数理解析研究所講究録
第1552巻 2007年 59-66

実軸上の有理変換のあるクラスに対する不変測度とその応用

三重大学・教育学部 石谷 寛 (Hiroshi Ishitani)
Department of Mathematics,
Mie University
東京大学・数理科学研究科 石谷謙介 (Kensuke Ishitani)
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

さまざまな変換に対しその不変測度の存在や性質については数多くの研究がなされてきた ([3],[4],[8],[10])。ところが、その不変測度の具体的な形については、これまで統一的な研究はなされてこなかった。一方で、不変測度の具体的形を知ることで、考えている変換と測度論的に同型な、有界区間上の変換を具体的に与えることができる。このことにより、有界区間上の変換に対する既存の結果を用いて、考えている変換の測度論的性質を導くことが可能となる。ここでは、実軸 $\mathbb{R}$ の上のあるクラスの有理変換 $R(x)$ に対し、不変測度が不動点または2周期点にを用いて表現できる事を示し、変換のエルゴード論的性質や極限定理について議論する。

1 Results

複素平面 $\mathbb{C}$ 上で定義された、あるクラスの実有理関数 $R(z)$ が、実数でない不動点 $R(z_0) = z_0$ または実数でない2周期点 $R(z_0) = \overline{z_0}$ を持つとき、$R(z)$ を実軸 $\mathbb{R}$ に制限したときの有理変換 $R(x)$ は不変確率測度を持ち、その密度関数は具体的に $(1/\pi)\mathrm{Im}\,(1/(x-z_0))$ として与えられることを示す ([7])。また、この密度関数の具体形を用いて変換 $R(x)$ 自身のエルゴード論的性質が既知の結果より、簡単に求められる事を [7] に沿って示す。詳しくは、以下のことが成立する。

Theorem 1. $R(x) = h(x)/g(x)$ を実軸 $\mathbb{R}$ から実軸 $\mathbb{R}$ への有理変換で以下の条件を満たすものとする。

E-mails: ishitani@edu.mie-u.ac.jp and kensuke@ms.u-tokyo.ac.jp

(1) $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ に対し $g(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - a_k)$ である。

(2) $h(x)$ は実多項式で $\deg(h(x)) \le n+1$ かつ $h(a_k) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$ とする。

(3) R の区間 (a_j, a_{j+1}) への制限 R_j はすべての $j = 0, 1, \ldots, n$ に対し単調とする。ただし $a_0 = -\infty$ かつ $a_{n+1} = \infty$ とする。

(4) R の実数でない不動点 $R(z_0) = z_0$ または 2 周期点 $R(z_0) = \overline{z_0}$ が存在する。

このとき $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x - z_0} f(R(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x - z_0} f(x)dx$$

がすべての *essentially bounded real-valued function* $f(x)$ に対し成立する。すなわち、確率測度 $d\mu = (1/\pi)\mathrm{Im}\,(1/(x - z_0))\,dx$ は実軸上の変換 R の不変測度である。

Theorem 1 は実質的に次の Theorem 2 と Theorem 3 を意味する。実際、Theorem 1 の仮定（1）と（2）より、$R(x)$ は

$$R(x) = \alpha x + \beta - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x - a_k}. \tag{1.1}$$

と表される。また、$\lim_{x \to a_k} |R(x)| = \infty$ と $\lim_{x \uparrow a_k} R(x) = -\lim_{x \downarrow a_k} R(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ に注意すれば、Theorem 1 の仮定（3）より直ちに、区間 (a_j, a_{j+1}) への制限 $R_j := R|_{(a_j, a_{j+1})}$ は全ての $j = 0, 1, \ldots, n$ に対し狭義単調増加であるか、全ての $j = 0, 1, \ldots, n$ に対し狭義単調減少であるかのどちらかである。従って、

$$\alpha \ge 0, \; b_k > 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

または

$$\alpha \le 0, \; b_k < 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

のいずれかが成立する。

$\mathbb{C}_+ = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0 \,\}$ と $\mathbb{C}_- = \{\, z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) < 0 \,\}$ と書くと、(1.2) の場合は $R(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ かつ $R(\mathbb{C}_-) \subset \mathbb{C}_-$ となる。よってこの場合では $R(z_0) = \overline{z_0}$ ならば $z_0 \in \mathbb{R}$ となる。同様に、(1.3) の場合には、$R(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_-$ かつ $R(\mathbb{C}_-) \subset \mathbb{C}_+$ となり、$R(z_0) = z_0$ なら $z_0 \in \mathbb{R}$ となる。以上の議論より、Theorem 1 は 次の Theorem 2 と Theorem 3 に帰着される。

