

熱伝導逆問題の初期値問題に関連する数値計算

徳島大学大学院ソシオテクノサイエンス研究部 今井 仁司 (Hitoshi Imai)

Institute of Technology and Science, University of Tokushima

徳島大学大学院ソシオテクノサイエンス研究部 坂口 秀雄 (Hideo Sakaguchi)

Institute of Technology and Science, University of Tokushima

1 はじめに

解析接続は基本的で教科書的なものである。この解析接続に関する実用的な応用例が逆問題に関連して研究されてきた [3, 11]。そこでは、ラプラス方程式のコーシー問題の解の接続が考えられている。

本論文では、熱伝導逆問題に対する解の接続問題とそれに関連した問題を取りあげる。2つのパラメータ T と ε を含む次の簡単な問題を考える。

問題 1 2つのパラメータ $T \in [-1, 1]$ と ε に対して、次を満たす $u(t, x)$ を求めよ。

$$u_t = -u_{xx}, \quad -1 < t < 1, \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

$$u(0, x) = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad -1 < x < 1, \quad (2)$$

$$u(t, -1) = 0, \quad -1 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(t, 1) = \varepsilon(t+1), \quad -1 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$u_t(t, \pm 1) = -u_{xx}(t, \pm 1), \quad T < t < 1. \quad (5)$$

注意 問題 1 はパラメータ T の値によって様々な問題になる。

$$\begin{cases} T = 1 & \dots \text{初期値境界値問題,} \\ -1 < T < 1 & \dots \text{解の接続問題,} \\ T = -1 & \dots \text{初期値問題.} \end{cases}$$

我々は、通常の熱伝導方程式に関する同様の問題に対して興味深い数値計算結果を得ている [5]。本論文では、方程式を熱伝導逆問題 (1) に置き換えて解析する。問題 1 の $T = 1$, $\varepsilon = 0$ のときの厳密解は

$$u(t, x) = \exp\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2(t+1)\right) \cos \frac{\pi}{2} x \quad (6)$$

であり、そのグラフは Fig. 1 のようになる。

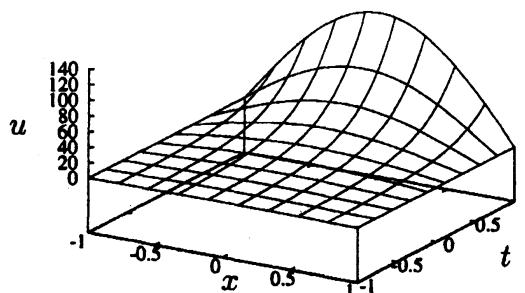
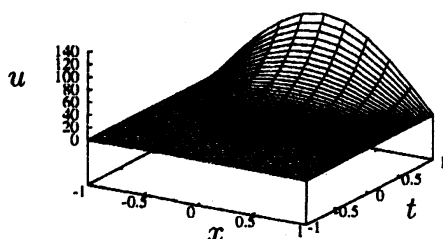
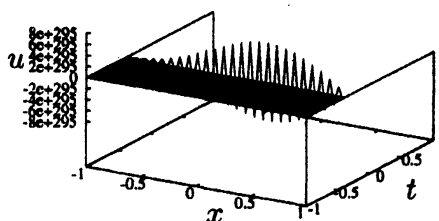


Fig. 1. $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの厳密解のグラフ.

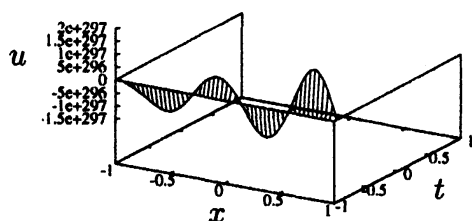
我々は、方程式 (1) に対して直接数値計算を行ってきた [6, 9, 10]. 数値誤差が指数関数的に増加するため、簡単な離散化法 (FDM $\oplus$ EE)(空間：2次差分法, 時間：1次陽的オイラー法) では安定に数値計算できない. この困難さを取り除くために、我々は無限精度数値計算法 (IPNS)[7]を開発した. この様子を Fig. 2 に見ることができる. Fig. 2 は、2つの手法 (FDM $\oplus$ EE と IPNS) における $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの問題 1 の数値計算結果である. IPNS が安定に計算できていることがわかる.



