

矩形曲がり管内流における非定常解の3次元構造

岡山大学大学院自然科学研究科
渡辺 毅 (Takeshi WATANABE), 柳瀬 眞一郎 (Shinichiro YANASE)
Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

1 はじめに

矩形断面曲がり管内流は、平面ジェット流、平面ポアズイユ流、円管ポアズイユ流などと並んで、流体運動の基本的な性質を理解するための基礎研究として古くから研究されてきた流れの一つである。一般に曲がり管の場合、管路の持つ曲率によって流体に遠心力が働くために、曲がり管に特有の断面二次流れが形成されることが知られている。これは、流速が管路中央部で大きく管壁付近では小さいことから、管中心付近で遠心力が最大となり、これによって管中心付近の流体が曲がり管の外壁側に押し出されることによってつくられるものであり、Fig. 2 に示すような複雑な分岐構造を持っている。

こうした分岐解析は Winters (1987)¹⁾ によって初めて詳細に研究され、いくつかの典型的な定常解と分岐構造が数値的に求められた。Winters が行ったのは曲率 $\delta = 0.02$ (δ の定義については後述) の場合についてであったが、後に多くの数値解析が行われ、Winters によって示された分岐構造が曲がり管内流において一般的なものであることが明らかになった。こうした研究のうち最近行われたものをいくつか挙げると、例えば Wang and Yang (2005)²⁾ が、 $\delta = 0.01$ に対する実験的、理論的研究を行い、2次元数値計算結果と実験結果が良く一致することを示している。また、Mondal ら (2006)³⁾ は、 $\delta = 0.1$ の場合に対して徹底的な解析を行い、 $\delta = 0.25$ 付近で著しい分岐構造の変化が発生することを見出している。

ところで、これまでに行われてきた矩形曲がり管内流れの研究はほぼすべて、2次元性の仮定のもとに行われたものである。これは数値的には、流れが管軸方向に一様であるとの仮定をおいて計算することに対応し、また実験的には、管路のどこか一断面に注目し、その断面における断面二次流れを可視化することに対応している。この仮定は定常解の場合は妥当的であると考えられるが、非定常解の場合、軸方向の一様性を保ったまま振動する流れは極めて特殊であり、軸方向にも何らかの構造を持つことが予想される。この点について、Mondal ら (2007)⁴⁾ は、2次元計算で得られた非定常解は3次元的には進行波になっていることを予想している。本研究の直接の動機は、この予想の妥当性を数値的に検証することであり、計算を実行した結果、確かに進行波が生成されることが明らかになった。

2 基礎方程式

Fig. 1 に示す座標系 (x, y, z) において、 z 方向に一様な圧力勾配 G によって駆動される流れを考える。曲がり管の中心から管中心までの距離を R 、管断面の幅および高さの半分

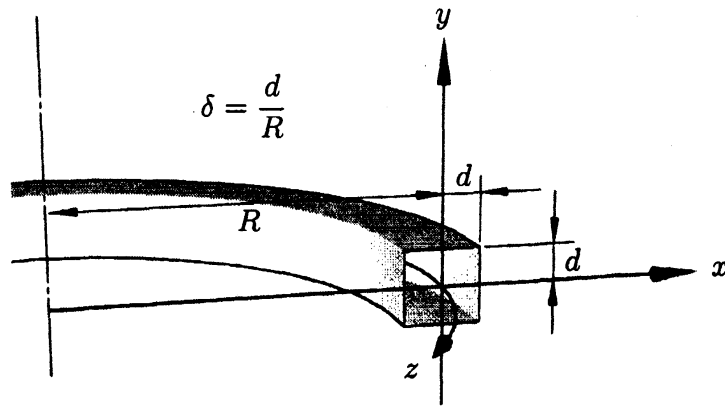


Fig. 1. 座標系

の距離を d として、曲率 δ を $\delta = d/R$ で定義する。基礎方程式は、非圧縮粘性流体を仮定した連続の方程式と Navier-Stokes 方程式および渦度方程式の無次元形

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + G \mathbf{k} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} \quad (3)$$

である。ここに \mathbf{u} , t , p , $\boldsymbol{\omega}$, G , \mathbf{k} はそれぞれ無次元流速、無次元時間、無次元圧力、無次元渦度、無次元圧力勾配、 z 方向の単位ベクトルを表し、 ∇ および ∇^2 は

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\delta}{1 + \delta x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{(1 + \delta x)^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

