数理解析研究所講究録
第 1561 巻 2007 年 11-24

2つの可測ノルムが一致しない例についての再考

原井　敬子 (Keiko Harai)
お茶の水女子大学　人間文化研究科
(Graduate School of Humanities and Sciences, Ochanomizu University)

1　準備

可測ノルムの概念は，*Gross* によるものと *D.F.L.*(*Dudley* − *Feldman* − *LeCam*) によるものがある．これら二つの概念は，一般のシリンダー測度に関しては同値ではない．この反例として，今まで，ℓ^2 上にノルムとシリンダー測度を構成してきたが，ここでは，少し一般化した例を紹介する．

この論文では，X を Banach 空間，X' を X の位相的双対空間とし，$(\cdot,\cdot)$ を X' と X の natural pairing とする．また，$\mathcal{B}(X)$ を X 上の Borel σ-algebra とする．H を実可分 Hilbert 空間，$<\cdot,\cdot>$ を H 上の内積，$FD(H)$ を H の有限次元部分空間全体，$\mathcal{F}$ を H 上の有限次元部分空間への直交射影の全体とする．また，I で恒等写像を表すことにする．

Z が，$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n \in X', D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して，次のように表されるとき，シリンダー集合という．

$$Z=\{x\in X;((\xi_1,x),(\xi_2,x),\ldots,(\xi_n,x))\in D\}$$

$\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ を固定したときのシリンダー集合全体 $\mathcal{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ は σ-algebra になるが，シリンダー集合全体 $\mathcal{R}$ は σ-algebra になるとは限らない．

また，Hilbert 空間上のシリンダー集合は，直交射影を使って次のように表すことができる．

$$Z=\{x\in H;Px\in F\}\qquad (P\in\mathcal{F},\ F\in\mathcal{B}(PH))$$

次にシリンダー測度を定義する.

Definition 1.1 (シリンダー測度) $\mathcal{R}$ 上に定義された関数 μ が次の条件を満たすとき，シリンダー測度であるという.

(i) $\mu\ :\ \mathcal{R} \longrightarrow [0,1]$
(ii) μ の $\mathcal{R}_{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n}$ への制限は確率測度

次に Hilbert 空間上で重要な役割を果たす Gauss シリンダー測度を定義する.

Definition 1.2 (Gauss シリンダー測度) 集合関数 $\gamma : \mathcal{R} \to [0,1]$ が次のような形で表されるとき，*Gauss* シリンダー測度であるという.

$$\gamma(Z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_F e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, dx$$

ただし，$Z = \{x \in H; Px \in F\}$，$n = \dim PH$, dx は PH 上の *Lebesgue* 測度とする.

無限次元 Hilbert 空間上では，Gauss シリンダー測度 γ は可算加法的測度ではない.

次に，可測ノルムの定義をする.

Definition 1.3 (Gross の可測ノルム) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $P_0 \in \mathcal{F}$ が存在して，
$P \perp P_0$ となるどんな $P \in \mathcal{F}$ に対しても，

$$\mu(\{x \in H; \|Px\| > \varepsilon\}) < \varepsilon$$

が成り立つとき，$\|\cdot\|$ は μ-(G) 可測であるという.

上の定義は次のように書きかえることができる.

$\|\cdot\|$ は μ-(G) 可測
$\iff$

任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある$G \in FD(H)$が存在して，$F \perp G$となるどんな$F \in FD(H)$に対しても，

$$\mu(\{N_\varepsilon \cap F + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

ただし，$N_\varepsilon = \{x \in H; \|x\| \leq \varepsilon\}$, $F^\perp$ はFの直交補空間とする．