(a-1) $N_x = 10$

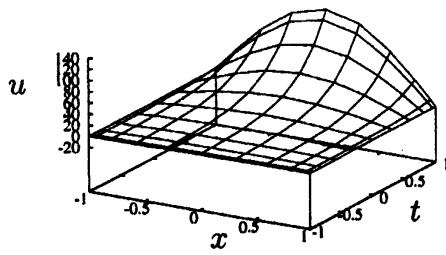
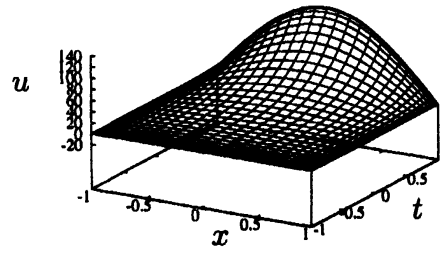
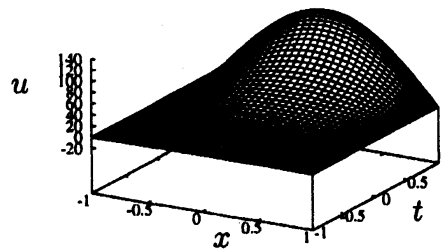
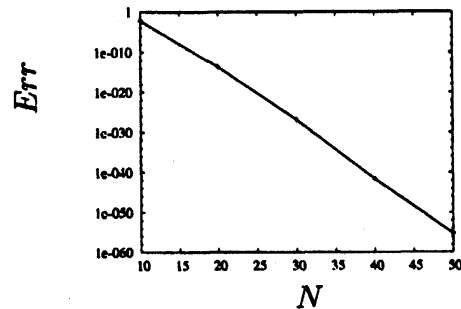


(a-2) $N_x = 50$



(a-3) $N_x = 200$

(a) 数値解のグラフ (FDM $\oplus$ EE)

(b-1) $N = 10$ (b-2) $N = 30$ (b-3) $N = 50$ 

(b-4) 最大誤差

(b) 数値解のグラフと誤差 (IPNS)

Fig. 2. 数値計算結果 ($T = 1$, $\varepsilon = 0$, 200digits).

通常の熱伝導方程式を $\text{FDM} \oplus \text{EE}$ で安定に計算するには、空間方向の分割数を N_x としたとき、 $\Delta x = 2/N_x$, $\Delta t = 0.2(\Delta x)^2$ とすればよい。この設定をここでも適用した。IPNS は、Chebyshev-Gauss-Lobatto 選点法 [1] と多倍長演算ライブラリ (exflib[2]) を用いた。時間方向、空間方向の近似次数をそれぞれ N_t , N_x で表し、数値計算では簡単のために $N = N_t = N_x$ とした。Fig. 2(b-4) にある最大誤差は次で定義する。

$$Err = \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq N-1} |u_{j,i} - u(t_j, x_i)|, \quad t_j = \cos \frac{j\pi}{N}, \quad x_i = \cos \frac{i\pi}{N}. \quad (7)$$

ここで、 $u_{j,i}$ と $u(t_j, x_i)$ は数値解と厳密解 (6) をそれぞれ表す。

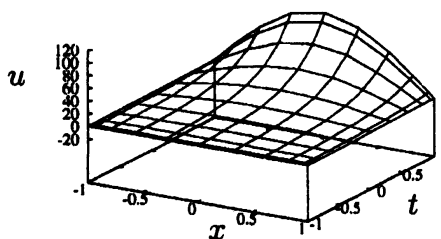
本論文では、パラメータ T , ε の様々な値に対して数値計算を行った。問題や数値計算法は単純であるにもかかわらず、興味深い数値計算結果が得られた。それは数値計算の新たな可能性を示唆するものである。

