Title	ジュリア集合のコーディングの空間(力学系理論の最近の発展)
Author(s)	亀山, 敦
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1552: 97-106
Issue Date	2007-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/80913
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1552 巻 2007 年 97-106

ジュリア集合のコーディングの空間

岐阜大学工学部・亀山敦 (Atsushi Kameyama)

1 Introduction

本研究の動機は, リーマン球面上の有理写像の（あるいは位相的分岐被覆の）力学系の組合せ構造を知ることである. そのため, subhyperbolic な有理写像 f に関して, 記号力学系からジュリア集合への半共役写像（これをコーディングという）の集合 $\mathrm{Cod}(f)$ を考え, その集合の構造を調べる. この記事では, $\mathrm{Cod}(f)$ の構造についての一般論を述べ, 具体的な写像 $f(z)=-(z-1)^2/4z$ について計算してみる.

実 1 次元力学系においては, 記号力学系の手法は効果的に用いられる. たとえば, $f:I\to I$ が単位区間 $I=[0,1]$ 上の区分的単調写像であるとする. f の単調性が変化する点 turning point を $c_1<c_2<\cdots<c_n$ とすると, この n 個の点で I を分割して部分区間 $I_0,I_1,\ldots,I_n$ を得る. $x\in I$ に対して, itinerary と呼ばれる記号列 $i(x)=i_0i_1\cdots$ を次のように定める.

$$i_k=m \iff f^k(x)\in I_m$$

これが, 実 1 次力学系の標準的なコーディングである. ただし, $f^k(x)$ が I_m の端点を通るようなときを考えて, 定義を多少調整する必要があるが, ここでは詳細は述べない. turning point の itinerary の組 $k(f)=(i(c_1),i(c_2),\ldots,i(c_n))$ を考え, これを kneading invariant と呼ぶことにする.

この kneading invariant なる不変量は, たちのよいもので力学系 f の "組合せ構造" をよく表わしていると考えられる. 次のような性質に注目してみたい：ふたつの区分的単調写像 f_1,f_2 について turning point の軌道が有限という状況の下,

$$k(f_1)=k(f_2) \iff f_1 \text{ と } f_2 \text{ の turning point の軌道の順序構造が等しい}$$

である. ここで, f の turning point の軌道が有限とは, 各 c_m に対し $k_1>k_2\geq 0$ があって $f^{k_1}(c_m)=f^{k_2}(c_m)$ ということ.

このように, 実 1 次元力学系では, ふたつの力学系が組合せ的に同じかどうか判定するには, turning point の軌道を追っていき, その itinerary を比べてやればよい. これを複素に拡張し, たとえばリーマン球面上の有理関数で同

じことをやろう[1]としてもうまくいかない．うまくいかない理由のひとつは，itinerary を標準的に定める方法がわからないことである．実1次元では，単位区間を単調区間にブロック分けすることができたが，2次元の領域を有限個の点で分けることはできない．適当にブロック分けすれば何らかのコーディングは得られるのだが，標準的なブロック分けがないので，よい不変量にならない．

本研究のアイディアは，標準的なコーディングがないなら，可能なコーディングをすべて考えてしまおうというものである．geometric coding tree という方法により得られるすべてのコーディングの集合を $\mathrm{Cod}(f)$ とし，これを研究対象にする．この集合が何らかの構造を持ち，f の組合せ構造を反映しているということを期待しているのである．実際に $\mathrm{Cod}(f)$ がどんな集合か知ることはなかなか難しい．orbifold がユークリッドになる場合は計算できるが，双曲的になる場合は最も簡単な例でさえよくわかっていない．今回は，ユークリッドの場合に一例をお見せすることにする．

この記事には，証明はつけなかった．ほとんどの証明は [1], [2] にある．[2] では proper なコーディングだけを取り扱っている．また，[1] に書いた 不変部分群，$\mathcal{A}(f)$, prime coding の定義は本記事のものと少し違う．