Definition 1.4 (D.F.L. の可測ノルム) 任意の$\varepsilon > 0$に対して，ある$G \in FD(H)$が存在して，$F \perp G$となるどんな$F \in FD(H)$に対しても，

$$\mu(\{P_F(N_\varepsilon) + F^\perp\}) \geq 1 - \varepsilon$$

が成り立つとき，$\|\cdot\|$はμ-(G)可測であるという．

ただし，P_FはHからFへの直交射影とする．

2　2つの可測ノルムが一致しない例

今まで，Gross と Dudley-Feldman-LeCam らの２つの可測ノルムが一致しない例として，具体的にシリンダー測度とノルムを構成してきたが，ここでは，これらを少し一般化した形を紹介する．

まず，シリンダー測度を構成する．

測度の構成

$(\ell^2)^*$ を弱位相 $\sigma((\ell^2)^*, \ell^2)$ をもった ℓ^2 の代数的双対空間，$\mathcal{J} : \{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を含む ℓ^2 の代数的基，$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ とする．また，$(\cdot, \cdot) : (\ell^2)^*$ と ℓ^2 の natural pairing とする．

$(\mathbf{a}, e_n) = a_n$, $n = 1, 2, \ldots$ かつ $(\mathbf{a}, e_\alpha) = 0$, $e_\alpha \in \mathcal{J} \backslash \{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ かつ すべてのnに対して $|a_n| > C$ を満たす $\mathbf{a} \in (\ell^2)^*$ をとる．

このとき得られる $(\ell^2)^*$ 上の *Dirac* 測度 $\delta_\mathbf{a}$ によって導入される ℓ^2 上のシリンダー測度を $\mu_\mathbf{a}$ とする．

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \ell^2$, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$Z = \{x \in (\ell^2)^*; (x, \xi_1), (x, \xi_2), \ldots, (x, \xi_n)) \in D\}$

$\tilde{Z} = \{x \in \ell^2; (\langle x, \xi_1\rangle, \langle x, \xi_2\rangle, \ldots, \langle x, \xi_n\rangle) \in D\}$

とおくと，$\mu_\mathbf{a}(\tilde{Z}) = \delta_\mathbf{a}(Z)$

次に，シリンダー測度を構成するときに用いた a_n を用いて，ノルムを構成する．
ノルムの構成
$\{\beta_n\}$ を次を満たす非負実数列とする．

$$\beta_{2m} = 0,$$
$$\beta_{2m-1} : \text{正の単調増加列}$$
$$\beta_{2m-1} \to \infty \quad (m \to \infty)$$

また，Γ を $\{\pm\beta_n(a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n); n = 1, 2, \ldots\}$ の convex hull とする．ただし，$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < M$ とする．
また，B を ℓ^2 上の開単位球として，$U = \Gamma + B$ とおき，$\|\cdot\|$ を U の gauge として定義する．

このとき，次の性質が成り立つ．

Proposition 2.1 $\|\cdot\|$ は $\mu_{\mathbf{a}}$-(D) 可測である．

（証明）
E を $\|\cdot\|$ に関する ℓ^2 の完備化とし，j を $\ell^2 \hookrightarrow E$ の inclusion mapping，j' を j の dual operator とする．

$$E' \xrightarrow{j'} (\ell^2)' \simeq \ell^2 \xrightarrow{j} E$$

また，$(\cdot,\cdot)_E$ を $E' \times E \to \mathbb{R}$ の natural pairing とする．
$\|\cdot\|$ が $\mu_{\mathbf{a}}$-(D)measurable であることを示すには，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ が $(E, \mathcal{C}_E)$ 上で，σ-additive であることを示せばよい．
まず，**a** vanishes on $j'(E')$ を示す．
各 $y \in E'$ に対して，$(\mathbf{a}, j'(y)) = 0$ を示す．
すべての $e_\alpha \in \mathcal{J} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，$(\mathbf{a}, e_\alpha) = 0$ なので，$j'(y)$ が $j'(y) = \sum_{n=1}^{N} A_ne_n$ （$A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathbb{R}$）の形のみ考えればよい．
ℓ^2 上の列 $\{x^m\}_{m=1,2,\ldots}$ を次のように定義する．

$$x^1 = a_1e_1,$$
$$x^2 = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3,$$
$$\vdots$$
$$x^m = a_1e_1 + \ldots + a_{2m-1}e_{2m-1},$$
$$\vdots$$