2 数値計算結果

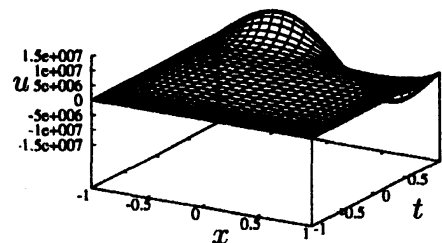
ここでは、問題 1 に対する様々な場合の数値計算結果について述べる。ただし、Fig. 2 と同様に FDM $\oplus$ EE は不安定で全く役に立たないので、その計算結果は省略する。IPNS に関しては Fig. 2 と同じ設定を用いる。

2.1 $T = 1, \varepsilon \neq 0$ の場合

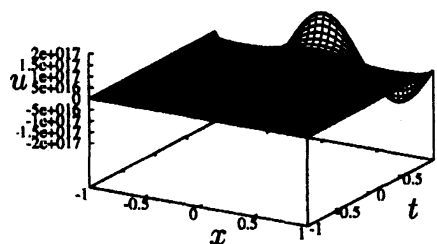
$T = 1, \varepsilon = 0$ のときには厳密解 (6) が存在する。そこでここでは、 $\varepsilon = 1, 10^{-10}$ として数値計算を行なった。この場合において厳密解が存在するかどうかはわかっていない。計算結果を Fig. 3 に示す。数値解が収束していないことがわかる。任意の $\varepsilon (\neq 0)$ で計算したわけではないが、我々の経験では、この計算結果は $\varepsilon \neq 0$ のときには解が存在しないことを示唆している。



(a-1) $N = 10$



(a-2) $N = 30$



(a-3) $N = 50$

(a) $\varepsilon = 1$

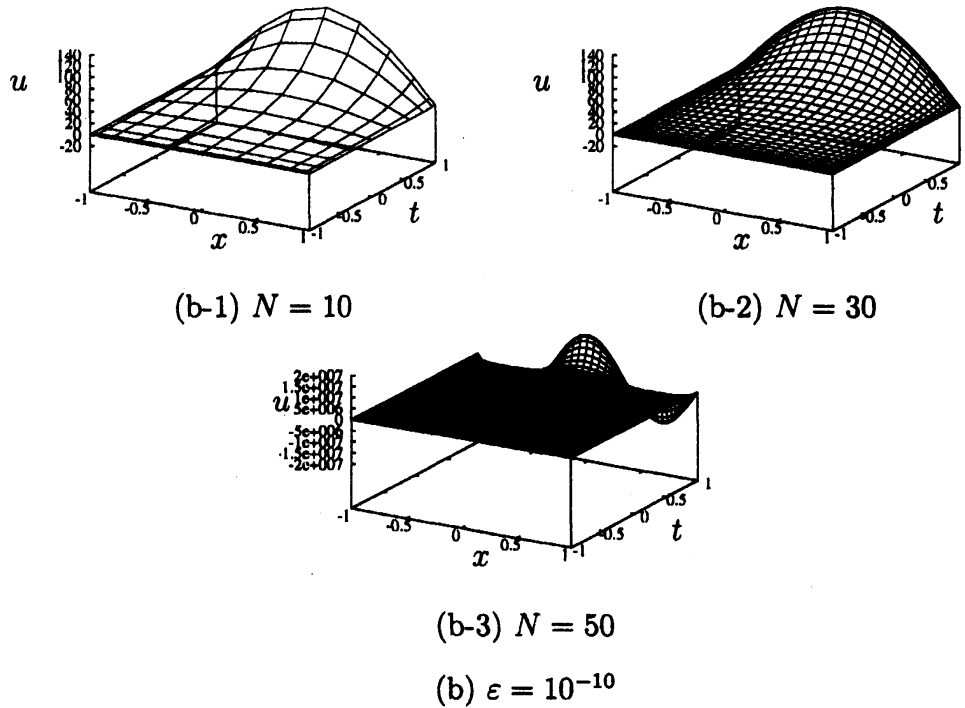


Fig. 3. 数値解のグラフ (IPNS, $T = 1$, 200digits).

