数理解析研究所講究録
第 1561 巻 2007 年 36-44

ガウス型通信路についての最近の話題

山口大学大学院・理工学研究科 柳 研二郎 (Kenjiro YANAGI)
Graduate School of Science and Engineering,
Yamaguchi University

1 はじめに

フィードバックをもつガウス型通信路の容量について過去何度も報告しているのでその詳細な定義は省略する．もし厳密な定義を必要とする場合は他の報告書を参照していただきたい．フィードバックをもつ有限ブロック長容量は次のように定義される．

$$C_{n,FB,Z}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|R_X^{(n)} + R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし $|\cdot|$ は行列式を表し、最大値は

$$Tr[(I+B)R_X^{(n)}(I+B)^t + BR_Z^{(n)}B^t] \leq nP$$

を満たす狭義下三角行列 B と非負対称行列 $R_X^{(n)}$ についてとる．同様にフィードバックがないときには容量 $C_{n,Z}(P)$ は $B=0$ としたときの最大値である．これらの条件の下で Cover and Pombra [6] は次を得た．

Proposition 1 (Cover and Pombra [6]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる．逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB,Z}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立たない．これはフィードバックをもたない場合も成り立つ．

$C_{n,Z}(P)$ は正確に得られている．

Proposition 2 (Gallager [10])

$$C_{n,Z}(P) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{k} \log \frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{kr_i},$$

ただし $0 < r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\leq n)$ は $nP + r_1 + r_2 + \cdots + r_k > kr_k$ を満たす最大整数である.

ところで $C_{n,FB,Z}(P)$ は正確には得られていないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている ([1],[2],[3], [6],[8],[9],[14], [15],[17],[18],[19], [4]). 以下計算の都合上、対数は自然対数を用いることにする.

2 Question 1

Question 1

$$C_{n,FB,Z}(P) \leq C_{n,Z}(2P)\ ?$$

今まで次の結果が得られている.

Theorem 1 (Cover-Pombra [6])

$$C_{n,FB,Z}(P) \leq \min\{2C_{n,Z}(P), C_{n,Z}(P) + \frac{1}{2}\log 2\}.$$

Theorem 2 (Chen-Yanagi [1])

$$C_{n,Z}(2P) \leq \min\{2C_{n,Z}(P), C_{n,Z}(P) + \frac{1}{2}\log 2\}.$$

Theorem 3 (Chen-Yanagi [1])

$$C_{2,FB,Z}(P) \leq C_{2,Z}(2P).$$

3 Question2

Definition 1 任意の $\alpha, \beta \geq 0(\alpha+\beta=1)$ と任意のガウス雑音 Z_1, Z_2 に対して $R_{\tilde{Z}} = \alpha R_{Z_1} + \beta R_{Z_2}$ とおく．このときガウス雑音 $\tilde{Z}$ をもつ通信路を混合型ガウス型通信路という．

Question 2

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P)\ ?$$

今までは次の結果が得られている．

Theorem 4 (Yanagi-Chen-Yu [19])

$$C_{n,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,Z_1}(P) + \beta C_{n,Z_2}(P).$$

Theorem 5 (Yanagi-Chen-Yu [19]) $P = \alpha P_1 + \beta P_2$ を満たす $P_1, P_2 \geq 0$ が存在して

$$C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) \leq \alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2).$$

が成り立つ．

Theorem 6 (Yanagi-Chen-Yu [19]) 次の (a) 又は (b) の条件があれば *Question 2* が成り立つ．

(a) R_{Z_1} の n 行 n 列を除いた部分行列と R_{Z_2} のそれが一致する．

(b) $\tilde{Z}$ がホワイト型である．即ち $R_{\tilde{Z}}$ が対角行列である．

4 Question3

Question 3 任意の $P_1, P_2 \geq 0$ と任意の $\alpha, \beta \geq 0(\alpha+\beta=1)$ に対して

$$\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2)$$

$$\leq C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha} |R_{Z_2}|^{\beta}}\ ?$$

今まで次のような結果が得られている.