Theorem 2. $\alpha \ge 0, \beta \in \mathbb{R}, b_k > 0 \; (k = 1, \ldots, n)$ に対し

$$R(x) = \alpha x + \beta - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x - a_k}$$

であり、$R(z_0) = z_0$ を満たす $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ が存在するとする。

このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x-z_0} f(R(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x-z_0} f(x)dx$$

がすべての *essentially bounded real-valued function* $f(x)$ に対し成立する。

Theorem 3. $\alpha \leq 0, \beta \in \mathbb{R}, b_k < 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ に対し

$$R(x) = \alpha x + \beta - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{x - a_k}$$

であり、$R(z_0) = \overline{z_0}$ を満たす $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ が存在するとする。

このとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x-z_0} f(R(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x-z_0} f(x)dx$$

がすべての *essentially bounded real-valued function* $f(x)$ に対し成立する

これらの定理は因数定理を用いて初等的に証明できる。ここではTheorem 2 の $\alpha > 0$, $b_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ の場合についてのみ証明する。他の場合は少し変形すれば同様のアイデアで証明できる ([7])。

$\alpha > 0, b_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$ の場合、明らかにすべての $j = 0, 1, \ldots, n$ に対し R_j は狭義単調増加であり、$R_j((a_j, a_{j+1})) = (-\infty, \infty)$ となる。従って、R_j の逆写像 R_j^{-1} が存在して、$R(R_j^{-1}(y)) = y$ が $j = 0, 1, \ldots, n$ と $y \in \mathbb{R}$ に対し成立する。関係式 $R(R_j^{-1}(y)) = y$ は

$$yg(R_j^{-1}(y)) - h(R_j^{-1}(y)) = 0 \quad (j = 0, 1, \ldots, n, \quad y \in \mathbb{R}) \tag{1.4}$$

と書き直される。一方では、この $\alpha \neq 0$ の場合には $yg(x) - h(x)$ は、$(n+1)$ 次の x の多項式であるから、因数定理より

$$yg(x) - h(x) = -\alpha \prod_{j=0}^{n} (x - R_j^{-1}(y)) \tag{1.5}$$

がすべての $y \in \mathbb{R}$ に対し成立する。 この式 (1.5) の両辺を y で微分すれば

$$g(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} (R_i^{-1})'(y) \prod_{j \neq i} (x - R_j^{-1}(y))$$

が得られる。これを (1.5) で割って

$$\frac{g(x)}{yg(x) - h(x)} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{(R_i^{-1})'(y)}{x - R_i^{-1}(y)}$$

を得る。ここで $x = z_0$ とすると

$$\frac{g(z_0)}{yg(z_0) - h(z_0)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(R_i^{-1})'(y)}{R_i^{-1}(y) - z_0} \tag{1.6}$$

が導ける。$h(z_0) = z_0 g(z_0)$ を仮定しているので、(1.6) 式の左辺は$1/(y - z_0)$ となる。従って、等式

$$\mathrm{Im}\frac{1}{y - z_0} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Im}\frac{(R_i^{-1})'(y)}{R_i^{-1}(y) - z_0} \tag{1.7}$$

を得る。ここで $\mathrm{Im}(1/(x - z_0))$ は、$z_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{C}$ より、$\mathbb{R}$ の上で有界かつ積分可能である。$R_i(a_i + 0) = -\infty$ と $R_i(a_{i+1} - 0) = \infty$ に注意すれば、等式 (1.7) より