で与えられる。ただし \mathbf{i} , \mathbf{j} はそれぞれ x , y 方向の単位ベクトルである。境界条件は壁面上ですべりなし条件

$$\mathbf{u}(\pm 1, y, z, t) = \mathbf{u}(x, \pm 1, z, t) = \mathbf{0}$$

を課す。なお各量の無次元化はそれぞれ

$$\mathbf{u}' = \frac{\nu}{d} \mathbf{u}, \quad t' = \frac{d^2}{\nu} t, \quad p' = \frac{\rho \nu^2}{d^2} p, \quad (x', y', z') = (dx, dy, dz) \quad (4)$$

によって行い、唯一の駆動力である無次元圧力勾配 G は

$$G = \frac{d^3}{\rho \nu^2} \frac{\partial p'}{\partial z'}$$

によって与える。ただしプライム (') を付した変数は次元を持つ量を表す。また ν , ρ はそれぞれ動粘性係数、密度である。また Dean 数は $Dn = \sqrt{2\delta G}$ で定義される。

3 数値解法

3.1 2次元計算

2次元性, すなわち $\partial/\partial z = 0$ を仮定すれば, 曲がり管座標において連続の方程式 (1) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\delta u}{1 + \delta x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

と表示されるから, これを用いて流れ関数 ψ を

$$u = \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

で導入し, これを渦度方程式 (3) の z 成分と Navier-Stokes 方程式 (2) の z 成分に代入することにより, 解くべき方程式

$$\begin{aligned} & \left(\nabla_2^2 - \frac{\delta}{1 + \delta x} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ &= \nabla_2^4 \psi - \frac{2\delta}{1 + \delta x} \nabla_2^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{3\delta^3}{(1 + \delta x)^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{3\delta^2}{(1 + \delta x)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial(\nabla_2^2 \psi, \psi)}{\partial(x, y)} \\ & \quad - \frac{\delta}{(1 + \delta x)^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + 2\delta w \frac{\partial w}{\partial y} \\ & \quad + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left\{ \frac{2\delta}{(1 + \delta x)^2} \nabla_2^2 \psi + \frac{\delta}{(1 + \delta x)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{3\delta^2}{(1 + \delta x)^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right\} \\ & \frac{\partial w}{\partial t} = G + \nabla_2^2 w + \frac{\delta}{1 + \delta x} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\delta^2 w}{(1 + \delta x)^2} - \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial(w, \psi)}{\partial(x, y)} - \frac{\delta w}{(1 + \delta x)^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}$$

が得られる. 解くべき変数は ψ, w の 2 個である. これら 2 変数を, 展開関数 Ψ_l および Φ_l を用いて

$$\psi(x, y, t) \approx \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \Psi_l(x) \Psi_m(y) \psi_{lm}(t), \quad w(x, y, t) \approx \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M \Phi_l(x) \Phi_m(y) w_{lm}(t)$$

のように展開し, これに選点法を適用して解く. ただし L, M は打ちきり項数である. また Ψ_l および Φ_l は, Chebyshev 多項式 T_l を用いて

$$\Psi_l(x) = (1 - x^2)^2 T_{l+1}(x), \quad \Phi_l(x) = T_{l+1}(x) - \frac{1}{2} \{1 - (-1)^l\} x - \frac{1}{2} \{1 + (-1)^l\} \quad (5)$$

と定義され, 自動的に境界条件を満たしている. なお Φ_l の定義については同様の条件を満たす他の定義として

$$\Phi_l(x) = (1 - x^2) T_{l+1}(x)$$

も考えられるが, 計算を実行した結果, 時間発展計算に必要となる逆行列の精度が, 式 (5) で示す定義を用いた場合の方がはるかに良くなることが明らかになったため式 (5) に示す定義を選んだ. ただしこの精度の問題は 2 次元計算ではほとんど差がなく, 3 次元計算の場合に顕著となるものである.

2 次元計算では, Newton-Raphson 法を用いて定常解を, また求めた定常解について線形安定性解析を行い, さらに時間発展計算を実行する. 時間発展計算においては, 非線形項に Adams-Bashforth 法, 高次微分項に対して Crank-Nicolson 法を適用する.

3.2 3次元計算

3次元計算では、まず流れ場 \mathbf{u} と圧力場 p を z 方向に

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) \approx \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{iknz} \mathbf{u}_n(x, y, t), \quad p(x, y, z, t) \approx \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{iknz} p_n(x, y, t)$$

のようにフーリエ展開する。ただし i は虚数単位、 k は波数、 N は打ち切り項数である。 \mathbf{u}_n は、さらに2次元計算で用いたのと同じ展開多項式 Φ_l を用いて

$$\mathbf{u}_n(x, y, t) \approx \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \Phi_l(x) \Phi_m(y) \mathbf{u}_{lmn}(t) \quad (6)$$