数年前からいろんな研究集会で同じような講演をしているが，いつも定義のあたりで時間が来てしまい，具体例の計算まで話が進まないので，今回の講演ではタイリングの部分を省略して具体例を見せることを目標とした．それにも関わらず，結局具体例を述べる前に時間が来てしまったのは残念であった．[1] では本記事に載せた例を含めいくつかの計算例を挙げたが，間違いがある．この記事の最後に載せた計算例のほうが正しい．

2 subhyperbolic な有理写像

一変数有理写像 $f:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ に対し，その critical point の集合を $C=C_f$ と書く．**postcritical set** $P=P_f$ を critical point の軌道全体の閉包 $\overline{\{f^k(c)\,|\,k>0, c\in C\}}$ と定義する．さらに，安定な周期点全体を $\mathrm{AP}=\mathrm{AP}_f$ と書く．$\mathrm{AP}\subset P$ であることはよく知られている．

有理写像 f が **subhyperbolic** であるとは，すべての critical point c が（1）preperiodic (i.e. ある $n>0, m\geq 0$ があって $f^{n+m}(c)=f^m(c)$) である（2）安定な周期軌道に収束するのどちらかをみたすときをいう．

また，f が subhyperbolic であることと，f が次のような意味で expanding であることは同値である．ジュリア集合 $J=J_f$ の近傍 U 上に計量 $\|\cdot\|$ が存在し，$\lambda>1$ があって任意の $z\in U$ と $v\in T_zU$ に対し，$z, f(z)\notin P$ なら

[1]球面上の分岐被覆では，"組合せ構造" が等しいということは，サーストン同値という概念で表わすことができる．$f_1, f_2: S^2\to S^2$ がサーストン同値であるとは，同相写像 $h, h_0: S^2\to S^2$ が存在し，h, h_0 は P_{f_1} を P_{f_2} にうつし，P_{f_1} を止めて isotopic で，$h\circ f_1=f_2\circ h_0$ となることである．

$\|Tf(v)\| \geq \lambda\|v\|$ となる. ただし, 計量を $h(z)|dz|$ と書くと, $h(z)$ は $U-P$ では連続で正であり, $p \in P$ においては $h(z) = a|z-p|^{-(m-1)/m}$ という形の特異性を持つ.

3 geometric coding tree

Przytycki により geometric coding tree という方法によるコーディングの構成が開発されている. [3] などを見よ.

subhyperbolic な有理写像 f の次数を $d > 1$ とする. d シンボルの記号力学系 (σ, Σ) からジュリア集合への半共役を次のように作る.

$$Q_d := \bigsqcup_{i=1}^{d} [0,1]_i/(0_i \sim 0_j)$$

を, 単位区間 $[0,1]$ の d 個のコピーの disjoint union を 0_j でくっつけたものとする.

$$S' := \hat{\mathbb{C}} - P,\ S := \hat{\mathbb{C}} - \mathrm{AP}$$

という記号を使うことにする.

連続写像 $r : Q_d \to S'$ が **radial** であるとは, $f \circ r(1_i) = r(0)$ をみたすことをいう. このとき, $\bar{x} := r(0)$ を basepoint といい, $x_i := r(1_i)$ という記号を使う. radial r が **proper** であるとは, $f^{-1}(\bar{x}) = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, d\}$ となることである. $\bar{x}$ を basepoint とする radial 全体の集合を

$$\mathrm{Rad}(f, \bar{x})$$

と書こう. また, 次のような記号を使う:

$$L(f, \bar{x}) = \{l : [0,1] \to S' \mid l \text{ は連続}, l(0) = \bar{x}\}$$

$$\Lambda(f, \bar{x}) = \{l \in L(f, \bar{x}) \mid f \circ l(1) = \bar{x}\}$$

すると, 明らかに $\mathrm{Rad}(f, \bar{x})$ と $\Lambda(f, \bar{x})^d$ は同一視できる. そこで, $r = (l_i)_i$ などと書くこともある. ここで, $l_i = r|_{[0,1]_i}$.

