$$

(ここで,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ) により定義し,  $x, y, z$  軸をそれぞれ固有ベクトル  $v_1, v_2, v_3$  に対応させ, 原点の周りに挿入してやる.

こうしてできた partially hyperbolic diffeomorphism について, partially hyperbolic diffeomorphism としての strong unstable foliation を取る (図 9). (これは, 図 10 で与えられる graph transformation の解に接する foliation である.)  $C^r$ -section theorem

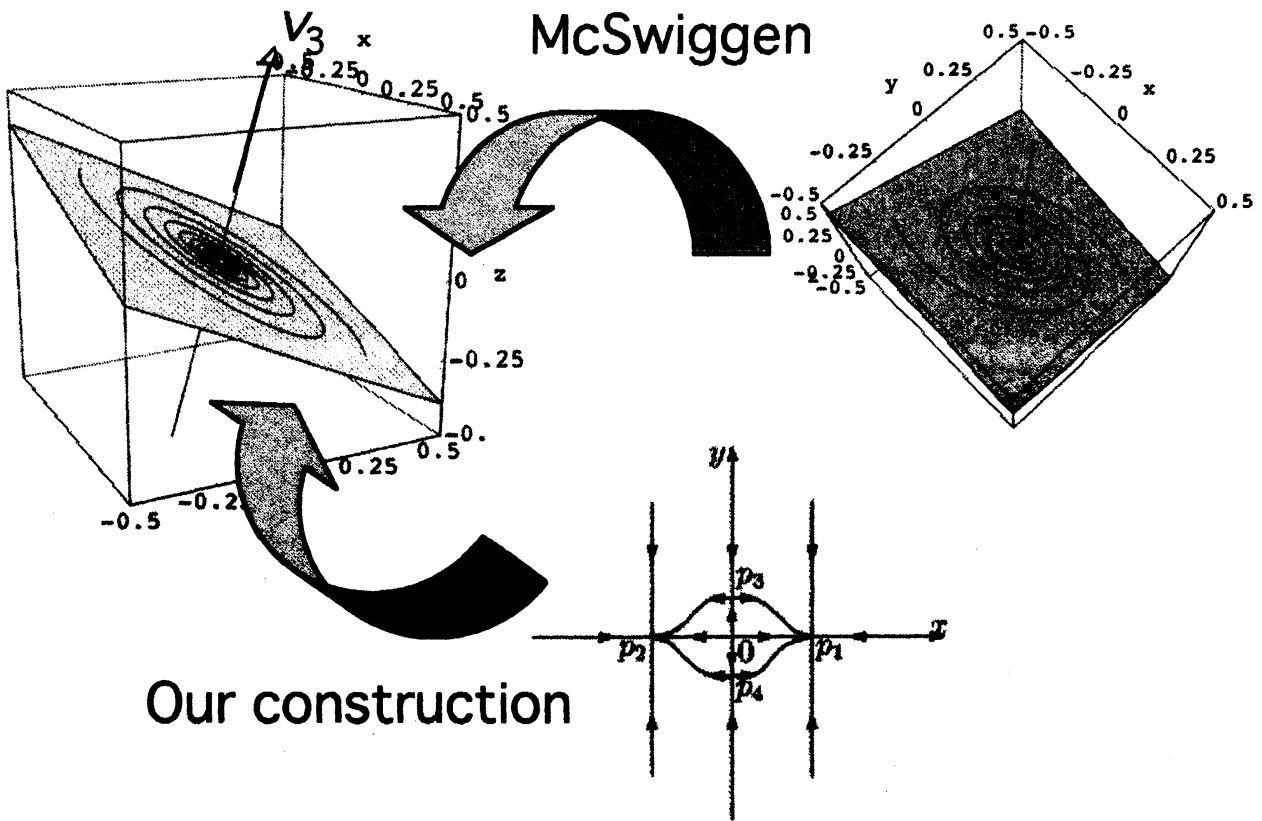


図 7: 双曲型同型写像の変形

([3]) により, strong unstable foliation の微分可能性は

$$\|(Df)_p^{-1}\|^k \frac{\|Df|_{T_p \mathfrak{F}_s}\|}{\lambda_3} < 1$$

が成り立つとき,  $C^k$  になる (ここで,  $\mathfrak{F}_s$  は  $v_1, v_2$  方向の foliation). この例の場合,

$$\|(Df)_p^{-1}\|^k \frac{\|Df|_{T_p \mathfrak{F}_s}\|}{\lambda_3} = \frac{1}{\alpha(r)^k} \frac{\lambda_1 \alpha(r)}{\lambda_2 \lambda_3} = \frac{\lambda_1^2}{\alpha(r)^{k-1}}$$

となるが,  $\alpha(r) \geq \lambda_2$  と  $\lambda_1^2 < \lambda_2^{2-\epsilon}$  という条件から, strong unstable foliation の微分可能性は  $C^{3-\epsilon}$  になる. ちなみに, この構成法ではこれ以上微分可能性があがらない.

そこで,  $T^2 \times \{0\}$  に関する first return map を取ると, 目標とするトーラスの微分同相写像ができる.