のように展開される。ただしこのように展開した場合、流れ場の境界条件としてすべりなし条件は課されるものの、連続の方程式から導かれる境界条件

$$\left. \frac{\partial u_n}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = \left. \frac{\partial v_n}{\partial y} \right|_{y=\pm 1} = 0 \quad (7)$$

は自動的に課されない。この点については Appendix A.1 で述べる。

次に変数の消去法を考える。解くべき変数は流れ場の3成分 $\mathbf{u}_n = (u_n, v_n, w_n)$ および圧力場 p_n の4個であるが、計算の効率化のために u_n および p_n を消去し、実際には v_n と w_n の2変数についての方程式を解く。

変数 u_n の消去は連続の方程式 (1) を用いる。式 (1) は第 n モードに対して

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\delta u_n}{1 + \delta x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{iknw_n}{1 + \delta x} = 0$$

と書かれるから、 u_n を含む項を左辺、それ以外を右辺に移項して u_n を展開多項式 Φ_l で展開し、さらにこれに選点法を適用することで

$$\sum_{l,m} \left[\frac{\partial \Phi_l}{\partial x} \Phi_m + \frac{\delta}{1 + \delta x} \Phi_l \Phi_m \right]_{ij} u_{lmn} = \left[-\frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{iknw_n}{1 + \delta x} \right]_{ij}$$

とする。ただし添字 ij は選点 (x_i, y_j) における値を表す。この式で左辺の展開多項式の逆行列を両辺に左から乗じることで u_n の展開係数 u_{lmn} が

$$u_{lmn} = \sum_{i,j} \left\{ \left[\frac{\partial \Phi_l}{\partial x} \Phi_m + \frac{\delta}{1 + \delta x} \Phi_l \Phi_m \right]_{ij} \right\}^{-1} \left[-\frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{iknw_n}{1 + \delta x} \right]_{ij} \quad (8)$$

のように v_n と w_n によって表され、これによって u_n が消去される。

次に Navier-Stokes 方程式の x および y 成分を直接積分することによって p_n を消去する。Navier-Stokes 方程式 (2) の x および y 成分の第 n モードはそれぞれ

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{\delta w^2}{1 + \delta x} \right]_n = -\frac{\partial p_n}{\partial x} + \nabla^2 u_n - \frac{\delta^2 u_n}{(1 + \delta x)^2} - \frac{2\delta v \cdot knw_n}{(1 + \delta x)^2}$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + [(\mathbf{u} \cdot \nabla)v]_n = -\frac{\partial p_n}{\partial y} + \nabla^2 v_n$$

と書かれるから、まず x 成分について、圧力項を左辺、それ以外を右辺に移項して x で積分することにより圧力場が

$$p_n = \int_{-1}^x \left\{ -\frac{\partial u_n}{\partial t} - \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla)u - \frac{\delta w^2}{1 + \delta x'} \right]_n + \nabla^2 u_n - \frac{\delta^2 u_n}{(1 + \delta x')^2} - \frac{2\delta i k n w_n}{(1 + \delta x')^2} \right\} dx' + f_n(y)$$

のように y に関する不定性 $f_n(y)$ を残して決定される。そこで y 成分のうちこの $f_n(y)$ に寄与のある項のみを同様に積分することで

$$f_n(y) = \int_{-1}^y \left[\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} + \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial v_n}{\partial x} \right]_{x=-1} dy'$$

が得られ、これによって圧力項が消去される。なお具体的な数値積分の方法については Appendix B で詳述する。以上のようにして u_n , p_n が消去されたため、 v_n , w_n について Navier-Stokes 方程式 (2) と渦度方程式 (3) の 6 式のうち、まだ使っていない 4 式から適当な 2 式を選び連立させて解く。本研究においては Navier-Stokes 方程式の z 成分

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} + [(\mathbf{u} \cdot \nabla)w + \frac{\delta u w}{1 + \delta x}]_n = -\frac{i k n p_n}{1 + \delta x} + \nabla^2 w_n - \frac{\delta^2 w_n}{(1 + \delta x)^2} + \frac{2\delta i k n u_n}{(1 + \delta x)^2} \quad (9)$$

と渦度方程式の z 成分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega_{zn}}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \omega_z \right]_n \\ & + \left[\frac{2\delta w}{1 + \delta x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\delta w}{(1 + \delta x)^2} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right]_n \\ & = \left\{ \nabla^2 - \frac{\delta^2}{(1 + \delta x)^2} \right\} \omega_{zn} + \frac{2\delta i k n u_{zn}}{(1 + \delta x)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

の 2 式を用いる。ただし ω_x , ω_z は渦度の x , z 成分であり、曲線座標系において

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{1}{1 + \delta x} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

