数理解析研究所講究録
第 1553 巻 2007 年 59-65

放物型方程式の非負値解と楕円型作用素の摂動

村田實
東京工業大学大学院理工学研究科

1 序

本講演では楕円型作用素の摂動論、放物型方程式の非負値解の構造およびそれらの関係を解説する。以下、M を n 次元リーマン多様体、Δ を M 上のラプラース・ベルトラミ作用素、D をノンコンパクトな M 内の領域、

$$L=-\Delta+V \quad \text{on } D$$

とする。ここで V は $L_{\mathrm{loc}}^{p}(D), \quad p>\max(\frac{n}{2},1),$ に属する実数値関数である。さらに、(L,D) は subcritical とする。即ち、D 上で L の極小正値グリーン関数 G が存在すると仮定する。次の事実を思い出しておこう：

$$\text{subcritical} \quad \Rightarrow \quad E_L(D)\equiv\{h;\ Lh=0,\ h>0 \text{ on } D\}\neq\emptyset$$

W は D 上の正値関数で、$W, W^{-1}\in L_{\mathrm{loc}}^{\infty}(D)$ を満たすものとする。

本講演では、まず、W による L の摂動により L に関する種々の性質が $L+W$ に対しても保たれるかどうかを考察する。次に、$T>0$ として、放物型方程式

$$(\partial_t+W^{-1}L)u=0 \quad \text{in} \quad Q=D\times(0,T) \tag{1.1}$$

の非負値解の全体 $P(Q)$ を調べる。最後に $P(Q)$ の構造と楕円型作用素の摂動論における種々の概念との関係を考察する。

2 摂動論

まず摂動論における幾つかの概念を思い出そう。

[SP] (i.e.,W is a small perturbation of L on D)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K \Subset D$ が存在して

$$\int_{D\setminus K} G(x,z)W(z)G(z,y)d\nu(z) \le \varepsilon G(x,y), \qquad x,y \in D \setminus K.$$

ここで $d\nu(z)$ は M のリーマン測度である。

[SSP] (i.e., semismall perturbation)　任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K \Subset D$ が存在して

$$\int_{D\setminus K} G(x^0,z)W(z)G(z,y)d\nu(z) \le \varepsilon G(x^0,y), \qquad y \in D \setminus K,$$

ここで $x^0 \in D$ は固定された参照点である。

　$h \in E_L(D)$ を固定する。

[N-h-B] (i.e.,W is non-h-big)　$v \in E_{L+W}(D)$ で $0 < v \le h$ を満たすものが存在する。

[h-B] (i.e., h-big)　v が $(L+W)v = 0$ on D かつ $0 \le v \le h$ を満たすならば $v \equiv 0$ である。

　これ等の概念の間には次の関係がある。

Proposition 2.1 [SP] $\Rightarrow$ [SSP] $\Rightarrow$ [N-h-B] for any $h \in E_L(D)$

証明　[SP] $\Rightarrow$ [SSP] は最大値の原理を用いて示される。
[SSP] $\Rightarrow$ [N-h-B] を示そう。$\partial_M D_L$ を L に関する D のマルチン境界とし、

$$K(x,\xi) = \lim_{D \ni y \to \xi} \frac{G(x,y)}{G(x^0,y)}, \qquad \xi \in \partial_M D_L,$$

をマルチン核とする。($K(\cdot,\xi) \in E_L(D)$ である。) [SSP] より、$C > 0$ が存在して

$$\int_D G(x^0,z)W(z)G(z,y)d\nu(z) \le CG(x^0,y), \qquad y \in D.$$

Fatou の補題により、

$$\int_D G(x^0,z)W(z)K(z,\xi)d\nu(z) \le C, \qquad \xi \in \partial_M D_L.$$

Martin の表現定理と Fubini の定理により、

$$\int_D G(x^0,z)W(z)h(z)d\nu(z) \le C, \qquad h \in E_L(D).$$

この不等式から、Grigor'yan-Hansen による [N-h-B] の特徴づけにより、[N-h-B] が従う。

Theorem 2.2 (i) [SSP] $\Rightarrow$ $\partial_M D_L$ から $\partial_M D_{L+W}$ への同相写像 Φ が存在する。 (ii) [SP] $\Rightarrow$ G と $L+W$ のグリーン関数 G_{L+W} は comparable である。即ち、$C>0$ が存在して

$$C^{-1}G(x,y) \leq G_{L+W}(x,y) \leq CG(x,y), \qquad x,y \in D.$$

更に $K(x,\xi)$ と $L+W$ のマルチン核 $K_{L+W}(x,\Phi(\xi))$ は comparable である。

Proposition 2.3 $[K(x,\xi)\text{-B}]$ $\Rightarrow$ $\lim_{D\ni y\to\xi} G_{L+W}(x,y)/G(x^0,y)=0$

Example 2.4 $L=-\Delta$ on $D=\mathbb{R}^n,\ n\geq 3,\ W(x)=(1+|x|^2)^{\alpha/2},\ \alpha\in\mathbb{R}$ とする。このとき
[SP] $\Longleftrightarrow$ [SSP] $\Longleftrightarrow$ [N-h-B] for any $h\in E_L(D)$
$\Longleftrightarrow$ $\alpha<-2$.
ここで、$E_L(D)=\{\text{positive constant functions}\}$.

