数理解析研究所講究録
第1562巻2007年114-116

Some properties of an ideal based zero-divisor graph[1]

中部大学工学部　金光三男 (Mitsuo Kanemitsu)
College of Engineering, Chubu University

零因子グラフの一番最初の研究は, 1988年にI. Beckによって研究された可換環に付随した単純グラフの彩色数を中心とする研究であった. I.Beckは環の零元0も頂点の一つに入れて考察した. その後, 1999年にD.F. AndersonとP.S. Livingstonは, 0は除外してその他の零因子を頂点集合とした(I.Beckの意味の)零因子グラフの部分グラフ$\Gamma(R)$を考察した. その後2003年には, S.P. Redmondは可換環RのイデアルIを使用してイデアルによる零因子グラフ$\Gamma_I(R)$について研究した. イデアル$I=(0)$による零因子グラフは, D.F. Anderson達の定義した零因子グラフ$\Gamma(R)$に他ならない.

ここでは, 可換環Rを整数環の剰余環$\mathbf{Z}_n$の特別な場合のイデアル$I=(a)$による零因子グラフ$\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$についてこのグラフの固有多項式$f(\lambda,\mathbf{Z}_n,I)$の係数とグラフの2-マッチングの個数$n_M$や異なる4-サイクルの個数$n_C$との関連について具体例で述べる. また, $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$が2部グラフであるための特徴付けや, 超八面体グラフの異なる4-サイクルの個数などについても考察する.

定義 1 (I. Beck [2]). $\mathbf{Z}_n$の各元を頂点とし, 異なる2頂点の積が0のときその2頂点は辺で結ばれていると定義したグラフを**I.Beckによる零因子グラフ**といい$\Gamma_0(\mathbf{Z})$と書く.

定義 2 (D.F. Andersomm and P.S. Livingston [1]). 0以外の零因子全体の集合$Z(\mathbf{Z}_n)^*$を頂点集合とし, 異なる2頂点の積が0のとき辺で結ばれていると定義して出来るグラフを**零因子グラフ**といい, $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$と記す.

定義 3 (S.P. Redmond [5]). $\mathbf{Z}_n$のイデアルをIとする. 頂点集合は, $\mathbf{Z}_n-I$の元aで, $\mathbf{Z}_n-I$のある元bが存在して$ab\in I$となるとき, aを頂点とする. 異なる2頂点r,sに対して, $rs=0$のときrとsは辺で結ばれて

[1]This is a part of an abstract and details will be published elsewhere

いると定義したグラフを, **イデアル I による零因子グラフ**といい, $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ と記す.

距離 $d(x,y)$ は頂点 x から y への最短の道の長さとし, グラフ G の**直径** $\mathrm{diam}(G)$ とは, 異なる 2 頂点の距離の上限をいう. 1 点だけからなるグラフのときは, $\mathrm{diam}(G)=0$ とする.

また, グラフ G の**内周**とは, G における最短のサイクルの長さをいい, $\mathrm{gir}(G)$ と記す. サイクルが無いときは, $\mathrm{gir}(G)=\infty$ とする.

次に $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ が 2 部グラフであることを特徴付ける. このため, 補題を述べる.

補題 1. イデアル I による零因子グラフ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ に長さ 2 の道 $a-x-b$ が存在するとき, このグラフには長さ 4 のサイクルが存在するか, または $\{0,x\}$ が $\mathbf{Z}_n$ のイデアルである.

定理 2. $\mathbf{Z}_n$ の (0) でも素イデアルでもないイデアルを $I=(m)$ とする. このとき, $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ が 2 部グラフである必要十分条件は次の (i) 又は (ii) が成立することである. (i) $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ が星グラフ (ii) $\mathrm{gir}(\Gamma_I(\mathbf{Z}_n))=4$ であり且つ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_m)$ が 2 部グラフである.

[4] において, 2-マッチングの個数を求める式を述べた.