と表示される。

この 2 式を用いて圧力勾配 $G = 3400$ の場合に対して時間発展計算をおこなう。ただし非線形項に Adams-Bashforth 法、高次微分項に対して Crank-Nicolson 法を適用し、アライアス誤差は 3/2 法によって取り除く。

なお本節で述べたような数値計算手法を選択するに至るまでに、他の数通りの数値計算方法を試したものの、それらはどれもうまくいかなかった。このことに関する詳細は Appendix A.2 で述べる。

4 計算条件

本研究においては, x, y, z 方向の打ちきり項数 L, M, N をそれぞれ $L = 24, M = 24, N = 64$ とする. なお L, M は, 2次元計算によって得られる定常解の収束性によって決定した. 打ちきり項数を上記のように選んだ場合, $G = 3400$ における定常解に対する高次モードからの寄与は

$$\sqrt{\frac{\sum_{l=21}^{24} \sum_{m=1}^{24} \psi_{lm}^2}{\sum_{l=1}^{24} \sum_{m=1}^{24} \psi_{lm}^2}} < 1 \times 10^{-3}, \quad \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{24} \sum_{m=21}^{24} \psi_{lm}^2}{\sum_{l=1}^{24} \sum_{m=1}^{24} \psi_{lm}^2}} < 1 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{l=13}^{24} \sum_{m=1}^{24} w_{lm}^2}{\sum_{l=1}^{24} \sum_{m=1}^{24} w_{lm}^2}} < 1 \times 10^{-3}, \quad \sqrt{\frac{\sum_{l=1}^{24} \sum_{m=16}^{24} w_{lm}^2}{\sum_{l=1}^{24} \sum_{m=1}^{24} w_{lm}^2}} < 1 \times 10^{-3}$$

のように評価されることから, 十分なモード数であると判断される. z 方向の打ち切り項数 N については, 図1により $kn > 1$ からの寄与が極めて小さいことが分かるため, 十分なモード数であると判断した.

また曲率 δ および波数 k は, 同時に行っている可視化実験の条件に合わせるために $\delta = 0.036, k = 0.048$ を選ぶ. k の値は曲がり管 3/4 周分に対応するものである.

5 結果

5.1 2次元計算

本研究の直接の動機は, 2次元計算によって得られた非定常解が3次元的に進行波を形成しているかどうかを確認することであった. このため, まずは同じ条件の曲がり管について2次元計算を行い, どの圧力勾配領域で非定常解が得られるかを検討し, この結果を用いて3次元計算の計算条件を決定した.

Fig. 2 は, 2次元計算によって得られた定常解の分岐図である. 図中で, 解が存在する領域を I, II, III の3種類に分割しているが, I は, ただ一つの安定な定常解が存在する領域, II は, 安定な定常解が存在せず, かつ, 1個の対称な不安定解と反対称な1対の不安定解の, 合計3個の解が存在する領域, また III は, 安定な定常解が存在せず, かつ, 3個以上の不安定な定常解が存在する領域を示している.

2次元時間発展計算を実行した場合, 領域 I ではただ一つの安定な定常解に収束し, II, III では非定常解が得られるが, 特に領域 II において, 存在する3個の定常解のまわりに, Fig. 3 に示すような, 非常に大きく変動する安定な周期解が構成される. 実際, Fig. 3 における $t = 0.158$ と 0.554 の解は, Fig. 2 に示す4渦対称解に非常に近く, また $t = 0$ と 0.396 の解は2渦反対称解に非常に近いことがわかる. これは単に定性的に良く似ているというだけでなく, 渡辺ら(2006)⁵⁾ は解の状態ベクトルを定量的に検討し, 確かにこれら3個の不安定な解の周りに構成される周期解になっていることを示している. また曲率は異なるが, Wang and Yang(2005)²⁾ が2次元数値計算によって求め, 実験との一致を確認したのも, この解と同じ領域 II に存在し, 定性的に同じく安定な周期解に対してである.

以上の検討から, 3次元計算を実行する圧力勾配として $G = 3400$ を選ぶことにする.

