数理解析研究所講究録
第 1564 巻 2007 年 58-60

The Isaacs corresponding blocks of finite groups

越谷 重夫（こしたに） 千葉大学 理学部
Shigeo Koshitani, Chiba University
e-mail koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp

これは Morton E. Harris (University of Illiois at Chicago, USA) との共同研究である [2].

2つの有限群の既約指標たちの集合の間の対応 (全単射) として, いわゆる Glauberman 対応と Isaacs 対応がよく知られている ([1], [4] 参照). (ただし, ここで単に指標と言えば, それは通常指標 ordinary character を意味することとする). これらはもちろん指標のレベルでの話であるが, 1999 年に発表された渡辺アツミ (熊本大学) による画期的かつ重要な結果 [7] により, これらが有限群のモジュラー表現における2つのブロックの間の対応の話となった.

以下次の記号を使う (ただし, いろいろな用語の詳しい正確な意味を知るためには, [5] を参照のこと).

$G :=$ 有限群,

$p :=$ 素数,

$(\mathcal{O}, \mathcal{K}, k)$ は G のすべての部分群に対して十分大きな, いわゆる分裂 p-モジュラー系,

つまり,

$\mathcal{O} :=$ 標数ゼロの完備離散付値環,

$\mathcal{K} := \mathcal{O}$ の商体,

$k := \mathcal{O}$ の剰余体　で標数が p のもの,

そして, $\mathcal{K}$ と k はどちらも G のすべての部分群に対しての分裂体になっている,

$|G| :=$ 群 G の位数,

$\mathfrak{A} := G$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(G)$ のある部分群で, 位数が互いに素, つまり $(|G|, |\mathfrak{A}|) = 1$ となっているもの,

$C := C_G(\mathfrak{A}) = G^{\mathfrak{A}}$,

$\mathrm{Irr}(G) := G$ の通常既約指標全体の集合,

$\mathrm{Irr}(G)^{\mathfrak{A}} := \mathrm{Irr}(G)$ の元で $\mathfrak{A}$ で固定されているものの全体,

つまり

$\mathrm{Irr}(G)^{\mathfrak{A}} := \{\chi \in \mathrm{Irr}(G) | \chi^{\alpha} = \chi, \forall \alpha \in \mathfrak{A}\}$

このとき, G.Glauberman [1] と I.M.Isaacs [4] は, 下記のような自然な対応 (全単射) が存在する (定義できる) ことを証明した.

$$\pi(G, \mathfrak{A}) : \mathrm{Irr}(G)^{\mathfrak{A}} \longrightarrow \mathrm{Irr}(G^{\mathfrak{A}})$$

特に, $\mathfrak{A}$ が可解群の時に, この対応 $\pi(G, \mathfrak{A})$ は Glauberman 対応と呼ばれ, それ以外の場合には (Feit-Thompson の定理により $|G|$ が奇数の場合を考えれば十分になるので), つまり $|G|$ が奇数の場合には Isaacs 対応 と呼ばれている. ちなみに, これらが同時に起こるとき, つまり $\mathfrak{A}$ が可解群で, $|G|$ が奇数の場合にはいったいどうなるのか, ということが心配になる訳であるが, 実はこの場合には, この 2 つの対応が一致していることがわかっているので、安心できる (T.R.Wolf [10]).

さて, 渡辺アツミによる重要な結果 [7] により上記の設定で以下のことが証明されている. ただし以下の記号を使う.

これまでの結果. A を G の p-ブロックで, 不足群 P を持つとし, そして $\mathrm{Irr}(A)$ で A に属する G の既約指標全体の集合を表すことにする. さらに, A は $\mathfrak{A}$-不変, また $P \subseteq G^{\mathfrak{A}}$ を満たしていると仮定する (これが L. Puig が呼ぶところの, いわゆる「Watanabe's situation」である). このとき次のことが成り立つ.

