数理解析研究所講究録
第 1565 巻 2007 年 179-189

変形量子化の表現に関する問題について

濱地賢太郎 (Kentaro HAMACHI)
京都産業大学 理学部 物理科学科
Department of Physics, Kyoto Sangyo Univerity
hamachi@cc.kyoto-su.ac.jp

概要

Dirac 流に古典論を量子化する方法の一つである変形量子化について, その一般的性質と問題点について述べる. 特に, 表現論に関する現状についてのべ, その解決について探る.

目次

1 変形量子化とは

変形量子化 (deformation quantization) の概念は Bayen, Flato, Fronsdal, Lichnerowicz, and Sternheimer [1] によって与えられた, 量子化の手法の一つである. すなわち, 古典系として一般の symplectic 多様体や Poisson 多様体 M のハミルトン系をとり, 関数環 $C^\infty(M)$ 上に Dirac の対応原理を反映させた非可換の積を定義することでなされる量子化である.

以下で幾つかの基本的な定義と知られている性質を列挙する.

1.1 Poisson 環

良く知られているように, Hausdorff 空間上の連続関数環 と 可換 C^* 環とは一対一の対応が存在する. 言い換えると, 位相代数としての構造が, 位相空間上の関数空間の構造を定めているといってよい.

一方で, 力学系を記述するためには微分構造が必要であるが, そのためには可換環の構造に加えて, 一種の非可換な演算を導入–Poisson 括弧–することで実行することができる. Hamilton 系はこのような代数を用いて記述することができる.

Definition 1.1. 多様体 M に対して, $C^\infty(M)$ 上の *Poisson* 括弧とは, $C^\infty(M)$ 上の双線形写像 $\{\cdot,\cdot\}: C^\infty(M)\times C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ で

$$\{f,g\}=\{g,h\}$$
$$\{f,\{g,h\}\}+\{g,\{h,f\}\}+\{h,\{f,g\}\}=0$$
$$\{fg,h\}=f\{g,h\}+\{f,h\}g$$

を, 任意の $f,g,h\in C^\infty(M)$ に対して満たすもののことである.

一般に可換環 $\mathcal{A}$ で Poisson 括弧を持つものは Poisson 環と呼ばれる.

Example 1 (symplectic 多様体).

偶数次元多様体 M で, 非退化・閉 2 形式 $\omega=\omega_{ij}dx^idx^j$ が定義されている多様体を symplectic 多様体という.ω_{ij} の逆行列 ω^{ij} を用いて

$$\{f,g\}=\omega^{ij}\partial_if\partial_jg$$

とおけば, これは Poisson 括弧を定める. (Jacobi 恒等式は $d\omega=0$ から従う)

一般の多様体 N に対して, 余接バンドル T^*N は自然に symplectic 構造が定まることが知られている (N を配位空間, 余接ベクトルを運動量空間と対応させる).

最も基本的な symplectic 多様体としては, $M=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上で $\omega=dq_i\wedge dp^i$, $(q,p)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ と定められるものであり, 正準 Poisson 括弧 $\{q_i,p^j\}=\delta_i^j,\{q_i,q_j\}=\{p^i,p^j\}=0$ を与える.

Example 2 (Lie 環の双対空間上の Linear Poisson 構造).

実 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ 上には, linear Poisson 構造と呼ばれる Poisson 括弧が次のように定義される

$$\{f,g\}(\xi)=\langle\xi,[df,dg]\rangle,\quad f,g\in C^\infty(\mathfrak{g}^*),\xi\in\mathfrak{g}^*.$$

あるいは, ある $\mathfrak{g}$ の基底に関する $\mathfrak{g}^*$ の座標 ξ_i を用いて

$$\{f,g\}(\xi)=C_{ij}^k\frac{\partial f}{\partial\xi_i}\frac{\partial g}{\partial\xi_j}\xi_k$$

のように表される.一般に Linear Poisson 構造 は symplectic では無い. この構造は, Lie 群の対称性をもつ Hamilton 系の解析で中心的な役割を果たす.