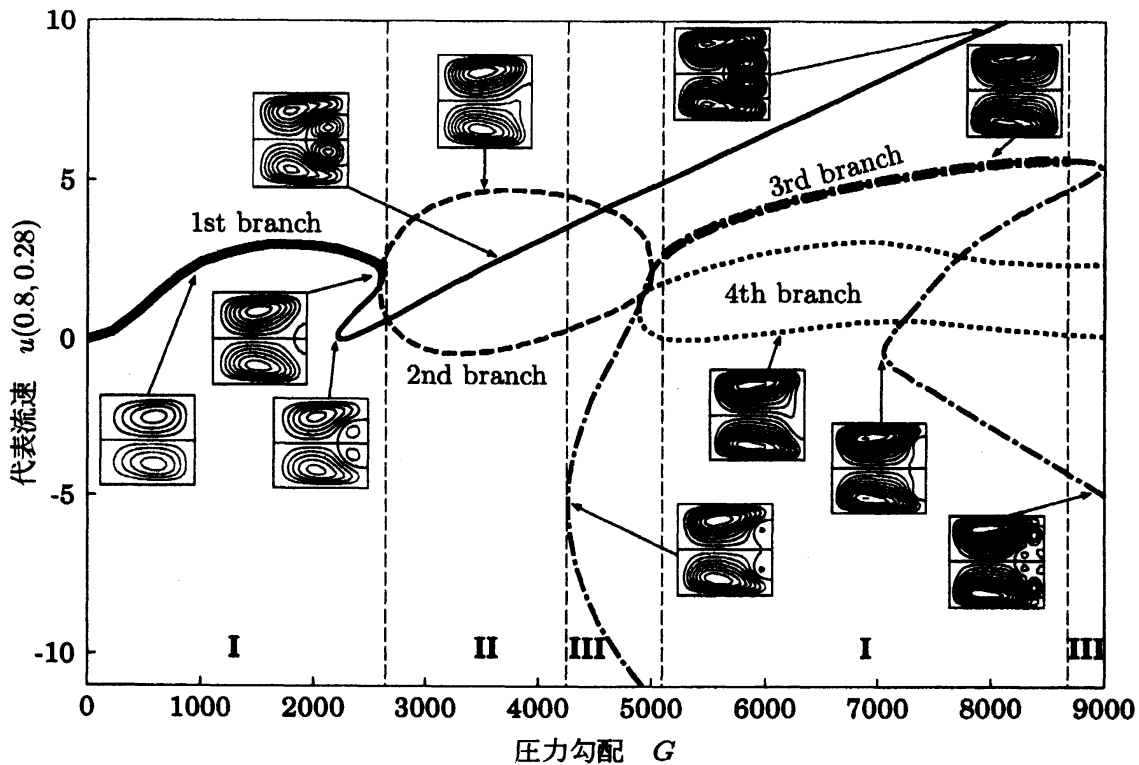


Fig. 2. 2次元計算による分岐解析結果. 1st branch および 3rd branch の太線部は安定な定常解.

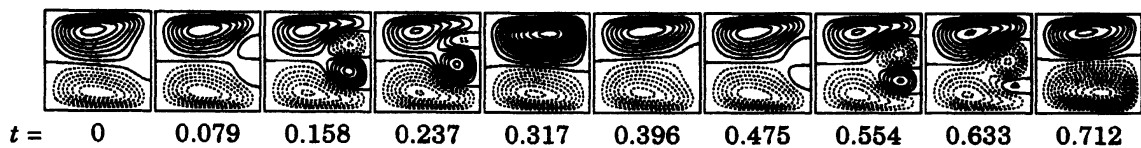


Fig. 3. $G = 3400$ における 2次元周期解 (周期 $T \approx 0.791$)

5.2 3次元計算

3次元計算を実行することにより確かに進行波が存在することが確認された. Fig. 4 は, 得られた進行波を流脈線によって可視化したものである. 流れは右から左に向かっており, 右手前側が外壁側となっている. 図の中央付近にある, 流脈線が大きく盛り上がっている部分が流れ方向に伝播していく. この盛り上がった部分を除く部分, つまり図中の右端側と左端側ではほぼ対称な流れの状態となっていることから, 進行波の発生によって, ほぼ対称な流れの状態における空間対称性が不安定となってくずれ, 対称性のくずれが進行波として伝わっていくことが分かる.

進行波の性質を定量的に把握するためにスペクトル解析を実行した結果が Fig. 5 である. スペクトル解析を行う上では, 例えば各波数とごのエネルギーなど, 流れ場全体を代表する量をとるのが望ましいが, 実際に計算してみたところ, 波数ごとの全領域におけるエネルギーはほとんど変化しておらず, 状態ベクトル u_n が複素平面内で単振動しているような状態であることが明らかになった. このため進行波の性質を把握するための量とし