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{x - z_0} f(R(x))dx &= \sum_{i=0}^{n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \mathrm{Im}\frac{1}{x - z_0} f(R(x))dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathrm{Im}\frac{(R_i^{-1})'(y)}{R_i^{-1}(y) - z_0} f(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{y - z_0} f(y)dy
\end{aligned}$$

となり、この場合の証明ができる。

2 応用

不変測度の密度関数が簡明な形で与えられることから、定理の仮定を満たす実軸上の変換(R, μ) の mixing properties や 極限定理が既知の結果から導けることを概説する。ここで μ は、密度関数 $(1/\pi)\mathrm{Im}\,(1/(x - z_0))$ を持つ確率測度とする。

まず、$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対し

$$\mathrm{Im}\frac{1}{x - z_0} = \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + {y_0}^2} = \frac{d}{dx}\arctan\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right)$$

が成立することに注意しよう。従って、実軸 $\mathbb{R}$ から区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ への写像を

$$\varphi(x) := \arctan\left(\frac{x - x_0}{y_0}\right)$$

と定めれば、$(-\pi/2, \pi/2)$ の上に導入される変換

$$T(t) := \varphi(R(\varphi^{-1}(t)))$$

はルベーグ測度 λ を保ち (T, λ) は (R, μ) と測度論的に同型である。従って、実軸$\mathbb{R}$ の上の変換 R の ergodic properties は有界区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ 上の変換 T の ergodic properties より導かれる。

T は区分的に単調であるが、有界区間上の区分的単調かつ区分的に expansive な変換については多くの結果が得られている ([1],[2],[4],[5],[6])。簡単な計算により、$t = \varphi(x)$ として、

$$T'(t) = \frac{|x - z_0|^2}{|R(x) - z_0|^2} R'(x)$$

が $x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ で成立することが判る。これを用いて、以下の事が既知の事実との組み合わせにより得られる。ここで $N(0, \sigma^2)(y)$ $(\sigma^2 > 0)$ は平均 0、分散 σ^2 の正規分布の分布関数とし、$N(0,0)(y)$ は Dirac measure の分布関数とする。

Theorem 4. *(1)* 変換 $R(x)$ が定理 1 の仮定を満たし、不等式

$$\inf_{x \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}} \left| \frac{|x - z_0|^2}{|R(x) - z_0|^2} R'(x) \right| > 1 \tag{2.1}$$

が満たされるとする。

このとき、μ-可積分関数 f に対し極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(R^k x) =: f^*(x) \tag{2.2}$$

が μ-$a.e.$ に存在し、その極限 $f^*(x)$ の値域は M 個 $(M \in \mathbb{N})$ の点からなる。

(2) 更に、$f(x)$ が実軸 $\mathbb{R}$ 上の有界変動関数で、ν が μ に関して絶対連続な $\mathbb{R}$ 上の確率測度とする。このとき、$c_i \geq 0$ $\left(\sum_{i=0}^{M} c_i = 1\right)$ と $\sigma_i{}^2 \geq 0\,(i = 1, 2, \ldots, M)$ が存在し、

$$\lim_{n \to \infty} \nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (f(R^k x) - f^*(x)) \leq y \right\} = \sum_{i=1}^{M} c_i N(0, \sigma_i{}^2)(y) \tag{2.3}$$

が右辺の連続点で成立する。更に、$\sigma_i{}^2 > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ であり $(1 + x^2)(d\nu/dx)$ が有界変動関数であることを仮定すれば、ある $C > 0$ が存在し

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (f(R^k x) - f^*(x)) \leq y \right\} - \sum_{i=1}^{M} c_i N(0, \sigma_i{}^2)(y) \right| \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \tag{2.4}$$

が成立する。

(3) $R(x)$ が上の条件を満たし、$\deg(h(x)) = n + 1$ ならば (R, μ) は *exact*、よって $M = 1$ となる。従って、$f(x)$ が有界変動関数であり、ν が μ に関して絶対連続な $\mathbb{R}$ 上の確率測度であるなら、極限

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \int \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (f(R^k x) - \mu(f)) \right\}^2 d\mu =: \sigma^2 \tag{2.5}$$