3 $P(Q)$ の構造

問題：放物型方程式 (1.1) の非負値解を全て求めよ

を考えよう。この問題は次の初期値問題

$$(\partial_t+W^{-1}L)u=0 \quad \text{in} \quad Q=D\times(0,T), \qquad u(x,0)=0 \quad \text{on} \quad D \tag{3.1}$$

の非負値解の一意性 [UP] (i.e., uniqueness for the positive Cauchy problem) と密接な関係がある。

[UP] u が (3.1) の非負値解ならば $u\equiv 0$ in Q である。

[NUP] (3.1) の非負値解 $u\not\equiv 0$ が存在する。

Theorem 3.1 ([2]) (i) [UP] $\Rightarrow$ 任意の $u\in P(Q)$ に対して D 上の Borel 測度 μ が唯一つ存在して

$$u(x,t)=\int_D p(x,y,t)d\mu(y), \quad x\in D,\ 0<t<T,$$

を満たす。ここで p は (1.1) に対する測度 $Wd\nu$ に関する極小基本解である。

(ii) [NUP] $\Rightarrow$ 任意の $u \in P(Q)$ に対して D 上の Borel 測度 μ と

$$v \in P^0(Q) \equiv \{v \in P(Q); v \text{ は } (3.1) \text{ の非負値解 }\}$$

が唯一組存在して

$$u(x,t) = \int_D p(x,y,t)d\mu(y) + v(x,t), \quad (x,t) \in Q$$

を満たす。

従って我々の問題を一意性が成り立たない場合に解くためには $P^0(Q)$ を決定する必要がある。そのために条件 [IU] (i.e., intrinsic ultracontractivity) を導入しよう ([5]). $< W^{-1}L >_D$ を2次形式

$$\int_D (\langle \nabla u, \nabla v \rangle + Vuv)d\nu, \quad u,v \in C_0^\infty(D)$$

に付随する $L^2(D; Wd\nu)$ 上の自己共役作用素とし、σ をそのスペクトルとする。さらに $\lambda_0 = \inf \sigma$ は $< W^{-1}L >_D$ の固有値と仮定する。すると L が subcritical なので、$\lambda_0 > 0$ となる。ϕ_0 を正規化された λ_0 に対する正値固有関数とする。

[IU] 任意の $t > 0$ に対して $C_t > 0$ が存在して

$$p(x,y,t) \le C_t\, \phi_0(x)\phi_0(y), \quad x,y \in D.$$

条件 [IU] の下での $P^0(Q)$ の構造を述べる前に次の所見 ([9]) を述べておこう。

Proposition 3.2 [IU] $\Rightarrow$ [NUP]

証明 D に集積点を持たない点列 $\{y_j\}_{j=1}^\infty \subset D$ を選んで、

$$u_j(x,t) = p(x,y_j,t)/\phi_0(y_j)$$

とおく。放物型 Harnack 不等式により、収束部分列 $\{u_{j(k)}\}_{k=1}^\infty$ と $u \in P^0(Q)$ が存在して $u_{j(k)}$ は u に $D \times [0,T)$ 上広義一様収束する。ところが、[IU] より、$c_t > 0$ が存在して

$$c_t\, \phi_0(x)\phi_0(y) \le p(x,y,t), \quad x,y \in D$$

が成立するので、$u(x,t) > 0$ $((x,t) \in Q)$ である。

Theorem 3.3 [IU] $\Rightarrow$ 任意の $v \in P^0(Q)$ に対して $\partial_M D_L \times [0,T)$ 上のボレル測度 λ で次を満たすものが唯一つ存在する：

$$\lambda \text{ is supported by the set } \partial_m D_L \times [0,T),$$

$$v(x,t) = \int_{\partial_M D_L \times [0,t)} q(x,\xi,t-s)d\lambda(\xi,s), \quad (x,t) \in Q.$$

ここで $\partial_m D_L$ は D の極小マルチン境界で、

$$q(x,\xi,\tau) = \lim_{D \ni y \to \xi} p(x,y,\tau)/\phi_0(y).$$

(詳しくは [14] の Theorem 1.2 を参照されたい。)

この定理の証明は放物型マルチン表現定理と Choquet の定理に基ずいてなされる。その際、放物型マルチン境界を特定することが鍵となる。

Example 3.4 $W(x) \equiv 1, \ \alpha \in \mathbf{R}, \ L = -\Delta + (1+|x|^2)^{\alpha/2}$ on $D = \mathbf{R}^n$ とする。このとき

(i) [IU] $\Longleftrightarrow$ [NUP] $\Longleftrightarrow$ $\alpha > 2$.