$l \in L(f, \bar{x})$ と $x \in f^{-k}(\bar{x})$ に対し,

$$F_{k,x}(l) : [0,1] \to S'$$

を l の f^k による始点 x のリフトとする. すなわち, $f^k \circ F_{k,x}(l) = l, F_{k,x}(l)(0) = x$. しばしば k が明らかなときは省略して $F_x(l)$ と書く.

d シンボルからなる語の集合を W と書く:

$$W = \bigcup_{k=0}^{\infty} W_k,\ W_k = \{1, 2, \ldots, d\}^k = \{w_1 w_2 \ldots w_k \mid w_j \in \{1, 2, \ldots, d\}\}$$

さて, radial $r=(l_i)_i$ が与えられたとする. このとき $w\in W$ に対して帰納的に曲線 l_w と点 x_w を定義する. $1,2,\dots,d\in W_1$ に対してはすでに $l_i, x_i=l_i(1)$ は定まっている. l_w, x_w が定まったとき, $i\in W_1$ に対し $l_{iw}=l_i\cdot F_{x_w}(l_w), x_{iw}=l_{iw}(1)$ と定める.

f が expanding であることから, $\omega=\omega_1\omega_2\cdots\in\Sigma$ に対し,

$$x_\omega=\lim_{k\to\infty} x_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_k}$$

は収束し, ジュリア集合に属する. また, あらかじめ $l_i, i\in W_1$ を smooth にしておき, l_w のパラメータ付けを弧長の定数倍に変えることによって,

$$l_\omega=\lim_{k\to\infty} l_{\omega_1\omega_2\cdots\omega_k}:[0,1]\to S$$

も収束し, $l_\omega(1)=x_\omega$ である. 対応 $\omega\mapsto x_\omega$ は連続であり, $f(x_\omega)=x_{\sigma\omega}$ であることがわかる. この対応を $\pi_r:\Sigma\to J$ と書き, (geometric coding tree による) **coding map** とよぶ. こうして作られた coding map 全体の集合を

$$\mathrm{Cod}(f):=\{\pi_r\,|\,r \text{ は radial}\}$$

で表す.

異なる radial について coding map が等しいことがある. その必要十分条件は後で述べるが, ここではふたつの radial $r,r':Q_d\to S'$ が $\{0,1_1,1_2,\dots,1_d\}$ を止めて homotopic であるという条件をみたせば $\pi_r=\pi_{r'}$ であることを注意しておく. $L(f,\bar{x})$ 上の同値関係を

$$l\sim l' \Longleftrightarrow ll'^{-1} \text{ は } S' \text{ 内で自明なループ}$$

とし,

$$r=(l_i)\sim r'=(l'_i) \Longleftrightarrow \text{各 } i \text{ について } l_i\sim l'_i$$

と定めれば, 上の条件は $r\sim r'$ ということになる.

4 被覆空間

引き続き f は subhyperbolic な有理写像である.

$\rho:S\to\mathbb{N}$ が **ramification 関数**であるとは $\rho(x)=1, x\notin P$ であり, $\rho(f(x))$ は $\deg_x f\cdot\rho(x)$ の倍数であるときをいう. ramification 関数の中で最小のものは**標準 ramification 関数**とよび, ρ_f で表す. 組 (S,ρ) を **orbifold** という.

orbifold (S,ρ) の普遍被覆 $\phi:\tilde{S}\to S$ というのは, $\tilde{S}$ が連結かつ単連結なリーマン面であり, ϕ が holomorphic な分岐被覆で各点 $\tilde{x}\in S$ において局所次数 $\deg_{\tilde{x}}\phi$ が $\rho(\phi(\tilde{x}))$ と一致するものである.

普遍被覆 $\phi:\tilde{S}\to S$ の被覆変換とは, $\tilde{S}$ の自己同型 p で $\phi\circ p=\phi$ なるもののことである. 被覆変換で作られる被覆変換群を G^ρ と書く. これは (S,ρ) の基本群と呼ばれ, 次のように作られる群 G/N^ρ と同一視される. G は S' の基本群 $\pi_1(S',\bar{x})$ であり, N^ρ は $[B_j]^{\rho(b_j)}, b_j\in P-\mathrm{AP}$ で生成される正規部分群である. ここで, B_j は, $b_j\in P-\mathrm{AP}$ と他の $P-\mathrm{AP}$ の点を分離するループで, $[\cdot]$ は同値類を表す.