1.2 変形量子化

Dirac の正準量子化は, 交換関係が正準変数の Poisson 括弧によって定められるような元で生成される代数を考え, その表現を構成するものと言ってよいだろう. 一般の Poisson 環については, 大域的な正準変数が定義できないので, 全く同様の方法で Dirac の正準量子化を適用する事はできない.

ここで問題をやや一般化 (抽象化?) して, Poisson 環 $\mathcal{A}$ が与えられたとき, その可換環の構造と Poisson 括弧の演算を併せ持つような, 非可換な結合代数を構成するということを考える. すなわち, 任意の $f,g\in C^\infty(M)$ に対し, あるパラメータ $\hbar$ を用いて

$$f*g=fg+o(\hbar)$$
$$f*g-g*f=i\hbar\{f,g\}+o(\hbar^2)$$

と表せるような積 $*$(star-product と呼ばれる) で, 結合的なものを定義するのである.

Definition 1.2. *$\mathcal{A}$ を Poisson 環とし, $\mathcal{A}$ を係数に持つ不定元 λ の形式的ベキ級数環を $\mathcal{A}[[\lambda]]=\{\sum_{0\le}f_i\lambda^i|f_i\in\mathcal{A}\}$ で表す. Poisson 環 $\mathcal{A}$ の変形, あるいは $\mathcal{A}$ の変形量子化とは, 結合代数 $(\mathcal{A}[[\lambda]],*)$ で以下の性質を満たすものをいう:*

1. λ は全ての元と $*$ 可換, すなわち $f\in\mathcal{A}$ に対して

$$\lambda*f=f*\lambda=f\lambda.$$

2. ある双微分演算子の族 $C_k(\cdot,\cdot):\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ が存在し, $f.g\in\mathcal{A}$ に対して

$$f*g=fg+\frac{1}{2}\{f,g\}\lambda+C_2(f,g)\lambda^2+\cdots+C_k(f,g)\lambda^k+\cdots$$

と表せる.

$\lambda=0$ とおけば, $*$ は通常の積にもどる. そこでこのような $*$ を一般に積の変形と呼んでいる. 特に $\hbar$ の 1 次が $\{\cdot,\cdot\}$ になっているものを, 変形量子化と呼ぶのである.

(可換環＋ Poisson 構造) から, 結合代数を構成するのが変形理論であるが, 逆に λ のベキで展開できるような積 $*$ で, $\lambda=0$ でもとの積に戻るようなものを考えれば,

$$P(f,g)=\frac{1}{\lambda}(f*g-g*f)|_{\lambda=0}$$

は自動的に Poisson 括弧の性質を満たすことが, 容易に示される. このことから, Poisson 括弧の変形を考えることと可換環の変形で得られるような結合積を考えることが自然に対応する.

Remark 1. このような積が存在する事は自明ではない. 最も障害になるのは結合法則である. $f*(g*h)=(f*g)*h$ を λ の各次数毎に比較すれば

$$\begin{aligned}fC_k(g,h)-C_k(fg,k)&+C_k(f,gh)+C_k(f,g)h\\&=\sum_{s=1}^{s=k-1}C_s(C_{k-s}(f,g),h)-C_s(f,C_{k-s}(g,h))\end{aligned}$$

を得る $(C_1=\{\cdot,\cdot\}/2$ とおいた$)$. 各 k について $C_s,(s<k)$ が既知であるとして, そこから C_k をこの条件を満たすように構成することの可否が問題となる. しかし, 幸いにして次のことが知られている.

Theorem 1.1 (Symplectic 多様体上の変形可能性 [5, 13, 6]). *任意の symplectic 多様体上に定義される Poisson 環は変形可能である. また, 各 C_k を微分演算子を用いて, Poisson 括弧から帰納的に構成できる.*

変形の同値性は次のように定められる.

Definition 1.3. *Poisson* 環 $\mathcal{A}$ の変形 $*,*'$ が形式的同値であるとは, $\mathcal{A}[[\lambda]]$ 上の形式的変換 $T=I+T_1\lambda^1+\cdots+T_k\lambda^k+\cdots$, T_k は $\mathcal{A}$ 上の線形変換, が存在し

$$T(f*g)=Tf*'Tg,\quad f,g\in\mathcal{A}$$

を満たすときをいう.