が存在し、

$$\lim_{n \to \infty} \nu \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (f(R^k x) - \mu(f)) \leq y \right\} = N(0, \sigma^2)(y) \tag{2.6}$$

が $N(0,\sigma^2)(y)$ の連続点で成立する。更に $\sigma^2>0$ と $(1+x^2)(d\nu/dx)$ が有界変動であることを仮定すれば、ある $C>0$ が存在し

$$\sup_{y\in\mathbb{R}}\left|\nu\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}(f(R^kx)-\mu(f))\le y\right\}-N(0,\sigma^2)(y)\right|\le\frac{C}{\sqrt{n}} \tag{2.7}$$

がすべての $n\in\mathbb{N}$ に対し成立する。

3 Examples

定理2や定理4の仮定を満たす変換の例について述べる。$R(z_0)=z_0$ を満たす $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ が存在するためには、$R(x)-x$ が各区間 (a_i,a_{i+1}) $(i=1,2,\cdots,n-1)$ で狭義単調増大で、しかも $R(x)-x=0$ の実数解が $n-1$ 個であることが十分条件となる。これに注意すれば、次の命題が易しい計算で示せる。

Proposition 3.1. $0\le\alpha<1$, $b_k>0\,(k=1,\ldots,n)$, $a_1<a_2<\cdots<a_n$ に対し

$$R(x)=\alpha x+\beta-\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{x-a_k} \tag{3.1}$$

とする。さらに $a_1\le(\beta/(1-\alpha))$, $a_n\ge(\beta/(1-\alpha))$ かつ

$$a_{i+1}-a_i<\sqrt{\frac{\{b_i^{1/3}+b_{i+1}^{1/3}\}^3}{1-\alpha}} \tag{3.2}$$

が $i=1,2,\ldots,n-1$ にたいし成立するとする。

このとき、$R(z_0)=z_0$ を満たす $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ が存在する。

Remark 3.1. 上の条件 *(3.2)* は、次の意味で *best possible* である。変換 $R(x)=\alpha x-(x-a)^{-1}-(x+a)^{-1}$ を考える。ここで $0\le\alpha<1$ かつ $a>0$ とする。このとき、初等的な計算により、$R(x)$ が $R(z_0)=z_0$ を満たす $z_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ を持つための必要十分条件は *(3.2)* が満たされることであることが判る。

Example 1. 変換 $R(x)=\alpha x-bx^{-1}$ $(0\le\alpha<1,\ b>0)$ を考える。$\psi(x)=\sqrt{b}x$ とおくと、$\psi^{-1}(R(\psi(x)))=\alpha x-x^{-1}$ となり、$b=1$ と仮定して一般性を失わない。この変換 $R(x)=\alpha x-x^{-1}$ は *Proposition 3.1* の仮定を満たすが、不動点 $z_0\notin\mathbb{R}$ を直接計算すると、$z_0=\mathrm{i}y_0=\mathrm{i}\sqrt{1/(1-\alpha)}$ となる。*Theorem 2* より $d\mu=\pi^{-1}\mathrm{Im}\,(1/(x-\mathrm{i}y_0))\,dx$ は変換 R の不変確率測度となる。

一方で、

$$\frac{|x-z_0|^2}{|R(x)-z_0|^2}R'(x)=\frac{\alpha x^2+1}{\alpha^2x^2+1-\alpha}\ge\min\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{1-\alpha}\right)>1 \tag{3.3}$$

が成り立つので、$R(x) = \alpha x - x^{-1}$ $(0 < \alpha < 1)$ は *Theorem 4* の仮定を満たす。更に、変換 R は、各区間 (a_i, a_{i+1}) 上で *onto* であるから *exact* となり、$M = 1$ となる。

$\alpha = 0$ の場合には $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ が不動点となる。ところが区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ に移された変換 T は

$$T(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & (-\pi/2 < x < 0) \\ t - \pi/2, & (0 < x < \pi/2) \end{cases}$$