5 不変部分群

f は subhyperbolic な有理写像, ρ は ramification 関数とする. basepoint $\bar{x}$ とし, $l\in\Lambda(f,\bar{x})$ をとる. l の終点 x は $\bar{x}$ の逆像に属す. f から誘導された $f_*:\pi_1(S'-f^{-1}(P),x)\to G$, そして l^{-1} と包含写像 ι から誘導された $l_\#^{-1}\iota_*:\pi_1(S'-f^{-1}(P),x)\to G$ を用意しておく.

さて $G=\pi_1(S',\bar{x})$ の部分群 N が l に関して不変であるというのを,

$$N\subset f_*(l_\#^{-1}\iota_*)^{-1}(N)$$

であることと定義する. この条件は次と同値である: 閉曲線 γ が $[\gamma]\in N$ であれば, $F_x(\gamma)$ は閉曲線で $[lF_x(\gamma)l^{-1}]\in N$ である. また, N が radial $r=(l_i)$ に関して不変であるとは, 各 l_i に関して不変であることと定義する.

すると次が成り立つことが容易にわかる.

- N, N' が l に関して不変ならば, N, N' で生成される部分群も l に関して不変.
- N が l に関して不変で N' が l' に関して不変ならば, $N\cap N'$ は l と l' に関して不変.
- N^ρ は任意の l に関して不変.

l に関して不変な最大の部分群を N_l と書く. また radial $r=(l_i)$ について $N_r=\bigcap_{i=1}^{d}N_{l_i}$ と書く. これは r に関して不変な最大の部分群である.

G の $f^{-k}(\bar{x})$ 上のモノドロミー作用 η_k は

$$\eta_k([\gamma])(x)=x\cdot[\gamma]:=F_x(\gamma)(1)$$

と定義される.

このとき,

$$\begin{aligned}\hat{N} &:= \textstyle\bigcap_{k=1}^{\infty}\ker\eta_k\\ &= \{[\gamma]\mid \text{任意の } k\geq 1 \text{ と任意の } x\in f^{-k}(\bar{x}) \text{ について } F_x(\gamma) \text{ は閉曲線}\}\end{aligned}$$

とすれば, $\hat{N}$ は正規部分群で, 任意の l に関して不変な最大の部分群であり, radial r が proper のとき $\hat{N}=N_r$ である.

6 f^{-1} の持ち上げ

被覆写像 $\hat{\phi}:(\hat{S}',\hat{x})\to(S',\bar{x})$ で $\hat{\phi}_*\pi_1(\hat{S}',\hat{x})=\hat{N}$ なるものを考えよう．これは, 分岐被覆 $\hat{\phi}:(\hat{S},\hat{x})\to(S,\bar{x})$ に拡張できる．このとき

$$\hat{G}:=G/\hat{N}$$

は $\hat{\phi}$ のデッキ変換の群であり, f についての **被約基本群**とよぶことにする．

$l\in L(f,\bar{x})$ を 始点が $\hat{x}$ となるよう $\hat{S}$ に持ち上げたものを $\hat{l}$ と書こう．$\hat{N}$ は任意の $l\in\Lambda(f,\bar{x})$ に関して不変なので, $(f\phi)_*\pi_1(\hat{S}'-\hat{\phi}^{-1}f^{-1}(P),\hat{l}(1))=f_*(l_{\#}^{-1}\iota_*)^{-1}(\hat{N})\supset\hat{N}$ である．したがって, 次の図式を可換にする被覆写像 $g:\hat{S}\to\hat{S}$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\hat{S}'-\hat{\phi}^{-1}f^{-1}(P) \arrow[d, "\phi"'] & \hat{S}' \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\phi"] \\
S'-f^{-1}(P) \arrow[r, "f"'] & S'
\end{tikzcd}$$

ただし $g(\hat{x})=\hat{l}(1)$. この被覆写像 g は, 分岐被覆 $g:\hat{S}\to\hat{S}$ に拡張でき, (S の expanding な計量 $\|\cdot\|$ を持ち上げた計量で) 縮小写像である．