Theorem 1.2 (形式同値の分類 [12, 3]). *任意の symplectic 多様体 M 上の変形の形式同値類は, M の 2 次 de Rham コホモロジーを係数とする λ の形式ベキ級数全体で parametrize できる.*

Lie 群 G の作用を持つ Poisson 環 $\mathcal{A}$ に対して, G の作用と可換であるような変形の存在については, 以下のことが知られている.

Theorem 1.3. *G の作用を持つ symplectic 多様体 M 上の変形 $*$ で G-不変であるもの, すなわち*

$$a(f*g)=(af)*(ag),\quad f,g\in\mathcal{A},a\in G$$

が存在するための必要十分条件は, G-不変な symplectic connection が存在することである. また, そのような変形の G-不変な形式的同値類は, M の G-不変 2 次 de Rham コホモロジーを係数とする λ の形式ベキ級数全体で parametrize できる.

1.2.1 変形量子化の例

Example 3 (Moyal-(-Weyl) product). $(M=\mathbb{R}^2, \{q,p\}=1)$ 上の滑らかな関数 $u, v \in \mathbb{C}^\infty(M)$ に対し,

$$u * v = uv + \frac{\lambda}{2}\{u,v\} + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^k \{\cdot,\cdot\}^k(u,v) + \cdots$$

で定める, ここに $\{\cdot,\cdot\}^k$ は $\{\cdot,\cdot\}$ を双微分演算子としてベキをとったものである. これは q,p の多項式を正準交換関係を用いながら *Weyl* 順序に並び替えることによって得られるものになっている. u, v を q, p の多項式であれば和は有限で, 特に一次式の場合は,

$$q * p = qp + \frac{\lambda}{2}\{q,p\}(+0+\cdots) = qp + \frac{\lambda}{2}.$$

Example 4 (Fedosov type[6]). (M,ω) を任意の *symplectic* 多様体, Γ を *symplectic connection (i.e.* ω を不変にする *connection),* $\tilde{\omega}$ を任意の ω の摂動 *(i.e.* $\tilde{\omega} = \omega + \lambda\omega_1 + \cdots \in \Lambda^2(M)[[\lambda]]$, $d\tilde{\omega}=0$*)* とする. *Fedosov construction[6]* によって, 局所正準座標系に定義される局所 *Moyal product* を, 大域的に張り合わせたような変形量子化 $*$ を M 上に構成することができる. 更に, (殆ど) 任意の M 上の変形は, *Fedosov construction* で得られる.

また, M が *Lie* 群 G の作用を持つとき, $\tilde{\omega}, \Gamma$ が G-不変であれば, $*$ は G-不変となる.

symplectic 多様体でない Poisson 多様体の変形としての代表は以下のものである

Example 5 (Gutt product[9]). 実 *Lie* 環 $\mathfrak{g}$ に対して, $M = \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^n$ とおくと *(2)* で定められる *Poisson* 環が得られる. この環の変形の例として, *Gutt product* は以下のように定められる. まず $\mathfrak{g}$ の *universal envelopping algebra* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ の構造を以下の可換図式によって $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式 $poly(\mathfrak{g}^*)$ に誘導する.

$$\begin{array}{ccc}
poly(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]] \otimes poly(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]] & \xrightarrow{*_G} & poly(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]] \\
{\scriptstyle W\otimes W}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle W\,(Weyl\ ordering)} \\
\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda) \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda) & \longrightarrow & \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda)
\end{array}$$

($\mathfrak{g}_\lambda$ = deformed Lie alg.$[x,y]_\lambda = \lambda[x,y]$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_\lambda)$ = univ.env.alg).

得られた $\mathfrak{g}^*$ 上の多項式の変形が微分演算子で表せることが証明できるので, 任意の滑らかな関数に対して定義される.