(i) (渡辺アツミ [7]) $\mathrm{Irr}(A) \subseteq \mathrm{Irr}(G)^{\mathfrak{A}}$.

(ii) (渡辺アツミ [7]) $\mathfrak{A}$ が可解群のときには $\{[\pi(G, \mathfrak{A})](\chi) | \chi \in \mathrm{Irr}(A)\} = \mathrm{Irr}(B)$ となる $G^{\mathfrak{A}}$ の p-ブロック B がただ一つ存在して, B は A と同じ不足群 P を持つ (この B は A の Glauberman-渡辺 対応子 と呼ばれている). その上 A と B の間には isotypies が存在する.

(iii) (堀本博 [3], 渡辺アツミ [8]) 特に $|G|$ が奇数の場合にも, (ii) と全く同様のことが成立する.

(iv) (渡辺アツミ [9]) (iii) の設定で, つまり Isaacs 対応の設定においては, 2 つのブロック代数 A と B は森田同値になっている.

定理 (M.E.Harris-越谷 [2]). 上記の設定でさらに $|G|$ が奇数の場合, つまり $\pi(G, \mathfrak{A})$ が Isaacs 対応の場合を考える. このとき, 次のような (A, B)-両側加群 M が存在する (すなわち, 上記 (iv) の "少しだけ" の精密化).

(1) M を右 $\mathcal{O}[G \times G^{\mathfrak{A}}]$-加群と考えたとき M は vertex ΔP を持ち, そして endo-permutation 右 $\mathcal{O}[\Delta P]$-加群である M の source が存在する. ここで, $\Delta P := \{(u, u) \in P \times P \,|\, u \in P\}$.

(2) Isaacs 対応 $\pi(G,\mathfrak{A}) : \mathrm{Irr}(A) \to \mathrm{Irr}(B)$ は M によって誘導されている．つまり，$\chi \in \mathrm{Irr}(A) \;\Rightarrow \chi \otimes_{\mathcal{K}G} (M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K})_{\mathcal{K}[G^{\mathfrak{A}}]} = [\pi(G,\mathfrak{A})](\chi)$.

追記. 今回ここで取り扱った Isaacs 対応ではなくて，もう一方の Glauberman 対応のにについてであるが，いわゆる Brauer 対応と Glauberman 対応を同時に扱おう，という　L. Puig による興味ある論文が最近発表された [6].

謝辞. 今回の研究集会「群論とその周辺」は大変興味深い講演が多く，非常に楽しめ，そして勉強になりました．研究代表者 千吉良 直紀さん，および副研究代表者 宮本雅彦さんの御二人に深く感謝したいと思います．

References

[1] G. Glauberman, Correspondence of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. **20** (1968), 1465–1488.

[2] M.E. Harris and S. Koshitani, An extension of Wabenabe's theorem for the Isaacs-Horimoto-Watanabe corresponding blocks, J. Algera **296** (2006), 96–109.

[3] H. Horimoto, On a correspondence between blocks of finite groups induced from the Isaacs character correspondence, Hokkaido Math. J. **30** (2001), 65–74.

[4] I.M. Isaacs, Characters of solvable and symplectic groups, Amer. J. Math. **95** (1973), 594–635.

[5] 永尾 汎–津島行男, 有限群の表現論, 裳華房, 1987.,

[6] L. Puig, On the Brauer-Glauberman correspondence, J. Algebra (2006), doi:10.1016/j.jalgebra.2006.02.041

[7] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, J. Algebra **216** (1999), 548–565.

[8] A. Watanabe, The Isaacs character correspondence and isotypies between blocks of finite groups, Advanced Studies in Pure Mathematics (Mathematical Society of Japan), **32** (2001), 437–448.

[9] A. Watanabe, Morita equivalence of Isaacs correspondence for blocks of finite groups, Arch. Math. **82** (2004), 488–494.

[10] T.R. Wolf, Character correspondences in solvable groups, Ill. J. Math. **22** (1978), 327–340.