我々は、当初、数値解が収束しない理由が $(t, x) = (-1, 1)$ において $u_t \neq -u_{xx}$ にあると考えた。そこで、境界条件 (4) を (11) で置き換えた次の問題で追加計算を行った。

問題 2 次を満たす $u(t, x)$ を求めよ。

$$u_t = -u_{xx}, \quad -1 < t < 1, \quad -1 < x < 1, \quad (8)$$

$$u(-1, x) = \cos \frac{\pi}{2} x, \quad -1 < x < 1, \quad (9)$$

$$u(t, -1) = 0, \quad -1 \leq t < 1, \quad (10)$$

$$u(t, 1) = \varepsilon(1 + \sin \frac{\pi}{2} t), \quad -1 \leq t < 1. \quad (11)$$

この問題では $(t, x) = (-1, 1)$ において $u_t = -u_{xx}$ となっている。数値計算結果を Fig. 4 に示す。

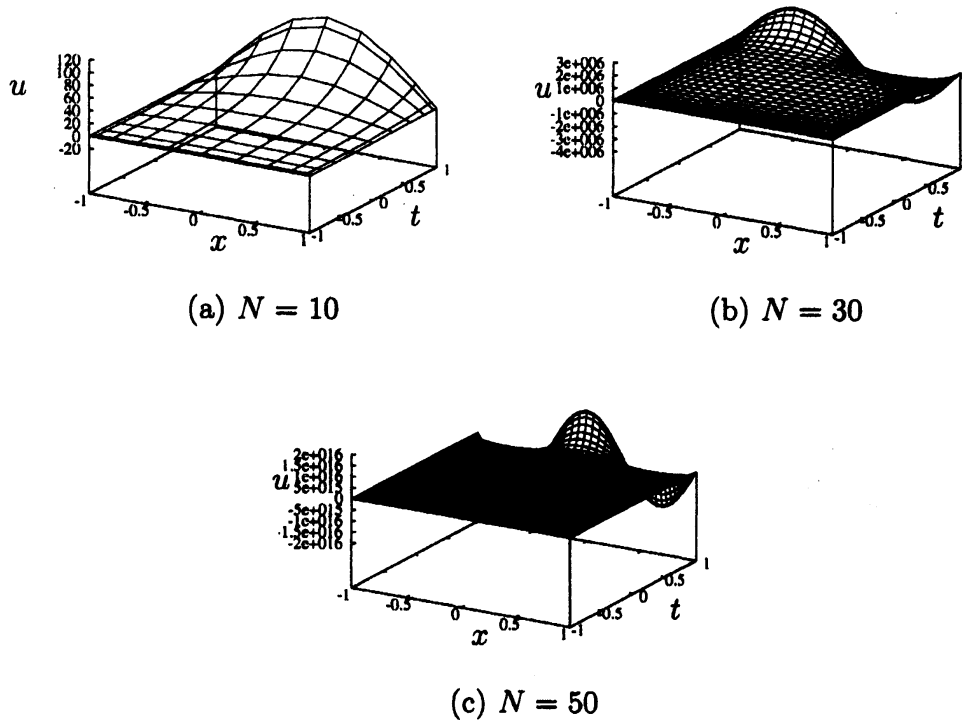


Fig. 4. 数値解のグラフ (IPNS, $\varepsilon = 1$, 200digits).

Fig. 4でも数値解は収束していない。問題2においても解が存在しないということを示唆している。これによって、当初の我々の考えが間違っていたことが判明したと同時に、より高度に数学的な理由があると考えられる。その理由は解の解析性と解の存在の関連していると思われる。実際、いくつかの問題では、解の存在は解の解析性を意味する。解が解析的ならば、IPNSはとても精度よくそれをとらえることができる。もし、このような状況の数値計算を行っているとするれば、数値解が収束しないという計算結果は解の非存在を示していることになる。