とくに $\mathfrak{g}^*$ 上の一次関数 u, v に対しては

$$u * v = uv + \tfrac{\lambda}{2}\{u,v\}.$$

が成り立っている.

最後の example である Gutt product はやや特殊な感じがするが, 実は以下のことがわかっていて, Lie 群対称性を持つ変形量子化の構造に大きな影響を与えているものである.

Theorem 1.4 (推移的 G 作用を持つ変形量子化の構造定理, [10, 11]). *G を compact semisimple Lie 群とする. G-推移的な作用を持つ symplectic 多様体 M の変形量子化 $*$ に対し, ある定数 $c_{*,j} = c_{0,j} + c_{1,j}\lambda + \cdots$ が存在して*

$$(C^\infty(M)[[\lambda]], *) \cong (C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]], *_G)/\langle p_j - c_{*,j}\rangle$$

が成り立つ. ここに p_j は $\mathfrak{g}$ の Casimir 多項式である.

2 表現論 ··· 変形量子化における未解決テーマ

変形量子化はDiracによる,「初めにq数ありき」「特定の表示に依存しないsymbolic method」という量子力学の思想のかなりの部分を実現したといえる.

また, 前節で紹介したように, 全てのsymplectic多様体について変形量子化の存在の保障や分類が完了しているので, たとえば, 曲がった空間での量子力学の議論する舞台が整ったようにも思える.

しかし, 現状はそれほど単純ではない. 量子力学として予言能力を持つためには, 興味の対象になっている観測可能量を表す代数の元に対しその固有値を求めることや, ある用意された状態が時間発展や観測の結果, どの様に変化したのかを数値化する必要がある. つまり, 量子力学は対象をq数で記述しておきながら, データの入出力についてはc数で記述しなければならない.

非常に荒っぽい言い方かも知れないが, 現在一般に通用している「量子力学」では, この要請を代数の表現を構成することで達成している. もちろん固有値に関しては, Banach代数のようにノルムを持つ代数であれば, 表現を持たずとも定義はできる. が, そもそもノルムを持つような代数はその全ての表現を併せ持つようなものなので, 間接的に表現を通じて定義されているといえるだろう.

同様の理由で, 変形量子化で量子力学を議論するには, その表現論が必要であると考えるのは自然である. しかしながら, 現在のところ誰もが満足できる理論は完成していないように思われる.

2.1 変形量子化を C^* 代数化すること

Poisson環 $\mathcal{A}$ の変形量子化 $(\mathcal{A}[[\lambda]], *)$ を C^* 代数にするようなノルムを定義できれば, C^* 代数の一般的枠組みで表現を議論できるが, 以下のような困難があって, 現在のところうまくいってないようである.

1. 関数空間 $C^\infty(M)[[\lambda]]$ に自然に備わる位相 (Fréchet 位相) は, $*$ に関する積ノルムと同値にはなりえない. よって, 全く別の方法で位相を導入する必要がある.
2. C^* 代数において,「ノルム=固有値の絶対値の最大値」が成り立つので, 固有値の定義を先にすることを考えてみる. しかし, 代数的なspectrumの定義
$$sp(a) = \{\mu \in \mathbb{C} | (a - \mu I)^{-1} \text{が存在しない}\}$$
は, $*$ ではうまく働かない. なぜなら, 形式的ベキ級数においては
$$a = a_0 + a_1\lambda + \cdots \in \mathcal{A}[[\lambda]] \text{ が } *\text{-可逆} \iff a_0 \text{が関数の積で可逆}$$
であるので, $a \in \mathcal{A}$ のspectrumは a_0 の値域と等しくなってしまう. つまり, $*$ の非可換性がまったく反映しないノルムが定まってしまい, 結果可換関数環と同じ事になってしまう.
3. これまで知られている具体的な C^* 代数の例にならった形を, 直接利用することが困難.

2.2 G.N.S. 構成法を援用してみる

非可換代数に直接積ノルムを入れることは難しいようなので, 直接表現を構成することを考えてみる. そこで, 代数的に表現を構成する手法の一つであるG.N.S.構成法を援用することを考えてみる.