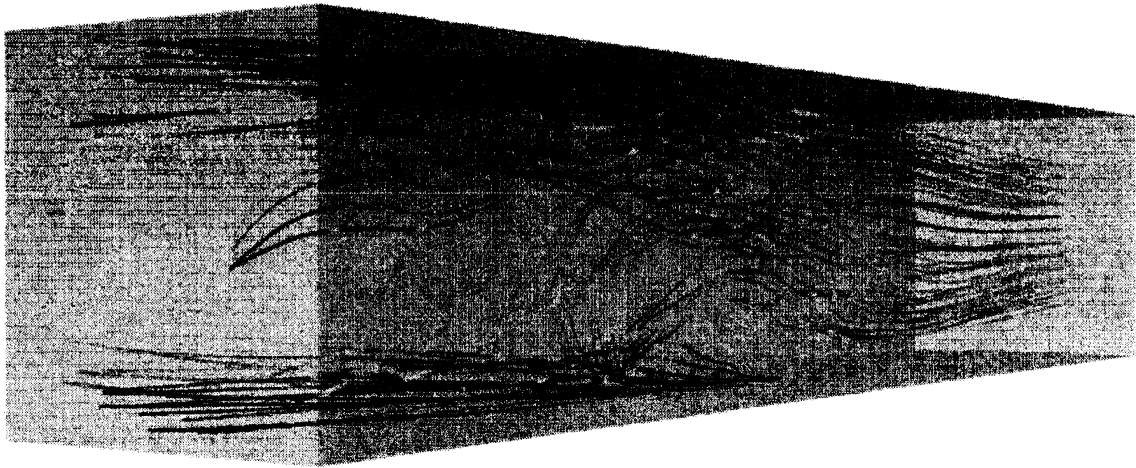


Fig. 4. 進行波の流脈線による可視化

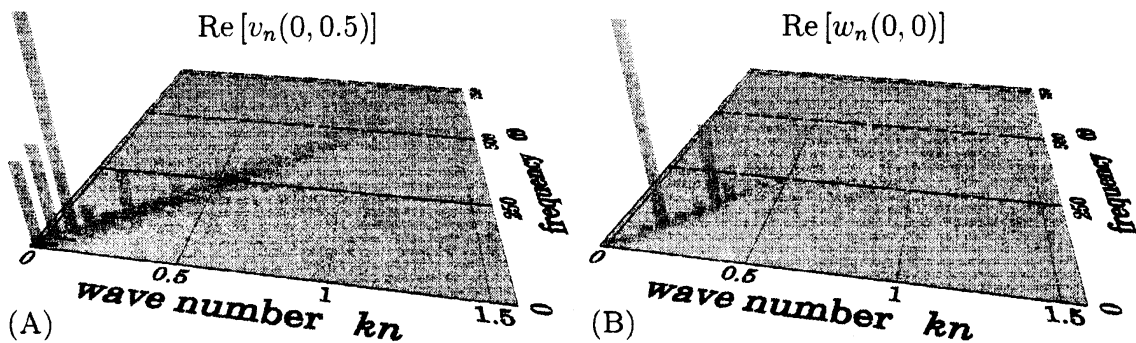


Fig. 5. 進行波のスペクトル解析結果

て、2個の代表速度 $v_n(0, 0.5)$ と $w_n(0, 0)$ を選び、これらの実部に対してスペクトル解析を行った。

Fig. 5においてまず注目すべき点は、図(A)と(B)がそれぞれ異なる代表速度を用いて得られたものであるにもかかわらず、両方とも、スペクトルがほぼ同じ傾きを持つ直線上に分布していることである。このことから、計算を行った条件における曲がり管内流においては、ただ一つの進行波成分が存在していることが分かる。この傾きを最小二乗法によって求めることにより位相速度 $u_\phi = 501.31$ が求められた。ただし Fig. 5-(A) の $n=0$ モードはこの直線上に乗らないため、位相速度を求める上では考慮していない。

一方、(A)では $n=0$ モードの振動成分が無視できない大きさを持っているのに対し、(B)ではこれがほとんど見られない。これは、(A)は上下方向流速であるため、断面2次流れの変化に軸方向一様成分が存在することを示すのに対し、(B)は軸方向流速であるため、全領域にわたる流量の変化は存在しないことに対応していると考えられる。

5.3 実験結果との比較

まず2次元計算結果について考える。Fig. 3に示すように、圧力勾配 $G = 3400$ に対して2次元計算で得られる周期解の周期は $T \approx 0.791$ である。本研究では式(4)のように無次元化しているため、これを次元のある量 T' に戻すことを考える。実際に用いる量として、筆者らが行っている曲がり管内流の可視化実験に用いている実験装置の値として $d = 0.0125[\text{m}]$, $\nu = 1 \times 10^{-6}[\text{m}^2/\text{s}]$ (水の物性値)を用いると

$$T' = T \frac{d^2}{\nu} = 124 [\text{s}]$$

と求められる。ところが現時点で、このような長い周期の振動解は実験によっては観測されていない。一方でFig. 5-(B)から進行波の一周期に対応する角周波数は $\omega = 73.747$ で与えられることから、3次元計算によって得られる周期は $T_{3D} = 13.312[\text{s}]$ となり、2次元計算の場合と約10倍も異なっているが、実験値に近い値と考えられる。現時点で筆者らが行っている曲がり管内流の可視化実験装置は断面のアスペクト比が2(縦:横=2:1)であり本研究で計算を行った断面形状とは異なるため、今後実験装置のアスペクト比を1(正方形)にするか、あるいは数値計算の条件を長方形の場合に変更するかのどちらかを行い、実験によって得られる周期を詳しく調べて比較検討を行う予定である。