$m \geq (k+1)/2$ のとき，$\langle e_k, x^m \rangle = a_k$ なので，
すべての $m \geq N$ に対して，$\langle j'(y), x^m \rangle = \sum_{n=1}^{N} a_nA_n$ ．

さらに，$\langle j'(y), x^m \rangle = (y, j(x^m))_E$ なので，
すべての $m \geq N$ に対して，$(y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^{N} a_n A_n$. よって，

$$\lim_{m \to \infty} (y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^{N} a_n A_n. \tag{1}$$

$\{\beta_{2m-1}\}$ と U の構成より，$\beta_{2m-1} x^m \in U$. よって，$\|x^m\| \leq 1/\beta_{2m-1}$.
仮定より，$\beta_{2m-1} \to \infty$ ($m \to \infty$) なので，$\|x^m\| \to 0$ ($m \to \infty$). それゆえに，

$$\lim_{m \to \infty} j(x^m) = 0 \ \ in\ E. \tag{2}$$

(1) と (2) より，$\sum_{n=1}^{N} a_n A_n = 0$ なので，$(\mathbf{a}, j'(y)) = \sum_{n=1}^{N} a_n A_n = 0$.
i を $(\ell^2)^*$ から $(E')^*$ への canonical mapping とすると，$i(\mathbf{a}) = 0$ なので，$i(\delta_{\mathbf{a}})$ は $(E')^*$ 上の Dirac measure δ_0 となる．よって，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ は E 上の δ_0 に拡張できる．つまり，$(E, \mathcal{C}_E)$ 上 σ-additive である．

□

Proposition 2.2 $\|\cdot\|$ は $\mu_{\mathbf{a}}$-(G) 可測でない．

(証明)

$\|\cdot\|$ が $\mu_{\mathbf{a}}$-(G) 可測でないことを示すには，
ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の $G \in FD(\ell^2)$ に対して

$$\exists F \in FD(\ell^2)\ ,\ F \perp G \tag{3}$$

$$\mu_{\mathbf{a}}(\varepsilon_0 U \cap F + F^{\perp}) = 0.$$

となることを示せばよい．

$0 < \varepsilon_0 < \frac{C}{2(M+1)}$ とする．
G を ℓ^2 の任意の有限次元部分空間として，$\{\xi^j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ を G の正規直交基底とすると，
$\xi^j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i$ ($\alpha_i^j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots$).
次のような行列 A を考える．

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_{n+m}^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n & \dots & \alpha_{n+m}^n \end{pmatrix}$$

m は $\mathrm{rank}\, A = n$ となるように選ぶ.
$N > n+m$ とすると,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{2N+1}^1 \\ \vdots \\ -\alpha_{2N+1}^n \end{pmatrix} \tag{4}$$

は $\mathbb{R}^{n+m}$ 上で解を持つ.

$\xi^j \in \ell^2$ なので, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $\alpha_i^j \to 0$ ($i \to \infty$). それゆえに, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次を満たす十分大きな $N(> n+m)$ を選べる.
(4) の解 $x_1 = \eta_1, \dots, x_{n+m} = \eta_{n+m}$ が,

$$\max_{1 \le l \le n+m} |\eta_l| < \delta. \tag{5}$$

(5) において, $\delta > 0$ を次を満たすようにとる.

$$\frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2m+1}}{{\eta_1}^2 + {\eta_2}^2 + \dots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} > \frac{C}{2}$$

$\tau = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}$
F を τ によって生成される ℓ^2 の 1 次元部分空間とすると, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して,

$$\begin{aligned} \langle \tau, \xi^j \rangle &= \langle \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i \rangle \\ &= \alpha_1^j \eta_1 + \dots + \alpha_{n+m}^j \eta_{n+m} + \alpha_{2N+1}^j \\ &= = 0. \end{aligned}$$