定理 3 (Y. Jin and M. Kanemitsu [4]). G が単純グラフで位数 n で次数列を $(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ とする. このとき, 2-マッチングの個数 n_M は次式で求めることができる.

$$n_M=\tfrac{1}{8}(\textstyle\sum_{i=1}^n d_i)^2-\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^n d_i^2+\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^n d_i.$$

次数 n のグラフ G の固有多項式を $f(\lambda,G)=\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+C_2\lambda^{n-2}+C_3\lambda^{n-3}+\cdots+C_1\lambda+C_0$ とする. よく知られているように, $C_1=0$ であり, $C_2=-$(グラフ G のサイズ). また $C_3=-$(三角形の個数の 2 倍), $C_4=n_M-2n_C$ であることも知られている (例えば, N.L. Biggs[3] など). この事実を使用して 4-サイクルの個数か固有多項式の係数 C_4 のどちらか一方が分かれば他方も分かる.

容易に分かるように, $n=pq$ (p,q は互いに異なる素数) の場合は, イデアルによる零因子グラフは, $I=(0)$ の場合である $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$, すなわち, 零因子グラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ しか存在しない. このときのグラフ $\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ は, 完全 2 部グラフ

$K_{p-1,q-1}$ となり, 固有多項式は, $f(\lambda, \Gamma(\mathbf{Z}_{pq})) = \lambda^{p+q-2} - (p-1)(q-1)\lambda^{p+q-4}$ であり, $n_M = \frac{1}{2}(p-1)(q-1)(pq-2p-2q+4), n_C = \frac{1}{4}(p-1)(q-1)(pq-2p-2q+4)$ となる.

例. $\mathbf{Z}_{12}$ のイデアルは 6 個ある. それは $(0), \mathbf{Z}_{12}$ 以外に, 2 個の素イデアルと $I_4 = (4), I_6 = (6)$ である. $\Gamma_{I_4}(\mathbf{Z}_{12})$ は完全グラフ K_3 であり, 固有多項式は $f(\lambda, \mathbf{Z}_{12}, I_4) = \lambda^3 - 3\lambda - 2$. また $\Gamma_{I_6}(\mathbf{Z}_{12})$ は完全 2 部グラフ $K_{2,4}$ である. この完全 2 部グラフの固有多項式は $f(\lambda, \mathbf{Z}_{12}, I_6) = \lambda^4 - 8\lambda^4$.

$\Gamma(\mathbf{Z}_n)$ の彩色数が 3 となる $n = 9p$ の場合を定理の形でまとめておこう.

定理 4. p は 3 でない素数とする. このとき, $\Gamma(\mathbf{Z}_{9p})$ の固有多項式 $f(\lambda, \Gamma(\mathbf{Z}_{9p})) = \lambda^{3p+5} - (12p-11)\lambda^{3p+3} - 6(p-1)\lambda^{3p+2} + 3(p-1)(14p-17)\lambda^{3p+1}$ である. また, $n_M = 12(p-1)(5p-7), n_C = (p-1)(18p-33)$.

超八面体グラフ H_s は, 完全グラフ K_{2s} から s 個の隣接していない辺を取り除いて作られるグラフで完全多部グラフ $K_{s,s,\cdots,s}$ である. 次数列は $((2s-2), (2s-2), \cdots, (2s-2))$ だから, $n_M = s(s-1)(2s^2-6s+5), n_C = \frac{1}{2}s(s-1)(4s^2-16s+17)$.

参考文献

[1] D.F.Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999), 434-447.

[2] I.Beck, Coloring of commutattive rings, *J. Algebra* **116**, 208-226

[3] N.L. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambrigde University Press, 1974.

[4] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with $\mathbf{Z}_n$ and theire characteristic polynomials, *to appear in Internationa J. of Applied Mathematics and Statistic.*

[5] S.P.Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Comm. Algebra* **31** (2003), 4425-4443.