注意 14 (課題). McSwiggen の例では, 極小集合が Sierpiński  $T^2$  集合であることが示せる. しかし, ここで構成した例では, 極小集合が Sierpiński  $T^2$  集合であるかがわからない. 具体的には, 穴の大きさ (距離空間としての直径) が段々と小さくなる



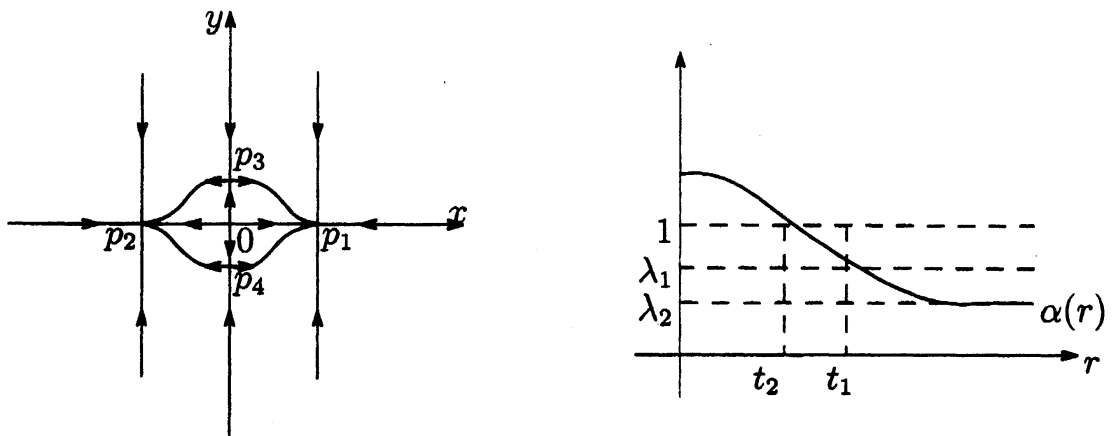
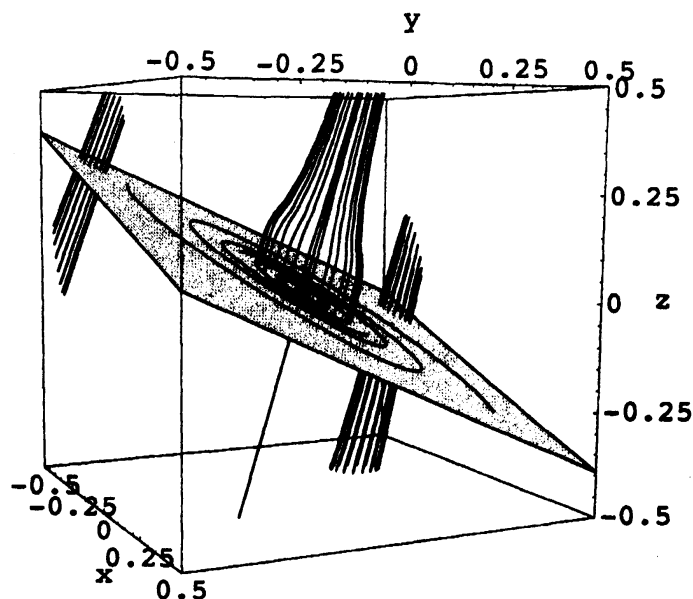


図 8:  $F$  のイメージと  $\alpha$  の定義

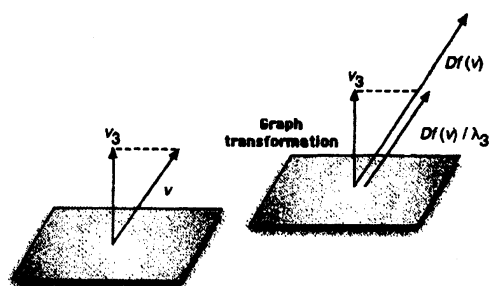
ことが示せない。実際、この *partially hyperbolic diffeomorphism* は、*strong unstable foliation* 以外に、*strong stable foliation* と *center (branched) foliation* をもつ。もし、*strong stable foliation* が *minimal foliation* ならば、極小集合の補集合の中に細長くなるものができ、極小集合は局所連結でなく、*Sierpiński  $T^2$ -set* にならない。しかし、現在、この *strong stable foliation* が *minimal* かどうかを調べる方法が開発されていない。より簡単に、Mañé の例でも、その *strong stable foliation* と *strong unstable foliation* がともに *minimal* になるかという問題は未解決であり、ここ数ヶ月間に限っても専門家の間で盛んに研究されている。

## 参考文献

- [1] J. M. Aarts and L. G. Oversteegen, *The dynamics of the Sierpiński curve*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994) 965–968.
- [2] A. Biś, H. Nakayama and P. Walczak, *Locally connected exceptional minimal sets of surface homeomorphisms*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), no. 3, 711–731. .
- [3] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Math. **583** (1977).
- [4] P. D. McSwiggen, *Diffeomorphisms of the torus with wandering domains*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), 1175–1186.



☒ 9: strong unstable foliation



☒ 10: graph transformation

- [5] A. Norton and D. Sullivan, *Wandering domains and invariant conformal structures for mappings of the 2-torus*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **21** (1996), 51–68.
- [6] G. T. Whyburn, *Topological characterization of the Sierpiński curve*, Fund. Math. **45** (1958), 320–324.