よって，$F \perp G$.
$\phi = \frac{\tau}{|\tau|}$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \phi) &= \frac{(\mathbf{a}, \tau)}{|\tau|} \\ &= \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{({\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

(3) を示すために，$\phi(\mu_{\mathbf{a}}) = \delta_{(\mathbf{a},\phi)}$ なので，$(\mathbf{a}, \phi)\phi \notin \varepsilon_0 U$ を示せばよい．
$(\mathbf{a}, \phi)\phi \in \varepsilon_0 U$ と仮定すると，$(\mathbf{a}, \phi)\phi = X + Y$ ($X \in \varepsilon_0\Gamma$, $Y \in \varepsilon_0 B$).
$X, Y \in \ell^2$ なので，$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i e_i$ ($X_i, Y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$).
$(\mathbf{a}, \phi)\phi = \sum_{i=1}^{\infty}(X_i + Y_i)e_i$. (6) より

$$X_{2N} + Y_{2N} = 0$$

$$X_{2N+1} + Y_{2N+1} = \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{{\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} > \frac{C}{2}.$$

さらに，$\varepsilon_0\Gamma$ の性質より，
$|X_{2N+1}| : |X_{2N}| = |a_{2N+1}| : |a_{2N}|$ なので，$|X_{2N+1}| = |\frac{a_{2N+1}}{a_{2N}}||X_{2N}|$.
$\varepsilon_0 B$ の性質より，$|Y_{2N}| < \varepsilon_0$，$|Y_{2N+1}| < \varepsilon_0$.
よって，

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{{\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| &= |X_{2N+1}| \\ &= |\frac{a_{2N+1}}{a_{2N}}||X_{2N}| \\ &= |\frac{a_{2N+1}}{a_{2N}}||Y_{2N}| \\ &< |\frac{a_{2N+1}}{a_{2N}}|\varepsilon_0 \\ &< M\varepsilon_0 \\ &< \frac{MC}{2(M+1)}.\end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{{\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| &> \frac{C}{2} - \varepsilon_0 \\ &> \frac{MC}{2(M+1)}.\end{aligned}$$

となり，矛盾する．

□

今度は，シリンダー測度を構成したときに用いた a_n とは異なる b_n を使ってノルムを構成する．
ノルムの構成
$\{\beta_n\}$ を次を満たす非負実数列とする．

$$\beta_{2m} = 0,$$
$$\beta_{2m-1} : \text{正の単調増加列}$$
$$\beta_{2m-1} \to \infty \quad (m \to \infty)$$

また，Γ を $\{\pm\beta_n(b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + a_ne_n); n = 1, 2, \ldots\}$ の convex hull とする．ただし，$|\frac{b_{n+1}}{b_n}| < M$ とする．
また，B を ℓ^2 上の開単位球として，$U = \Gamma + B$ とおき，$\|\cdot\|$ を U の gauge として定義する．

このとき，次の性質が得られる．

Theorem 2.3 $a_n = Cb_n$ ($C \in \mathbb{R}$) のとき，$\|\cdot\|$ は $\mu_{\mathbf{a}}$-(D) 可測である．

(証明)
E を $\|\cdot\|$ に関する ℓ^2 の完備化とし，j を $\ell^2 \hookrightarrow E$ の inclusion mapping，j' を j の dual operator とする．