このことから, radial $r=(l_i)$ に対して, 縮小写像 $g_i:\hat{S}\to\hat{S}$ $(i=1,2,\ldots,d)$ が得られ, $f\hat{\phi}g_i=\hat{\phi},g_i(\hat{x})=\hat{l}_i(1)$ である． よって, iterated function system $(g_i)_i$ のアトラクター $\hat{K}_r\subset\hat{S}$ が存在する (i.e. $\hat{K}_r$ は $\hat{K}_r=\bigcup_{i=1}^d g_i(\hat{K}_r)$ をみたす空でないコンパクト集合). $\phi(\hat{K}_r)=\pi_r(\Sigma)$ であり, $\hat{\pi}_r:\Sigma\to\hat{K}_r$ を $\hat{\pi}_r(i_1i_2\cdots)=\lim_{k\to\infty}g_{i_1}g_{i_2}\cdots g_{i_k}(\hat{x})$ と定義すれば $\hat{\phi}\hat{\pi}_r=\pi_r$ である．

今述べたことは, $\hat{N}$ でなくても, r に関して不変な部分群 N について成り立ち, 分岐被覆 $\phi_N:(S^N,x^N)\to(S,\bar{x})$ により f の逆写像を持ち上げることができる．

7 Coding の空間

部分群 $N\subset G$ について, $\Lambda(f,\bar{x})$ 上の同値関係 $\sim_N$ を

$$l\sim_N l'\iff[ll'^{-1}]\in N$$

と定め, その同値類を $[l]_N$ などと表す．その同値関係による商空間は $\Lambda_N(f,\bar{x})$ と表す．明らかに, $\Lambda_N(f,\bar{x})$ は $\phi_N^{-1}f^{-1}(\bar{x})$ と一対一に対応している．

radial の空間 $\mathrm{Rad}(f,\bar{x})$ を同様の同値関係で割ったものを $\mathrm{Rad}_N(f,\bar{x})$ と書く．これは $\Lambda_N(f,\bar{x})^d$ と同一視される．

ふたつの radial $r\in\mathrm{Rad}(f,\bar{x})$ と $r'\in\mathrm{Rad}(f,\bar{x}')$ が **freely homotopic** とは, $r,r':Q_d\to S'$ が radial であることを保ったまま homotopic なことと

する．この条件は，$\bar{x}'$ から $\bar{x}$ への path γ があって $\gamma\cdot[r]=[r']$ となることと同値である．ただし，γ の作用は $\gamma\cdot l=\gamma lF_x(\gamma^{-1})$ のように定める．

そこで，ふたつの radial $r\in \mathrm{Rad}(f,\bar{x})$ と $r'\in \mathrm{Rad}(f,\bar{x}')$ が **freely homotopic modulo** N というのを，$\bar{x}'$ から $\bar{x}$ への path γ があって $\gamma\cdot[r]_N=[r']_{N'}$ であることと定める．ただし，$N'=l_{\#}^{-1}N$.

定理

$$\pi_r=\pi_{r'} \iff r,r' \text{ は freely homotopic modulo } N_r$$

系 $\mathrm{Cod}(f)$ は $\{[r]_{N_r}: r\in \mathrm{Rad}(f,\bar{x})\}/\hat{G}$ と一対一対応する．ただし，$\hat{G}$ の作用は，すぐ上で定めた γ の作用と同じ方式である．

注:この $\hat{G}$ の $\Lambda_{\hat{N}}(f,\bar{x})$ (または $\Lambda_{\hat{N}}(f,\bar{x})^d$) への作用を $\Lambda_{\hat{N}}(f,\bar{x})=\hat{\phi}^{-1}f^{-1}(\bar{x})$ という同一視のもと表わすと，

$$h\cdot w=hgh^{-1}(\hat{x}),\ w\in\hat{\phi}^{-1}f^{-1}(\bar{x})$$

となる．ここで，$h\in\hat{G}$ は $\hat{\phi}$ のデッキ変換とみなしており，$g:\hat{S}\to\hat{S}$ は前節で定義した $f\hat{\phi}g=\hat{\phi}, g(\hat{x})=w$ となる縮小写像である．