となり、(T, λ) も (R, μ) も *ergodic* ではないことが判る。

Example 2. $\mathbb{R}$ 上の変換

$$R(x) = \alpha x - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \qquad (0 \leq \alpha < 1)$$

を考える。このとき、$y_0 = \sqrt{(1+\alpha)/(1-\alpha)}$ として $R(\mathrm{i}y_0) = \mathrm{i}y_0$ が成立する。

$0 < \alpha < 1$ のときには、*Example 1* と同じように

$$\begin{aligned} \frac{|x - z_0|^2}{|R(x) - z_0|^2} R'(x) &= \frac{\alpha(x^2-1)^2 + 2x^2 + 2}{\alpha^2(x^2-1)^2 + (1-\alpha)^2 x^2 + (1-\alpha)(1+\alpha)} \\ &\geq \min\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{1-\alpha}\right) > 1 \end{aligned}$$

が $x \neq \pm 1$ に対し成立し、*Theorem 4* の仮定 *(2.1)* が満たされる。またこの場合には、*Example 1* の $0 < \alpha < 1$ の場合と同じように変換は *exact* となり、$M = 1$ である。

$\alpha = 0$ の場合には

$$\frac{\alpha(x^2-1)^2 + 2x^2 + 2}{\alpha^2(x^2-1)^2 + (1-\alpha)^2 x^2 + (1-\alpha)(1+\alpha)} = 2 \tag{3.4}$$

であり、この場合も仮定（*2.1*）が満たされる。更に、

$$T(t) = \begin{cases} 2t + \pi & (-\pi/2 < t < -\pi/4), \\ 2t & (-\pi/4 < t < \pi/4), \\ 2t - \pi & (\pi/4 < t < \pi/2) \end{cases}$$

が示される。この変換 (T, λ) はすべての区間を有限回の *iteration* で全区間に写すので *exact* である。従って、(R, μ) も *exact* であり、$M = 1$ となる。

定理 3 の仮定を満たす変換については、次の事実に注意すれば、定理 2 の仮定を満たす変換と対応していることが判る。

Remark 3.2. $R(x_0 + \mathrm{i}y_0) = x_0 + \mathrm{i}y_0$ ならば、$\tilde{R}(z) = -R(z) + 2x_0$ とすれば、$\tilde{R}(x_0 + \mathrm{i}y_0) = x_0 - \mathrm{i}y_0$ が成立する。

References

[1] R. L. ADLER AND L. FLATTO. Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **25** (1991), 229–334.

[2] R. BOWEN. Bernoulli maps of the interval. *Israel J. Math.* **28** (1977), 161–168.

[3] A. BOYARSKY AND P. GÓRA. *Laws of chaos: invariant measures and dynamical systems in one dimension*, Birkhäuser: Boston, 1997.

[4] F. HOFBAUER AND G. KELLER. Ergodic properties of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Math. Zeitschrift.* **180** (1982), 119–140.

[5] H. ISHITANI. A central limit theorem of mixed type for a class of 1-dimensional transformations, *Hiroshima Math. J.* **16** (1986), 161–188.

[6] H. ISHITANI, Central limit theorems for the random iterations of 1-dimensional transformations, Dynamics of complex systems. *Kokyuroku, RIMS, Kyoto Univ.* **1404** (2004), 21–31.

[7] H. ISHITANI AND K. ISHITANI. Invariant measures for a class of rational transformations and ergodic properties, *to appear in Tokyo J. Math.* .

[8] A. LASOTA AND J. A. YORKE. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 481–488.

[9] A. LASOTA AND J. A. YORKE. Exact dynamical systems and the Frobenius-Perron operator, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273** (1982), 375–384.

[10] T. Y. LI AND J. A. YORKE. Ergodic transformations from an interval into itself, *Trans. Amer. Math. Soc.* **235** (1978), 183–192.

[11] A. RÉNYI. Representation for real numbers and their ergodic properties, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **8** (1957), 477–493.

[12] J. ROUSSEAU-EGELE. Une théorème de la limite locale pour une classe de transformations dilatantes et monotones par morceaux, *Ann. Probab.* **11** (1983), 772–788.