$$E' \xrightarrow{j'} (\ell^2)' \simeq \ell^2 \xrightarrow{j} E$$

また，$(\cdot,\cdot)_E$ を $E' \times E \to \mathbb{R}$ の natural pairing とする．
$\|\cdot\|$ が $\mu_{\mathbf{a}}$-(D)measurable であることを示すには，$j(\mu_{\mathbf{a}})$ が $(E, \mathcal{C}_E)$ 上で，σ-additive であることを示せばよい．
まず，$\mathbf{a}$ vanishes on $j'(E')$ を示す．
各 $y \in E'$ に対して，$(\mathbf{a}, j'(y)) = 0$ を示す．
すべての $e_\alpha \in \mathcal{J} \setminus \{e_n\}_{n=1,2,\ldots}$ に対して，$(\mathbf{a}, e_\alpha) = 0$ なので，$j'(y)$ が $j'(y) = \sum_{n=1}^{N} A_ne_n$ ($A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathbb{R}$) の形のみ考えればよい．
ℓ^2 上の列 $\{x^m\}_{m=1,2,\ldots}$ を次のように定義する．

$$x^1 = b_1e_1,$$
$$x^2 = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3,$$

$$\vdots$$
$$x^m = b_1 e_1 + \ldots + b_{2m-1} e_{2m-1},$$
$$\vdots$$

$m \geq (k+1)/2$ のとき, $\langle e_k, x^m \rangle = b_k$ なので,
すべての $m \geq N$ に対して, $\langle j'(y), x^m \rangle = \sum_{n=1}^{N} b_n A_n$.
さらに, $\langle j'(y), x^m \rangle = (y, j(x^m))_E$ なので,
すべての $m \geq N$ に対して, $(y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^{N} b_n A_n$. よって,

$$\lim_{m\to\infty} (y, j(x^m))_E = \sum_{n=1}^{N} b_n A_n. \tag{6}$$

$\{\beta_{2m-1}\}$ と U の構成より, $\beta_{2m-1} x^m \in U$. よって, $\|x^m\| \leq 1/\beta_{2m-1}$.
仮定より, $\beta_{2m-1} \to \infty$ ($m \to \infty$) なので, $\|x^m\| \to 0$ ($m \to \infty$). それゆえに,

$$\lim_{m\to\infty} j(x^m) = 0 \ \ in\ E. \tag{7}$$

(6) と (7) より, $\sum_{n=1}^{N} b_n A_n = 0$ なので, $(\mathbf{a}, j'(y)) = \sum_{n=1}^{N} a_n A_n = \sum_{n=1}^{N} C b_n A_n = C \sum_{n=1}^{N} b_n A_n = 0$.
i を $(\ell^2)^*$ から $(E')^*$ への canonical mapping とすると, $i(\mathbf{a}) = 0$ なので, $i(\delta_{\mathbf{a}})$ は $(E')^*$ 上の Dirac measure δ_0 となる. よって, $j(\mu_{\mathbf{a}})$ は E 上の δ_0 に拡張できる. つまり, $(E, \mathcal{C}_E)$ 上 σ-additive である.

□

Theorem 2.4 $\|\cdot\|$ は $\mu_{\mathbf{a}}$-(G) 可測でない.

(証明)

$\|\cdot\|$ が $\mu_{\mathbf{a}}$-(G) 可測でないことを示すには,
ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $G \in FD(\ell^2)$ に対して

$$\exists F \in FD(\ell^2)\ ,\ F \perp G \tag{8}$$

$$\mu_{\mathbf{a}}(\varepsilon_0 U \cap F + F^{\perp}) = 0.$$

となることを示せばよい.

$0 < \varepsilon_0 < \frac{C}{2(M+1)}$ とする.
G を ℓ^2 の任意の有限次元部分空間として, $\{\xi^j\}_{j=1,2,\dots,n}$ を G の正規直交基底とすると,
$\xi^j = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i$ ($\alpha_i^j \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,\dots,n$, $i = 1,2,\dots$).
次のような行列 A を考える.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_{n+m}^1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n & \dots & \alpha_{n+m}^n \end{pmatrix}$$

m は rank $A = n$ となるように選ぶ.
$N > n + m$ とすると,

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha_{2N+1}^1 \\ \vdots \\ -\alpha_{2N+1}^n \end{pmatrix} \tag{9}$$

は $\mathbb{R}^{n+m}$ 上で解を持つ.