2.2 $T = 0, \varepsilon = 0$ の場合

この場合、問題1は解の接続問題になる。問題1の $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの厳密解 (6) がこの場合の厳密解になる。ただし、解の一意性が成立するかどうかはわからない。数値計算結果を Fig. 5 に示す。Fig. 5(d) の Err は (7) と同様である。数値解は問題1の $T = 1, \varepsilon = 0$ のときの厳密解 (6) に収束している。即ち、IPNSは一つの解析関数を厳密解としてとらえることに成功している。解が複数存在するとき、数値解法は最も滑らかな解を選択する傾向がある [4]。今の場合、解析関数 (6) が最も滑らかな解であるので、解の一意性がこの問題において保証されていなくても、IPNSは解として (6) をとらえたと考えられる。

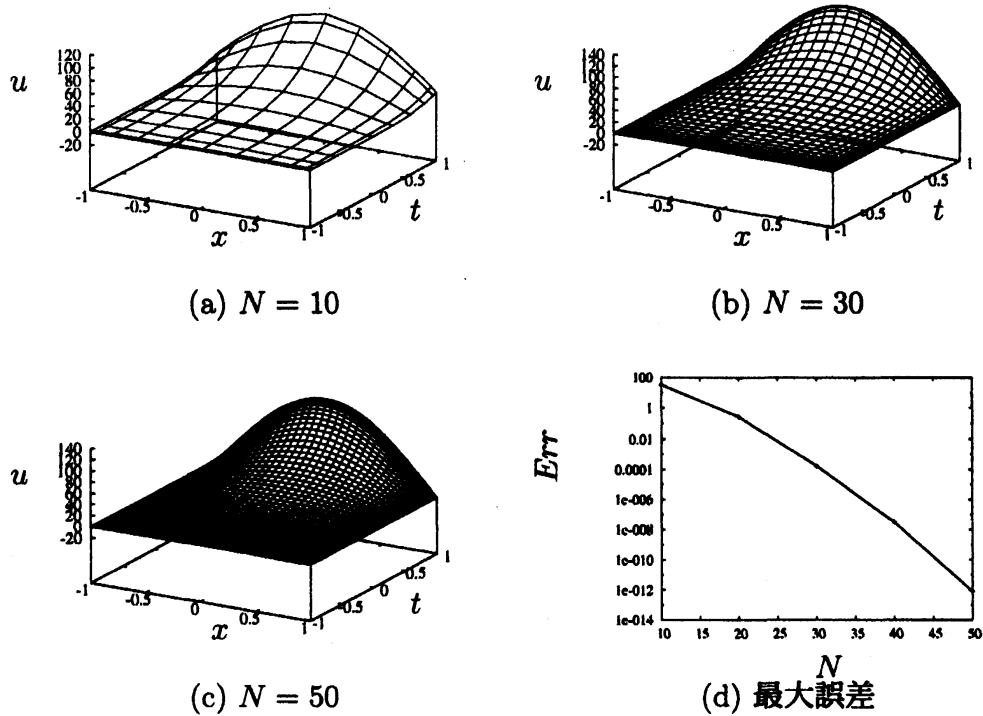
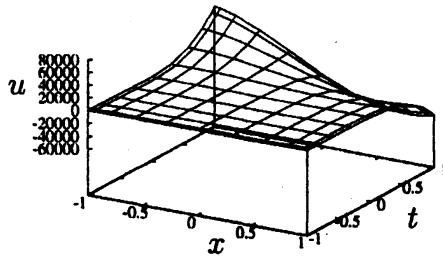
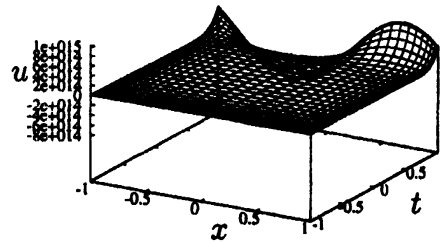
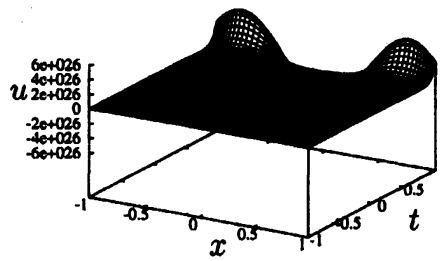
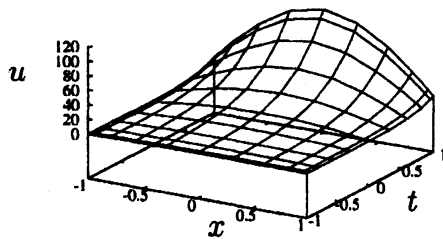
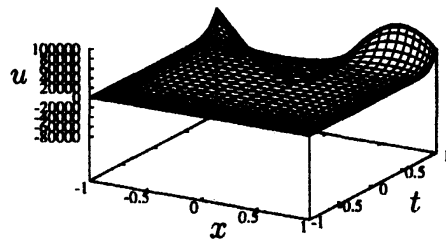
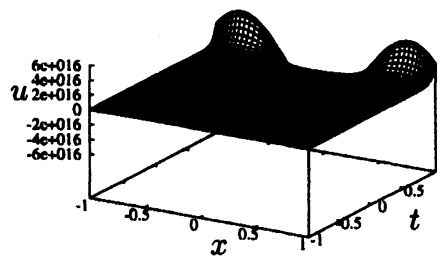