A 数値計算法に関する補足

A.1 u_n, v_n の展開関数

流れ場 u_n において、 w_n に対してはすべりなし条件のみを課せばよいから、式(5)に示す展開関数 Φ_l を用いて展開すれば十分であるが、 u_n, v_n に対してはすべりなし条件だけでなく式(7)に示す断熱条件をも課さなければならないから、本来は式(5)に示す展開関数 Ψ_l を用いて

$$u_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \Psi_l \Phi_m u_{lmn}, \quad v_n = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \Phi_l \Psi_m v_{lmn}$$

のように展開する必要があるように思われるが、本研究では式(8)を用いて u_n を消去しているため、この消去の手続き中で断熱境界条件式(7)に対する十分条件が課されているため、断熱境界条件を展開関数中に入れる必要はない。

実際に計算の各ステップごとに数値的収束性を確認するために連続の方程式(1)に対する残差 R を

$$R = \sqrt{\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\delta u_n}{1 + \delta x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \frac{iknw_n}{1 + \delta x} \right)^2}$$

で定義して確認してみると、 $R = O(1 \times 10^{-12})$ で十分に収束していることから、式(6)のように展開するのは妥当であると考えられる。

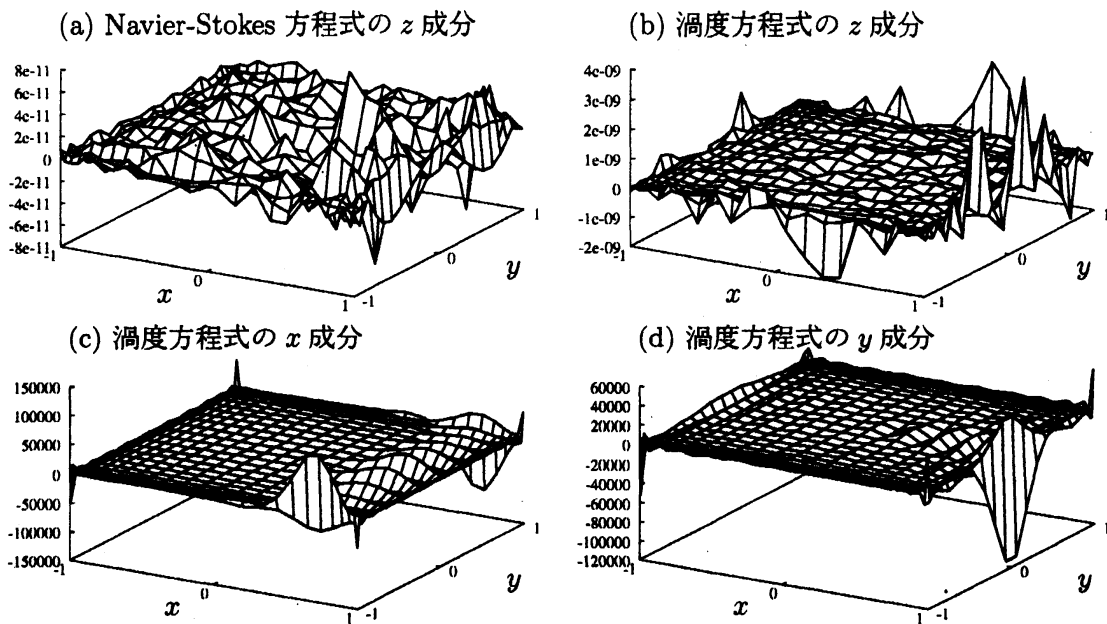


Fig. 6. 解の収束性

A.2 解くべき変数と方程式の選択

3.2節で述べた数値計算法を選択するに至るまでに、他に数通りの方法を試したものの、いずれもうまく計算を実行することができなかった。そこで本節では、他に試した方法について述べ、それがなぜうまく計算出来ないか、という点について検討した結果を示す。曲がり管内流の3次元計算を行うにあたって最初に立てたプランは

- z 方向に Fourier 展開する
- $n = 0$ モードに対しては、2次元計算と同じ2式を用い、流れ関数 ψ_0 と管軸方向流速 w_0 を解く
- $n \neq 0$ モードに対しては、連続の方程式を用いて w_n を消去し、渦度方程式 (3) の z 成分に x 成分又は y 成分のどちらかを連立させて u_n, v_n を解く