Theorem 7 (Chen-Yanagi [3]) $Z_1 = Z_2$ のとき成り立つ. 即ち $C_{n,FB,Z}(\cdot)$ の凹性が成り立つ.

$$\alpha C_{n,FB,Z}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z}(P_2) \leq C_{n,FB,Z}(\alpha P_1 + \beta P_2).$$

Theorem 8 (Yanagi-Yu-Chao [20]) $P_1 = P_2$ のとき成り立つ. 即ち

$$\alpha C_{n,FB,Z_1}(P) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P) \leq C_{n,FB,\tilde{Z}}(P) + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.$$

Theorem 9 (Yanagi-Yu-Chao [20])

$$\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,Z_2}(P_2) \leq C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.$$

Theorem 10 (Yanagi-Yu-Chao [20])

$$\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2) \leq C_{n,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.$$

Theorem 11 (Yanagi-Yu-Chao [20])

$$\alpha C_{n,FB,Z_1}(P_1) + \beta C_{n,FB,Z_2}(P_2) \leq 2C_{n,FB,\tilde{Z}}(\alpha P_1 + \beta P_2) + \frac{1}{2n} \log \frac{|R_{\tilde{Z}}|}{|R_{Z_1}|^{\alpha}|R_{Z_2}|^{\beta}}.$$

5 Kim の結果

Definition 2 $Z = \{Z_i; i = 1, 2, \ldots\}$ が *first order moving average Gaussian channel* であるとは次のような3つの同値な条件をみたすことである.

(1) $Z_i = \alpha U_{i-1} + U_i, i = 1, 2, \ldots,$ ただし $U_i \sim N(0, 1)$ は $i.i.d$ とする.

(2) *Spectral density function (SDF)* $f(\lambda)$ は次で与えられる.

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}|1+\alpha e^{-i\lambda}|^2=\frac{1}{2\pi}(1+\alpha^2+2\alpha\cos\lambda).$$

(3) $Z_n=(Z_1,Z_2,\ldots,Z_n)\sim R_n(0,K_Z), n\in\mathbb{N}$, ただし *covariance matrix* R_Z は次で与えられる.

$$R_Z=\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha & 1+\alpha^2 & \alpha & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & 1+\alpha^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

このとき Z の entropy rate は次のように計算される.

$$\begin{aligned} h(Z) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{4\pi^2 ef(\lambda)\}d\lambda \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\{2\pi e|1+\alpha e^{-i\lambda}|^2\}d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e) \quad \text{if} \quad |\alpha|\le 1 \\ &= \frac{1}{2}\log(2\pi e\alpha^2) \quad \text{if} \quad |\alpha|>1. \end{aligned}$$

ここで最後の計算は次の Poisson's integral formula を用いている.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|e^{i\lambda}-\alpha|d\lambda &= 0 \qquad \text{if} \quad |\alpha|\le 1, \\ &= \log|\alpha| \quad \text{if} \quad |\alpha|>1. \end{aligned}$$

$MA(1)$ Gaussian noise をもつ Gaussian channel の capacity は次で定義されている.

$$C_{Z,FB}(P)=\lim_{n\to\infty}C_{n,Z,FB}(P).$$

最近 Kim は初めて feedback をもつ Gaussian channel の capacity を求めた.

Theorem 12 (Kim [12])

$$C_{Z,FB}(P)=-\log x_0,$$

ただし x_0 は次の 4 次方程式の正の唯一解である;

$$Px^2=(1-x^2)(1-|\alpha|x)^2.$$

6 Question 1 の反例

Kim [13] はまた Conjecture 1 の反例を得た.

$$f_Z(\lambda) = \frac{1}{4\pi}|1+e^{i\lambda}|^2 = \frac{1+\cos\lambda}{2\pi},$$

のとき, input は

$$f_X(\lambda) = \frac{1-\cos\lambda}{2\pi},$$

ととればよいことがわかっているので, output は

$$f_Y(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Z(\lambda) = \frac{1}{\pi}.$$

になることがわかる. したがって nonfeedback capacity は

$$\begin{aligned}
C_Z(2) &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{f_Y(\lambda)}{f_Z(\lambda)}d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{4}{|1+e^{i\lambda}|^2}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\frac{2}{|1+e^{i\lambda}|}d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log 2 d\lambda - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|1+e^{i\lambda}|d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}2\pi\log 2 - 0 \\
&= \log 2
\end{aligned}$$

である. 一方 feedback capacity は次のようになる.

$$C_{Z,FB}(1) = -\log x_0,$$

ただし x_0 は 4 次方程式

$$x^2 = (1+x)(1-x)^3.$$

の正の唯一解である. ここで $x_0 < \frac{1}{2}$ であるので次が成り立つ.

$$C_{Z,FB}(1) = -\log x_0 > \log 2 = C_Z(2).$$

これは Question 1 の反例になっている. また

$$C_{n_0,Z,FB}(1) > C_{n_0,Z}(2).$$

となる $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在することもわかる.

7 Appendix

Poisson's integral formula を初等的な方法で証明を与える.