Fig. 5. 数値解のグラフと誤差 (IPNS, $T = 0$, $\varepsilon = 0$, 200digits).

2.3 $T = 0$, $\varepsilon \neq 0$ の場合

この場合、問題 1 は解の接続問題になる。 $\varepsilon = 0$ のときには IPNS は厳密解をとらえることができる (Fig. 5)。そこでここでは、 $\varepsilon = 1$, 10^{-10} で計算する。数値計算結果を Fig. 6 に示すが、 Fig. 5 とは全く異なっている。 §2.1 で議論した同様の理由により、 $\varepsilon \neq 0$ のときには解が存在しないと思われる。

(a-1) $N = 10$ (a-2) $N = 30$ (a-3) $N = 50$ (a) $\varepsilon = 1$ (b-1) $N = 10$ (b-2) $N = 30$ (b-3) $N = 50$ (b) $\varepsilon = 10^{-10}$ Fig. 6. 数値解のグラフ (IPNS, $T = 0$, 200digits).

2.4 $T = -1$ の場合

この場合、問題 1 は初期値問題になり、 $T = 1, \varepsilon = 0$ のときと同様に厳密解 (6) が存在する。方程式が通常の熱伝導方程式であれば、解の一意性はよく知られた事実である [8]。しかしながら、今の熱伝導逆問題の場合に解が一意であるかどうかはわからない。数値計算結果を Fig. 7 に示す。数値解は厳密解 (6) に収束している。IPNS 法が §2.2 で議論したのと同じ理由で、一つの解析関数を厳密解としてとらえることに成功している。