Theorem 2.1 (G.N.S. 構成法). $\mathfrak{A}$ を $*$-代数 *(i.e. involution* $*$ *を持つ)* とし φ を $\mathcal{A}$ の正の汎関数とする. このとき $N=\{a\in\mathfrak{A}|\varphi(a^*a)=0\}$ は $\mathfrak{A}$ のイデアルで $\mathcal{H}_0=\mathfrak{A}/N$ 上で $\varphi(a^*b)$ は内積を定めこれを完備化した *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上に $a\in\mathfrak{A}$ は $\pi(a)(b+N)=ab+N$ で表現される.

一見この定理は純代数的に定式化されているように見えるので, 変形量子化についても適用可能に思えるのだが, 実は「正の汎関数 φ」のところが曲者である. この言葉を定義するためには, 「$\mathfrak{A}$ の正の元とはなにか？」に答えなければならない.

C^* 代数などでは, 正の元は spectrum が正数に含まれる, あるいは $a^*a,(a\in\mathfrak{A})$ の形の元, のように定式化されるから, spectrum が定義されない代数においては a^*a の形を正と定めたい.

しかし問題はこの形の元が錐をなすことを $\mathfrak{A}$ が C^* 代数でないとき一般に証明することができないことである. 錐構造は, 「正の汎関数」を well-defined するためには欠かせない要素であるから, このように正の元を定めることはできない.

よって G.N.S. 構成法を適用させたければ, まず代数に正錐構造あるいは partially ordered vector space の構造を, 代数に定めておかなければならない. これは殆ど, 積ノルムを導入することに等しい作業と思われる.

Remark 2. 正の汎関数の定義を「形式的に正」という形で定め, λ の形式ベキ級数に値を持つような *G.N.S.* 構成を行ったものがある *[4]*. ただし, これを「本当の実数」に値を持つような表現論にすることはやはり難しいようである.

2.3 何が障害なのか？

spectrum について述べたように, 変形量子化における問題点の一つは, 代数の元が形式的ベキ級数であるゆえ, 収束性の問題が発生せず, その結果可逆元のクラスが「多すぎる」故, 変形量子化によって変化しないことである.

これは代数の元として, 形式ベキ級数全体を考えるのではなく, λ が適当な値を獲得したとき収束するような適当な部分代数を選ぶべきであることを示唆しているように思われる.

実際, 最も単純な Moyal product の場合は, $\lambda=i\hbar$ と「代入」することで $i\hbar$ の高次項の評価が可能で, 通常の量子力学と等価な表現論に帰着させることができる.

しかしながら, 一般の Poisson 環の変形に関しては, λ に特定の値を代入させた場合の収束判定は非常に困難であるから, 単純に λ の数値化は取り扱いにくい理論となりそうである.

3 群 C^* 代数と Gutt product の類似性について

一般に変形量子化と C^*-代数とは, あまり似ていない対象であるので, 類似性を持って表現論を議論することはあまり意味がないのであるが, Lie 環 $\mathfrak{g}$ の Poisonn 環の変形である Gutt product $*_G$ は, 群 G の群 C^* 代数とある種の類似性がある.

3.1 Gutt product の Fourier 変換表示

$X\in\mathfrak{g}$ に対して, $e^X\in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ を

$$e^X(\xi)=e^{\langle\xi,X\rangle},\quad \xi\in\mathfrak{g}^*$$

とおく.Gutt product の定義より

$$
\begin{aligned}
(e^X *_G e^Y)(\xi) &= e^{\mathrm{CH}_\lambda(X,Y)}(\xi) \\
&= e^{X+Y}(\xi)(\sum_I P_I(X,Y,\lambda)\xi^I)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここに CH_λ は $[X,Y]_\lambda = \lambda[X,Y]$ に関する Campbell-Hausdorff 多項式であり, $P_0 = 1$, $P_I(X,Y,\lambda)$ は X,Y,λ の多項式である.