8 Coding の重複度

coding map π_r に対し，非負整数 $\mathrm{mul}(\pi_r)=\hat{\mu}(\hat{K}_r)$ が定まる．ただし，$\hat{\mu}$ は f の Lyubich 測度 μ を $\hat{\phi}$ により持ち上げたものである．この整数を π_r の重複度という．μ に関しほとんどすべての $x\in J$ について $\#\pi_r^{-1}(x)=\mathrm{mul}(\pi_r)$ であり，すべての $x\in J-P$ について $\#\pi_r^{-1}(x)\geq \mathrm{mul}(\pi_r)$ である．$\mathrm{mul}(\pi_r)=1$ であれば r は proper だが，逆は成り立たない．

f と可換な有理関数の集合

$$\mathcal{A}(f)=\{R:S\to S\,|\,\text{有理写像}, R\circ f=f\circ R\}$$

はモノイドをなす．すると，$\pi\mapsto R\circ\pi$ という形で $\mathcal{A}(f)$ は $\mathrm{Cod}(f)$ に作用し，$\mathrm{mul}(R\circ\pi)=\deg(R)\cdot\mathrm{mul}(\pi)$ がなりたつ．

注意：$R\in\mathcal{A}(f)$ であり $\deg(R)\geq 2$ であれば，$J_f=J_R$ である．ゆえに，f に "対称性" がなければ $\mathcal{A}_1(f):=\mathcal{A}(f)\cap\{R\,|\deg(R)\geq 1\}=\{\mathrm{id},f^k:k=1,2,\dots\}$ となる．たとえば，$\#\{f^k(c):k=1,2,\dots\}=\infty$ となる $c\in C_f$ をひとつだけ持つとき，$\mathcal{A}_1(f)=\{\mathrm{id},f^k:k=1,2,\dots\}$.

coding map π が **prime** であるとは，$\pi=R\circ\pi'$ となる $\pi'\in\mathrm{Cod}(f), R\in\mathcal{A}(f),\deg(R)\neq 1$ がないときにいう．prime な coding map の集合を $\mathrm{Cod}'(f)$ で表す．重複度の集まりを

$$M=\{\mathrm{mul}(\pi):\pi\in\mathrm{Cod}(f)\},\ M'=\{\mathrm{mul}(\pi):\pi\in\mathrm{Cod}'(f)\}$$

と表す.

次の事実は簡単に示せる.

- $M' - \{0\} \neq \emptyset$
- $M = \{\deg(R) \cdot n \mid R \in \mathcal{A}(f), n \in M'\} \supset \{d^k \cdot n \mid n \in M', k = 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathrm{Cod}(f)$ について調べるのが難しいので, せめて M や M' についてわからないものかと思うが, いまだ不明の点が多い. 一般に $1 \in M$ だろうと予想するが, まだ証明できていない.

9 計算例

有理関数

$$f(z) = -\frac{(z-1)^2}{4z}$$

を考える. $C = \{-1, 1\}$, $P = \{1, 0, \infty\}$, $J = \hat{\mathbb{C}} = S$ である. critical point の挙動は, $-1 \mapsto 1 \mapsto 0 \mapsto \infty \mapsto \infty \mapsto \cdots$ となる.

ramification 関数 ρ を $\rho(0) = 4, \rho(\infty) = 4, \rho(1) = 2$ と定める. ここで $\phi : \mathbb{C} \to \hat{\mathbb{C}}$ を $2\Gamma = \{2n + 2mi \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ の周期を持ち, $\phi(iz) = \phi(z)$, $\phi(0) = \infty, \phi(1) = 1, \phi(1+i) = 0$ をみたす位数 4 の楕円関数とする. すると ϕ は (S, ρ) の普遍被覆となる.

basepoint を $\bar{x} = -1 \in S$ と定め, $\tilde{x} = (1+i)/2$ とする.