(ii) $\alpha > -2 \Rightarrow \partial_M D_L = \partial_m D_L = \infty S^{n-1}$ (the sphere at infinity)

$\alpha \le -2 \Rightarrow \partial_M D_L = \partial_m D_L = \{\infty\}$ (the point at infinity)

4 関係

Theorem 4.1 $h \in E_L(D)$ とする。このとき次が成り立つ。

[N-h-B] $\Rightarrow$ $v \in P^0(Q)$ が存在して、

$$0 < v(x,t) \le h(x), \quad t > 0, \ x \in D.$$

Corollary 4.2 ある $h \in E_L(D)$ に対して [N-h-B] が成立 $\Rightarrow$ [NUP]

Theorem 4.3 [IU] $\Rightarrow$ [SP]

まとめると

[IU] $\Rightarrow$ [SP] $\Rightarrow$ [SSP]

$\Rightarrow$ 任意の $h \in E_L(D)$ に対して [N-h-B] が成立

$\Rightarrow$ ある $h \in E_L(D)$ に対して [N-h-B] が成立

$\Rightarrow$ [NUP]

[UP] $\Rightarrow$ 任意の $h \in E_L(D)$ に対して [h-B] が成立

注意　1．[IU] については [5], [4], [3] を参照せよ。
2．[SP] については [15], [1], [16] を参照せよ。
3．[SSP] については [10], [11] を参照せよ。
4．[UP] と [NUP] については [7], [12], [13] を参照せよ。
5．マルチン境界については [8], [11] を参照せよ。

References

[1] A. Ancona, *First eigenvalues and comparison of Green's functions for elliptic operators on manifolds or domains*, J. Analyse Math. **72** (1997), 45–92.

[2] A. Ancona and J. C. Taylor, *Some remarks on Widder's theorem and uniqueness of isolated singularities for parabolic equations*, in Partial Differential Equations with Minimal Smoothness and Applications, (Dahlberg et al., eds.) Springer, New York, 1992, 15–23.

[3] R. Bañuelos, *Intrinsic ultracontractivity and eigenfunction estimates for Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **100** (1991), 181–206.

[4] E. B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[5] E. B. Davies and B. Simon, *Ultracontractivity and the heat kernel for Schrödinger operators and the Dirichlet Laplacians*, J. Funct. Anal. **59** (1984), 335–395.

[6] A. Grigor'yan and W. Hansen, *A Liouville property for Schrödinger operators*, Math. Ann. **312** (1998), 659–716.

[7] K. Ishige and M. Murata, *Uniqueness of nonnegative solutions of the Cauchy problem for parabolic equations on manifolds or domains*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **30** (2001), 171–223.

[8] M. Murata, *Structure of positive solutions to* $(-\Delta + V)u = 0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Duke Math. J. **53** (1986), 869–943.

[9] M. Murata, *Uniform restricted parabolic Harnack inequality, separation principle, and ultracontractivity for parabolic equations*, in Functional

Analysis and Related Topics, 1991, Lecture Notes in Math. Vol. **1540**, Springer, Berlin, 1993, 277–288.

[10] M. Murata, *Semismall perturbations in the Martin theory for elliptic equations*, Israel J. Math. **102** (1997), 29–60.

[11] M. Murata, *Martin boundaries of elliptic skew products, semismall perturbations, and fundamental solutions of parabolic equations*, J. Funct. Anal. **194** (2002), 53–141.

[12] M. Murata, *Heat escape*, Math. Ann. **327** (2003), 203–226.

[13] M. Murata, *Uniqueness theorems for parabolic equations and Martin boundaries for elliptic equations in skew product form*, J. Math. Soc. Japan, **57** (2005), 387–413.

[14] M. Murata, *Integral representations of nonnegative solutions for parabolic equations and elliptic Martin boundaries*, J. Funct. Anal.(2007), to appear.

[15] Y. Pinchover, *Criticality and ground states for second-order elliptic equations*, J. Diff. Eq. **80** (1989), 237–250.

[16] M. Tomisaki, *Intrinsic ultracontractivity and small perturbation for one dimensional generalized diffusion operators*, preprint.