これから, 以下の様な Gutt product の Fourier 変換表示

$$
\begin{aligned}
u *_G v(\xi) &= \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \hat{u}(X)\hat{v}(Y)(e^{iX} *_G e^{iY})(\xi)dXdY \\
&= \int_{\mathfrak{g}} (u *_G v)^\wedge(X)e^{iX}(\xi)dX
\end{aligned}
$$

は, 次のような表示を持つ

$$
\begin{aligned}
(\hat{u} * \hat{v})(X) &= \int_{\mathfrak{g}^*} (u *_G v)(\xi)e^{-i\langle X,\xi\rangle}d\xi \\
&= \int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \hat{u}(Z)\hat{v}(Y)e^{i\langle Z+Y-X,\xi\rangle}(P_I(Z,Y,\lambda)\xi^I)dZdYd\xi \\
&= \int_{\mathfrak{g}} \sum_I (i\partial X)^I \left(P_I(X-Y,Y,\lambda)\hat{u}(X-Y)\hat{v}(Y)\right) dY.
\end{aligned}
$$

特に, λ^0 の項は通常の convolution, λ^1 の項は Poisson 括弧の Fourier 変換に等しい.

3.2 群 G の convolution 積の表現の $\mathfrak{g}$ 表示

Lie 群 G の convolution 積を, $\mathfrak{g}$ 上の関数の積として表示することを考える. もちろん G と $\mathfrak{g}$ は局所的にだけ微分同相であるので, 積が定義できるのはその台が十分小さな関数に対してだけである.

G を実 Lie 群, $\mathfrak{g}$ をその Lie 環, dx を G の Haar 速度, $(\pi,\mathcal{H})$ を G のユニタリ表現とする.

任意の $\phi \in L^1(G)$ に対して

$$
\pi(\phi) := \int_G \phi(x)U(x)dx, \quad \text{(operator Fourier tr. of } \phi).
$$

とおけば, π は convolution 代数 $(L^1(G),\star)$ の表現となる：

$$
\begin{aligned}
\pi(\phi)\pi(\psi) &= \int_{G\times G} \phi(x)\psi(y)U(x)U(y)dxdy \\
&= \int_G \left(\int_G \phi(xy^{-1})\psi(y)dy\right) U(x)dx \\
&= \pi(\phi\star\psi).
\end{aligned}
$$

ϕ の台が十分小さいとき, この表示に, 局所微分同相 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ を代入することができて

$$
\begin{aligned}
\pi(\phi) &= \int_{\mathfrak{g}} \phi(\exp X)U(\exp X)d(\exp X) \\
&= \int_{\mathfrak{g}} \Phi(X)U(\exp X)dX.
\end{aligned}
$$

と書くことができる. ここで $\Phi(X)dX = \phi(expX)d(expX)$ とおいた.
そして CH が収束する範囲で

$$\pi(\phi)\pi(\psi) = \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \Phi(X)\Psi(Y)U(\exp X)U(\exp Y)dXdY$$
$$= \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \Phi(X-Y)\Psi(Y)U(\exp \mathrm{CH}(X-Y,Y))dYdX$$
$$= \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \Phi(X-Y)\Psi(Y)U(\exp X(\sum_I P_I(X-Y,Y,\lambda=1)\xi^I)dXdY$$
$$= \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \sum_I (i\partial X)^I \left(P_I(X-Y,Y,1)\Phi(X-Y)\Psi(Y)\right) dYU(\exp X)dX$$

が成立するので, この右辺を

$$\int_{\mathfrak{g}} \Phi\star\Psi(X)U(\exp X)dX.$$

の様において, $\Phi, \Psi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ の convolution product と定義する. この積は, 台が十分小さな関数の間でしか定義されない. よって $C^\infty(\mathfrak{g})$ 全体を代数として定義することはできない.