Proposition 3

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|e^{i\lambda}-\alpha|d\lambda &= 0 \qquad \text{if } |\alpha|\le 1,\\ &= \log|\alpha| \quad \text{if } |\alpha|>1.\end{aligned}$$

Proof. $I(\alpha)$ を次のようにおく.

$$I(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|e^{i\lambda}-\alpha|d\lambda=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log(1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda)d\lambda.$$

$I(\alpha)=0$ であることに注意する. ここで

$$I'(\alpha)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\alpha-2\cos\lambda}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\alpha-\cos\lambda}{1+\alpha^2-2\alpha\cos\lambda}d\lambda.$$

$\tan\frac{\lambda}{2}=t$ と置換すると

$$\begin{aligned}I'(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{(\alpha^2-1)/(2\alpha)}{(1+\alpha)^2t^2+(1-\alpha)^2}+\frac{1/(2\alpha)}{1+t^2}\right\}dt\\ &= \frac{(\alpha-1)|1+\alpha|}{2\alpha(1+\alpha)|1-\alpha|}+\frac{1}{2\alpha}.\end{aligned}$$

$|\alpha|\le 1$ のとき

$$I'(\alpha)=-\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha}=0.$$

したがって $I(\alpha)=c$. $I(0)=0$ だから $c=0$. よって $I(\alpha)=0$ となる.
$|\alpha|>1$ のとき

$$I'(\alpha)=\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\alpha}=\frac{1}{\alpha}.$$

したがって $I(\alpha)=\log|\alpha|+c$. $I(1)=0$ だから $c=0$. よって $I(\alpha)=\log|\alpha|$. q.e.d.

参考文献

[1] H.W.Chen and K.Yanagi. On the Cover's conjecture on capacity of Gaussian channel with feedback. IEICE Trans. Fundamentals, vol E80-A, no 11, pp 2272-2275, November 1997.

[2] H.W.Chen and K.Yanagi. Refinements of the half-bit and factor-of-two bounds for capacity in Gaussian channels with feedback. IEEE Trans. Information Theory, vol IT-45, no 1, pp 319-325, January 1999.

[3] H.W.Chen and K.Yanagi. Upper bounds on the capacity of discrete time blockwise white Gaussian channels with feedback. IEEE Trans. Information Theory, vol IT-46, no 3, pp 1125-1131, May 2000.

[4] H.W.Chen and K.Yanagi. The convex-concave characteristics of Gaussian channel capacity functions. IEEE Trans. Information Theory, vol 52, no 6, pp 2167-2172, 2006.

[5] T.M.Cover. Conjecture: Feedback does not help much. in Open problems in communication and computation. T.Cover and B.Gopinath (Ed.). pp 70-71. Springer-Verlag. New York. 1987.

[6] T.M.Cover and S.Pombra. Gaussian feedback capacity. IEEE Trans. Information Theory. vol IT-35, no 1. pp 37-43. January 1989.

[7] T.M.Cover and J.A.Thomas. Elements of Information Theory. New York. Wiley. 1991.

[8] A.Dembo. On Gaussian feedback capacity. IEEE Trans. Information Theory. vol IT-35. no 5. pp 1072-1089. September 1989.

[9] P.Ebert. The capacity of the Gaussian channel with feedback. Bell. Syst. Tech. J., vol 49, pp 1705-1712, 1970.

[10] R.G.Gallager. Information Theory and Reliable Communication, John Wiley and Sons. New York, 1968.

[11] S.Ihara and K.Yanagi. Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback. II. Japan J. Appl. Math., vol 6, pp 245-258, 1989.

[12] Y.H.Kim. Feedback capacity of the first-order moving average Gaussian channel. IEEE Trans. Information Theory. vol IT-52, no 7, pp 3063-3079. 2006.

[13] Y.H.Kim. A counterexample to Cover's 2P conjecture on Gaussian feedback capacity, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-52, no 8, pp 3792-3793, 2006.

[14] M.Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[15] K.Yanagi. An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Lecture Notes in Math., vol 1299, pp 565-570, 1988.

[16] K.Yanagi. Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-38, no 6, pp 1788-1791, November 1992.

[17] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback. II, IEEE Trans. Information Theory, vol IT-40, no 2, pp 588-593, March 1994.

[18] K.Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, III, Bull. Kyushu Inst. Tech., Pure and Applied Mathematics, vol 45, pp 1-8, 1998.

[19] K.Yanagi, H.W.Chen and J.W.Yu, Operator inequality and its application to capacity of Gaussian channel, Taiwanese J. Math., vol 4, no 3, pp 407-416, 2000.

[20] K.Yanagi, J.W.Yu and I.F.Chao, On some inequalities for capacity in mixed Gaussian channels with feedback, Arch. Inequalities Appl., vol 2, pp 13-24, 2004.