$$\begin{aligned}
\phi^{-1} f^{-1}(\bar{x}) &= \{z + 1/2, z + i/2 \mid z \in \Gamma\} \\
&= \{s + n + mi \mid s \in \{\pm 1/2, \pm i/2\}, n + mi \in (1+i)\Gamma\}
\end{aligned}$$

となる. この各点 $w \in \phi^{-1} f^{-1}(\bar{x})$ にたいして $f\phi g = \phi, g(\tilde{x}) = w$ なる $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ が決まる. 上の s が $1/2, i/2, -1/2, -i/2$ のいずれになるかに応じて g は

$$g(z) = \begin{cases} (1-i)z/2 + n + mi \\ (1+i)z/2 + n + mi \\ (-1+i)z/2 + n + mi \\ (-1-i)z/2 + n + mi \end{cases}$$

と書ける.

ϕ の被覆変換群 G^ρ は 2Γ の向きを変えない自己同型群 $\mathrm{Iso}^+(2\Gamma)$ と同一視され, $\{z \mapsto az + 2b \mid a \in \{\pm 1, \pm i\}, b \in \Gamma\}$ と書ける. また, $\hat{N} = N^\rho$ であり, ゆえに $\hat{G} = G^\rho$ である. 大部分の radial r について $N_r = N^\rho$ だが, π_r の像が ∞ 一点からなるときは, 群が大きくなり, N_r/N^ρ は $\mathrm{Iso}^+(2\Gamma)$ の部分群として $\langle z \mapsto iz + 2b \rangle$ と書ける $(\exists b \in \Gamma)$.

したがって

$$\mathrm{Cod}(f) \approx \{\infty\} \cup \{[r]_{N^\rho} \in \mathrm{Rad}_{N^\rho}(f,\bar{x}) \mid \pi_r(\Sigma) \neq \infty\}/\hat{G}$$

となるが，これをもっと具体的に見てみる．$\mathrm{Rad}_{N^\rho}(f,\bar{x})$ は $\phi^{-1}f^{-1}(\bar{x}) \times \phi^{-1}f^{-1}(\bar{x})$ と同一視でき，$\phi^{-1}f^{-1}(\bar{x})$ の元は $\alpha/2 + (1+i)\beta, \alpha \in A = \{\pm 1, \pm i\}, \beta \in \Gamma$ と書けていたので $\mathrm{Rad}_{N^\rho}(f,\bar{x}) = (A \times \Gamma)^2$ とみなす．§7 で定めた $\hat{G} = \mathrm{Iso}^+(2\Gamma)$ の $\Lambda_{\hat{N}}(f,\bar{x}) = \phi^{-1}f^{-1}(\bar{x}) = A \times \Gamma$ への作用は，

$$(z \mapsto az + 2b) \cdot (\alpha, \beta) = (\alpha, a\beta + b(1 - i + i\alpha))$$

となる．なぜなら，$\alpha/2 + (1+i)\beta \in \phi^{-1}f^{-1}(\bar{x})$ にたいして先ほどの g は

$$g(z) = (1-i)\alpha z/2 + (1+i)\beta$$

と書け，$h(z) = az + 2b, a \in \{\pm 1, \pm i\}, b \in \Gamma$ とおくと

$$hgh^{-1}(\tilde{x}) = \alpha/2 + (1+i)(a\beta + b(1 - i + i\alpha))$$

となるからである．したがって，$\hat{G} = \mathrm{Iso}^+(2\Gamma)$ の $(A \times \Gamma)^2$ への作用は

$$\begin{aligned}(z \mapsto az + 2b) &\cdot ((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)) \\ &= \big((\alpha_1, a\beta_1 + b(1 - i + i\alpha_1)), (\alpha_2, a\beta_2 + b(1 - i + i\alpha_2))\big)\end{aligned}$$

となる．この作用の軌道空間を代表元を使って表わすことによって，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cod}(f) \approx \{[(1,0),(1,0)]\} &\cup \{[(\alpha_1, 0), (\alpha_2, \beta)] \mid \alpha_i \in A, \beta \in \Gamma_+\} \\ &\cup \{[(\alpha_1, 1), (\alpha_2, \beta)] \mid \alpha_1 \in \{-1, -i\}, \alpha_2 \in A, \beta \in \Gamma\}\end{aligned}$$