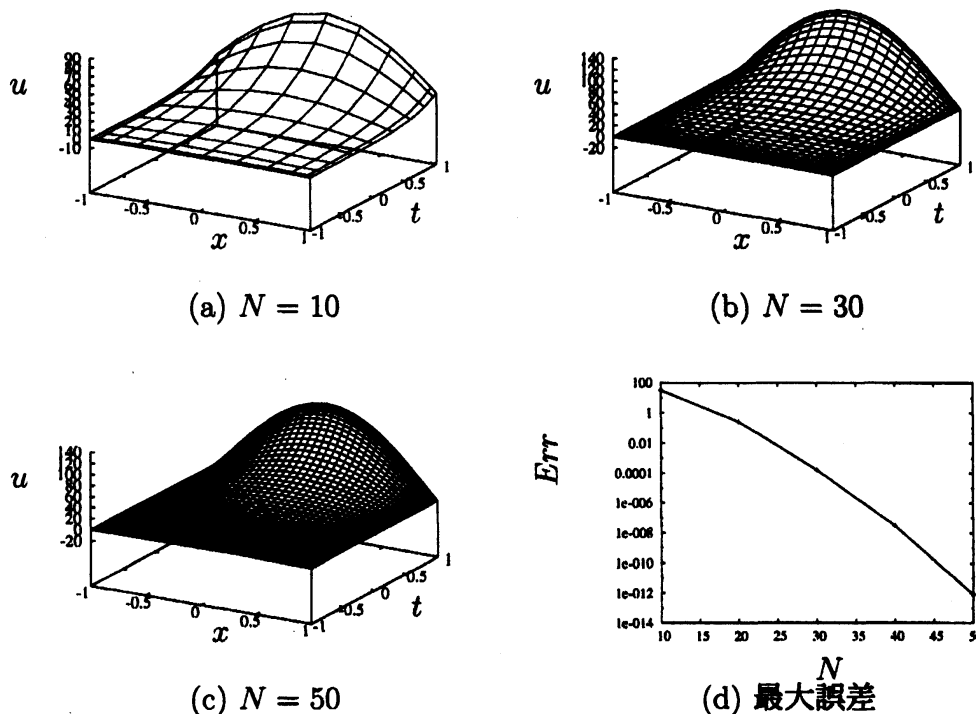


Fig. 7. 数値解のグラフと誤差 (IPNS, $T = -1$, 200digits).

3 結論

我々は2つのパラメータ T, ε を含む簡単な熱伝導逆問題を提案した。 T の値によって、初期値問題になったり、初期値境界値問題になったり、解の接続問題になったりするおもしろい問題である。我々はこの問題に対して数値計算を行い、簡単な離散化法より IPNS が十分安定であることを確認した。 $\varepsilon = 0$ の場合には、厳密解として解析関数が存在するが、IPNS の数値解はこの解析関数に収束している。これは、一意性が保証されていなくても、数値解法 IPNS が最も滑らかな解析関数を解として選択するためと考えられる。 $\varepsilon = 1, 10^{-10}$ (おそらく $\varepsilon \neq 0$) の場合に、数値計算結果から解の非存在が示唆された。これは、解の存在と解の解析性の関係が影響していると思われる。この理論解析は我々の今後の課題である。さらに、解の非存在の証明は解の存在証明より一般に難しいといわれて

いるが、我々の数値解法である IPNS は解の非存在の証明に役立つ可能性があることがわかった。

謝辞

本研究は科学研究費 (Nos. 16340024, 16340029, 18654023, 18340045) の支援を受けて行なわれたものである。

参考文献

- [1] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [2] H. Fujiwara and Y. Iso, Design of a multiple-precision arithmetic package for a 64-bit computing environment and its application to numerical computation of ill-posed problems, *IPSJ J.*, **44**(3)(2003), 925–931.
- [3] K. Iijima, M. Nakada, K. Saito and K. Onishi, Usefulness of Multiple-Precision Arithmetic for Numerical Solution of Inverse Problems, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **54**(2005), 307–317.
- [4] H. Imai, Some methods for removing singularity and infinity in numerical simulation, *GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications*, **23**(2005), 103–118.
- [5] H. Imai and H. Sakaguchi, Numerical Computation on Continuation of the Solution for the One-Dimensional Heat Equation, *Trans. JSIAM*, (2007), submitted.
- [6] H. Imai and T. Takeuchi, Application of the Infinite-Precision Numerical Simulation to an Inverse Problem, *NIFS-PROC*, **40**(1999), 38–47.
- [7] H. Imai, T. Takeuchi and M. Kushida, On Numerical Simulation of Partial Differential Equations in Infinite Precision, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, **9**(2)(1999), 1007–1016.
- [8] F. John, *Partial Differential Equation* 4th ed., *Appl. Math. Sci.*, **1**, Springer-Verlag, New York, 1981.
- [9] T. Takeuchi, H. Imai and H. Sakaguchi, Global Simulation of a Backward Heat Conduction Problem with a Variable Transform on Time, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **54**(2005), 319–326.

- [10] T. Takeuchi, H. Imai and Y. Zhu, Some Numerical Experiments on Global Simulation of the Backward Heat Conduction Problem, *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, **55**(2006), 175–184.
- [11] 登坂 宣好, 大西 和榮, 山本 昌宏, 逆問題の数理と解法, 東京大学出版会, 東京, 1999.