3.3 Gutt produtct と convolution の比較

Gutt product の Fourier 変換表示と $C^\infty(\mathfrak{g})$ の convolution product を比較してみると

$$(\hat{u}*\hat{v})(X) = \int_{\mathfrak{g}} \sum_I (i\partial X)^I \left(P_I(X-Y,Y,\lambda)\hat{u}(X-Y)\hat{v}(Y)\right) dY$$

$$(\Phi\star\Psi)(X) = \int_{\mathfrak{g}} \sum_I (i\partial X)^I \left(P_I(X-Y,Y,1)\Phi(X-Y)\Psi(Y)\right) dY,$$

であり, ちょうど Gutt product の Fourier 変換表示で $\lambda = 1$ とおいたものと同じ形になっていることがわかる.

Gutt product では $\lambda = 1$ とおいてしまうと, 対応する級数の収束がよくわからなくなってしまう. 一方 convolution の観点からは, $C^\infty(\mathfrak{g})$ 全体としては結合則が成り立たなくなってしまうが, 積が定義できるような部分が確かに存在することはわかる.

Example 6 (Heisenberg Lie 環). この環はベキ零 *Lie* 環であるから, *CH* はいつも収束し, かつ G と $\mathfrak{g}$ は微分同相となっている. よって上記の対応は $C^\infty(\mathfrak{g})$ で考えることができ $CH_\lambda((q_1,p_1),(q_2,p_2)) = (q_1+q_2, p_1+p_2) + \lambda(q_1p_2 - q_2p_1)1$ となることから, *convolution* は

$$\Phi\star\Psi(Q,P) = \int_{\mathbb{R}^2} \Phi(Q-X, P-Y)\Psi(X,Y)e^{\lambda(QY-PX)}dXdY$$

の様に書ける. とくに $\lambda = i\hbar$, $\hbar \in \mathbb{R}$ と置いたものは *"twisted convolution"* と呼ばれるものになり, この代数は C^*-代数化できることが知られている.

4 変形量子化の表現の例（未完）

4.1 都合のいい定義

前節で作り上げた対応を手がかりにして, G のユニタリ表現から $*_G$ の表現を誘導することができないか考えてみたい. 以下の様な問題点がある：

1. convolution $\star$ の定義は局所的であり, 一般に $C^\infty(\mathfrak{g})$ 全体に定義域を広げる事はできない.
2. $*_G$ の Fourier 変換表示に, 単純な代入 $\lambda = 1$ をすることは, 判定が難しい収束性の問題を引き起こす.

これらの問題を回避しながら表現を定義するために, 以下の様な「都合のいい」$*_G$ の表現を定義を提案してみる：

G のユニタリ表現 $(\pi, \mathcal{H})$ が与えられたとき, $u(\xi) = e^{iX}(\xi), (X \in \mathfrak{g})$ に対しては

$$\pi(e^{iX}) = \pi(\exp iX),$$

そして

$$\pi(e^{iX} *_G e^{iY}) = \pi(\exp iX)\pi(\exp iY).$$

と「定義」し, $u(\xi) \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ でその Fourier 変換 $\hat{u}$ が compact な台を持つとき

$$\pi(u) = \int_{\mathfrak{g}} \hat{u}\pi(\exp iX)dX.$$

の様に定義する. こうすれば π は

$$\begin{aligned}\pi(u *_G v) &= \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \hat{u}(X)\hat{v}(Y)\pi(e^{iX} *_G e^{iY})dXdY \\ &= \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \hat{u}(X)\hat{v}(Y)\pi(\exp iX)\pi(\exp iY)dXdY \\ &= \pi(u)\pi(v).\end{aligned}$$

を満たす事になる.

4.2 この定義で何が起こっているのか？

Example 7. $\mathfrak{g}$ を *Heisenberg Lie* 環とし π をその既約表現とする *(CCR)*. このとき, 表現の「定義」$\pi(e^{iX} *_G e^{iY}) = \pi(\exp iX)\pi(\exp iY)$ は

$$\pi(e^{i(X+Y)}e^{-\frac{\lambda(X_qY_p - Y_qX_p)}{2}}) = e^{-i\frac{(X_qY_p - Y_qX_p)}{2}}\pi(\exp(X+Y)).$$

を意味する. これは λ が

$$e^{-\frac{\lambda}{2}(X_qY_p - Y_qX_p)} = e^{-i\frac{1}{2}(X_qY_p - Y_qX_p)}$$

, すなわち $\lambda = i$ を満たすように「固定」されなければならないことを示唆しているように見える. そして, *Heisenberg Lie* 環の変形量子化の表現は, 単純に $\lambda = i$ を代入し, *CCR* の表現を用いる事で得られる.