$\xi^j \in \ell^2$ なので, $j = 1,2,\dots,n$ に対して $\alpha_i^j \to 0$ ($i \to \infty$). それゆえに, 任意の $\delta > 0$ に対し, 次を満たす十分大きな $N(> n+m)$ を選べる.
(9) の解 $x_1 = \eta_1, \dots, x_{n+m} = \eta_{n+m}$ が,

$$\max_{1 \le l \le n+m} |\eta_l| < \delta. \tag{10}$$

(10) において, $\delta > 0$ を次を満たすようにとる.

$$\frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \dots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2m+1}}{\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2 + \dots + \eta_{n+m}{}^2 + 1} > \frac{C}{2}$$

$\tau = \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}$
F を τ によって生成される ℓ^2 の 1 次元部分空間とすると, $j = 1,2,\dots,n$ に対して,

$$\langle \tau, \xi^j \rangle \;=\; \langle \eta_1 e_1 + \dots + \eta_{n+m} e_{n+m} + e_{2N+1}, \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^j e_i \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \alpha_1^j \eta_1 + \ldots + \alpha_{n+m}^j \eta_{n+m} + \alpha_{2N+1}^j \\ &= \ = 0. \end{aligned}$$

よって，$F \perp G$.
$\phi = \frac{\tau}{|\tau|}$ とおくと，

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \phi) &= \frac{(\mathbf{a}, \tau)}{|\tau|} \\ &= \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{({\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

(8) を示すために，$\phi(\mu_{\mathbf{a}}) = \delta_{(\mathbf{a},\phi)}$ なので，$(\mathbf{a}, \phi)\phi \notin \varepsilon_0 U$ を示せばよい．
$(\mathbf{a}, \phi)\phi \in \varepsilon_0 U$ と仮定すると，$(\mathbf{a}, \phi)\phi = X + Y$ ($X \in \varepsilon_0\Gamma$, $Y \in \varepsilon_0 B$).
$X, Y \in \ell^2$ なので, $X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i e_i$ ($X_i, Y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$).
$(\mathbf{a}, \phi)\phi = \sum_{i=1}^{\infty}(X_i + Y_i)e_i$. (6) より

$$X_{2N} + Y_{2N} = 0$$

$$X_{2N+1} + Y_{2N+1} = \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{{\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} > \frac{C}{2}.$$

さらに，$\varepsilon_0\Gamma$ の性質より，
$|X_{2N+1}| : |X_{2N}| = |b_{2N+1}| : |b_{2N}|$ なので，$|X_{2N+1}| = |\frac{b_{2N+1}}{b_{2N}}||X_{2N}|$.
$\varepsilon_0 B$ の性質より，$|Y_{2N}| < \varepsilon_0$，$|Y_{2N+1}| < \varepsilon_0$.
よって，

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{{\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| &= |X_{2N+1}| \\ &= |\frac{b_{2N+1}}{b_{2N}}||X_{2N}| \\ &= |\frac{b_{2N+1}}{b_{2N}}||Y_{2N}| \\ &< |\frac{b_{2N+1}}{b_{2N}}|\varepsilon_0 \\ &< M\varepsilon_0 \\ &< \frac{MC}{2(M+1)}. \end{aligned}$$

一方，

$$\left| \frac{a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_{n+m}\eta_{n+m} + a_{2N+1}}{{\eta_1}^2 + \ldots + {\eta_{n+m}}^2 + 1} - Y_{2N+1} \right| > \frac{C}{2} - \varepsilon_0$$

$$> \frac{MC}{2(M+1)}$$

となり，矛盾する．

□

参考文献

[1] A. Badrikian and S. Chevet, *Measures Cylindriqued, Espaces de Wiener et Fonctions Alĕatorires Gaussiennes,* Lectture Notes in Math. 379, 1974.