と書ける．ただし，$\Gamma_+ = \{n + mi \in \Gamma \mid n > 0, m \geq 0\}$ である．重複度の計算は [2] で行っており，

$$\mathrm{mul}(\pi_r) = \begin{cases} 4|\beta_1 - \beta_2|^2 & \alpha_1 = \alpha_2 \text{ のとき} \\ |\beta_1 - i\beta_2|^2 & \alpha_1 = 1, \alpha_2 = i \text{ のとき} \\ |(1-2i)\beta_1 - \beta_2|^2 & \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1 \text{ のとき} \\ |(1+2i)\beta_1 - \beta_2|^2 & \alpha_1 = i, \alpha_2 = -i \text{ のとき} \\ 2|(2+i)\beta_1 - \beta_2|^2 & \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -i \text{ のとき} \\ 2|(2-i)\beta_1 - \beta_2|^2 & \alpha_1 = i, \alpha_2 = -1 \text{ のとき} \\ \frac{1}{5}|(4+3i)\beta_1 - 5\beta_2|^2 & \alpha_1 = -1, \alpha_2 = -i \text{ のとき} \end{cases}$$

などとなる．これより，重複度は

$$M = \{n^2 + m^2 \mid n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$$

である．

f と可換な次数1以上の有理写像は $\mathbb{C}$ に持ち上げると $z \mapsto bz$ という形になる. ただし, $b \in \Gamma^\times = \Gamma - \{0\}$. その作用は,

$$b \cdot [(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] = [(\alpha_1, b\beta_1), (\alpha_2, b\beta_2)]$$

である. 定数関数で f と可換なものは, すなわち f の不動点である. 不動点は3個あり, そのうちひとつは ∞ で, これは $\mathbb{C}$ に持ち上げたとき $z \mapsto 0$ に対応している. あとふたつの不動点を p_1, p_2 とすると, $\mathcal{A}(f) \approx \Gamma \cup \{p_1, p_2\}$ とみなせる. 不動点の作用は,

$$\begin{aligned}
0 \cdot [(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] &= [(1,0), (1,0)] \\
p_1 \cdot [(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] &= [(-1,1), (-1,1)] \\
p_2 \cdot [(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)] &= [(-i,1), (-i,1)]
\end{aligned}$$

と書ける. これより,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cod}'(f) \approx\ & \{[(\alpha_1, 0), (\alpha_2, 1)] \mid \alpha_1 \in \{1, i\}, \alpha_2 \in A\} \\
& \cup \{[(\alpha_1, 1), (\alpha_2, 0)] \mid \alpha_1 \in \{-1, -i\}, \alpha_2 \in \{1, i\}\} \\
& \cup \{[(-1,1), (-i, 1+i)], [(-i, 1+i), (-1,1)]\} \\
& \cup \{[(-1,1), (-1, (1-2i)^n \alpha + 1)] \mid \alpha \in A, n = 0,1,2,\dots\} \\
& \cup \{[(-i,1), (-i, (2-i)^n \alpha + 1)] \mid \alpha \in A, n = 0,1,2,\dots\}
\end{aligned}$$

である. これを得るためには, たとえば $b = \beta_2 - (1+i)\beta_1, M = (-2+i)\beta_1 + (1-2i)\beta_2$ とおくと

$$(z \mapsto z + 2b) \cdot ((-1, \beta_1), (-i, \beta_2)) = ((-1, M), (-i, (1+i)M))$$

となることなどを見ればよい. こうして prime な coding map の重複度は

$$M' = \{1, 2, 4 \cdot 5^n \mid n = 0,1,2,\dots\}$$

とわかる.

参考文献

[1] A. Kameyama, *Coding and tiling of Julia sets for subhyperbolic rational maps*, Preprint math.DS/0306354, 2003.

[2] ———, *Coding and tiling of Julia sets for subhyperbolic rational maps*, Adv. Math. **200** (2006), 217 – 244.

[3] Feliks Przytycki, *Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map*, Invent. Math. **80** (1985), 161–179.