Example 8. G を *compact semisimple Lie* 群 $\mathfrak{g}$ をその *Lie* 環とし, π を G の表現とする. このとき $CH_\lambda(X,Y)$ は λ の無限級数で X,Y が十分小さいときのみ収束する. このとき, 条件 $\pi(e^{iX} *_G e^{iY}) = \pi(\exp X)\pi(\exp Y)$ は, 次の条件を満たす Z 存在を意味する：

$$\pi(e^{i(X+Y)}(\sum_I P_I(iX,iY,\lambda)\xi^I)) = \pi(e^{iZ}).$$

これは $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\lambda]]$ に π を法とした同値関係

$$e^{i(X+Y)}(\sum_I P_I(iX,iY,\lambda)\xi^I) \cong e^{iZ}$$

を導入していることを示唆する. 特に X,Y が十分小さなときは, この同値関係は単純に $\lambda = 1$ とおいて $iZ = CH(iX,iY)$ となる. つまり大局的に λ を数値として定めることはできないが, ある特別な局面では固定できるような同値関係が定められていると考えられるのである.

4.3 解釈

「都合のいい」表現の存在を仮定することで, 変形量子化の代数の中である種の同値関係を定めることになるようである. とくに, 特別な局面においては 変形のパラメータ λ を数値として定めるような形になって現れる.

このことは, 変形量子化の代数が, 「表現に引っかからない」自由度あるいは重複度を持っているため, 自然な表現を得るためにはその自由度を「固定」する必要があるということを示唆しているように思われる. これは場の量子論において, ゲージ変換群が「固定」されないと意味のある表現を得ることができないこととの類似性を想起させる.

しかしながら, 現状では状況証拠のようなものしか得られておらず, 更なる分析が必要と思われる.

参考文献

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization, I and II. Ann. Physics, **111** (1978), 61–151.

[2] M. Bertelson, P. Bieliavsky, and S. Gutt, Parametrizing equivalence classes of invariant star products. Lett. Math. Phys., **46** (1998), 339–345.

[3] M. Bertelson, M. Cahen, and S. Gutt, Equivalence of star products. Class. Quantum Gravity, **14** (1997), A93–A107.

[4] M. Bordemann, S. Waldmann, Formal GNS Construction and States in Deformation Quantization. Commun. Math. Phys., **195** (1998), 549–583

[5] M. De Wilde and P. Lecomte, Existence of star-products and of formal deformations of Poisson Lie algebra of arbitrary symplectic manifolds. Lett. Mathe. Phys., **7** (1983), 487–496.

[6] B. Fedosov, A simple geometrical construction of deformation quantization. J. Differential Geom., **40** (1994), 213–238.

[7] B. Fedosov, Deformation quantization and index theory. In: *Mathematical Topics* **9**. Akademie Verlag, 1996.

[8] B. Fedosov, Non-abelian reduction in deformation quantization. Lett. Math. Phys., **43** (1998), 137–154.

[9] S. Gutt, An explicit $*$-product on the cotangent bundle to a Lie group. Lett. Math. Phys., **7** (1983), 249–258.

[10] K. Hamachi, Quantum moment maps and invariants for G-invariant star products. Rev. Math. Phys., **14** (2002), 601–621.

[11] K. Hamachi, Differentiability of quantum moment maps and G-invariant star products. Pac. J. Math. , **216** (2004), 127–148.

[12] R.Nest and B.Tsygan, Algebraic index theorem for families. *Advances in Math*, 113:151–205, 1995.

[13] H. Omori, Y. Maeda, and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization. Adv. Math, **85** (1991), 224–255.

[14] A. Weinstein, The local structure of Poisson manifolds. J. Differential Geom., **18** (1983), 523–557.