[2] P. Baxendale, *Gaussian Measures on Function Spaces,* Amer. J. Math. 98(1976), 891-952.

[3] R.M. Dudley, J. Feldman, and L. LeCam, *On semi-norms and probabilities,and abstract Wiener Spaces,* Ann. of Math. 93(1971), 390-408.

[4] F. Gong, *A note on generalized Gross and Minlos Theorems,* Dirichet forms and stochastic process (Beijing,1993) 171-173, de Gruyter, Berlin, 1995.

[5] L. Gross, *Measurable functions on Hilbert space,* Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 372-390.

[6] L. Gross, *Abstract Wiener space,* Proc. 5th. Berkeley sym. Math. Stat. Prob. 2(1965), 31-42.

[7] L. Gross, *Abstract Wiener Measurable and Infinite Dimensional Potential Theory* , Lecture Notes in Math. 140(1970), 84-116.

[8] S. Kwapien and B Szymanski, *Some remarks on Gaussian measure in Banach spaces,* Probab.Math Satis. Vol.1(1980), 59-65.

[9] H.H. Kuo, *Gaussian Measures in Banach Spaces,* Lecture.Notes in Math.463, 1975.

[10] K. Harai, *Measurable norms and Related conditions in some examples,* Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. vol.54 No.1.(2003), 1-7.

[11] K. Harai, *The correction of "Measurable norms and Related conditions in some examples"*, Natur. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. vol.54 No.2.(2003), 11.

[12] W. Linde, *Probability in Banach space-stable and infinitely Divisible Distribution,*

[13] M. Maeda, *Measurable norms and rotationally quasi-invariant cylindrical measures,* Hokkaido. Math. J. Vol.XXI No.1(1983), 14-25.

[14] M. Maeda, *Rotationally invariant cylindrical measures I,* Kodai. Math. J. 6(1983), 12-25.

[15] M. Maeda, *Some examples of measurable norms,* J. Math. Anal. Appl. 98(1984),158-165.

[16] M. Maeda, *Generalized rotationally quasi-invariant cylindrical measures,* J. Math. Anal. Appl. 114(1986), 100-110.

[17] M. Maeda, K. Harai and R. Hagihara, *Some examples and connection between cylindrical measures and measurable norms,* J. Math. Anal. Appl.288(2003), 556-564.

[18] M. Maeda, K. Harai and M. Shibuya, *Some remarks on seven conditions approximating to measurable norms,* Sci. Math. Jpn. 59, No.3(2004), 495-504.

[19] R.A. Minlos, *Generalized random processes and their extension in measure,* Trudy. Moskov. Math. obšč. 8(1959),497-518.

[20] Yu.V. Prokhorov, *Convergence for random processes and limit theorems in Probability theory,* Teor. Veroj. i prim. 1(1956),177-238.

[21] Yu.V. Prokhorov, *The method of characteristic functionals,* Proc. 4th. Berkeley sym. Math Stat. Prob. (1961), 403-419.

[22] V.V. Sazonov, *A remark on characteristic functionals,* Teor. Veroj. i prim. 3(1958), 201-205.

[23] L. Schwartz, *Radon measures on arbitrary topological space and cylindrical measures,* 1973.

[24] L. Schwartz, *Geometry and probability in Banach spaces,* Lecture Notes in Math. 852, 1981.

[25] V.I. Tarieladze, *On nuclear covariance operator,* Lecture Notes in Math.828, 1980.

[26] A. Takizawa, *The comparsion between Kuo's definition and Baxendale's on Gauss cylindrical measures,* Master thesis in Japanese, 2004.

[27] Y. Yamasaki, *Measures on infinite dimensional spaces,* Kinokuniya, 1978, in Japanese.

[28] J.A. Yan, *Generalizations of Gross' and Minlos' Theorems,* Lecture Notes in Math.1372, Springer-Verlag, Berlin,(1989), 395-404.