というものであった。しかしこのプランに沿って時間発展計算を実行すると、わずか数ステップの計算で発散してしまう。そこで2次元計算によって得た定常解を渦度方程式 (3) の各成分に代入し、解になっているかどうかを確かめたところ、特に管断面の角の部分で解の誤差が異常に大きくなっていることが明らかになった。この異常なふるまいの様子を Fig. 6 に示す。図中 (a), (b) は2次元計算で定常解を求めるために用いている2式であり、(a) は 10^{-10} 程度、(b) は 10^{-9} 程度のオーダーで非常に良く収束している。ここで、これらが十分に収束しているなら、渦度方程式 (3) の x, y 成分も収束しているはずだと考えられるが、図の (c), (d) から明らかなように、収束していない。全体としては収束しているが、管壁部、特に角の部分で極端に大きくなっている。時間発展計算が発散するのは、このように管壁部で解が異常値を取ることが原因であると考えられる。そこでこの現

象を検証するために、簡単な例として関数

$$f(x, y) = \frac{1}{25 + x^2 + y^2}$$

を考え、これを正方形領域で Chebyshev 多項式補間してその高次微分を調べたところ、同様に、壁および角の部分で極端に大きな値を取る現象が再現された。またこの現象は、モード数を増やしても改善されないことも同時に明らかになった。このことは第1に、微分階数は可能な限り低い方が良いことを、また第2に、解くべき方程式を選択するにあたって、 $n=0$ モードとそれ以外で異なる方程式を用いるのは困難であることを意味している。

ところが、解くべき変数を2個として解くべき方程式を2個選ぶ場合、Navier-Stokes 方程式の z 成分に駆動力となる圧力勾配項が含まれていることから、これはどうしても選ばなければならず、そうすると、 $n \neq 0$ のとき、変動圧力 $\partial p_n / \partial z$ の項を解かざるを得ない。

以上の検討から、3.2に示したような数値解法を用いて解く方法を選んだ。ただ、この問題の解決方法として、例えば選点法ではなく Galerkin 法を用いる、あるいは展開関数として Chebyshev 多項式ではない関数を用いるなど、他の方法を試行し、より良い方法を考える必要がある。

B 圧力項の数値積分方法

精度良く数値積分を行おうとした場合、通常は Gauss-Legendre 積分が用いられる。ところが展開関数に Chebyshev 多項式を用いている場合、Chebyshev 多項式の補間点と Legendre 多項式の補間点は異なるため、数値操作が煩雑になる。もし、区間 $[-1, 1]$ での定積分を求めるなら、Chebyshev 多項式の展開係数から、ただ一度だけ Legendre 多項式の補間点における値を求めれば十分であるが、不定積分を行おうとした場合、

1. Chebyshev 多項式の展開係数から Legendre 多項式の補間点における値を求める
2. Legendre 多項式の重みを $w_i (i = 1, 2, \dots, I)$ として、任意の関数 $f(x)$ の不定積分 $F(x)$ の補間点における値を

$$F(x_j) \equiv \int_{-1}^{x_j} f(x') dx' = \sum_{i=1}^j f(x_i) w_i, \quad x_j = \sum_{i=1}^j w_i - 1, \quad j = 1, 2, \dots, I$$

のように求める

3. この新しい補間点 x_j は Chebyshev 多項式の補間点でも Legendre 多項式の補間点でもないため、こんどこの補間点における値 $F(x_j)$ を用いて Chebyshev 多項式の展開係数を求める
4. 得られた展開係数を用いて Chebyshev 多項式の補間点における値を求める

という、かなり煩雑な操作を行う必要がある。特に上述の手続き中3において、Chebyshev 多項式の補間点でない点の値を用いて展開係数を求めていることから、この操作において精度が悪くなっている可能性が考えられる。

研究会で報告した時点では上述のような積分方法を用いていたが、その後改良を加えた。その結果、今まで $n=0$ モードに残っていた振動成分がはるかに小さくなり、無視し

て良い程度の大きさになったため、今後、実験データを得る必要性も含め、さらに詳細に検討する必要がある。

新しい積分方法は次のようなものである。

まず $\partial p_n / \partial x$ の x による積分を考える。 p_n は区間 $[-1, x]$ における $\partial p_n / \partial x$ の定積分であるから $p_n(x = -1) = 0$ を満たす。さらに p_n の境界条件は $n \neq 0$ のとき、式(9)から、壁面上で

$$p_n = \frac{1 + \delta x}{ikn} \left(\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + \frac{\delta}{1 + \delta x} \frac{\partial w_n}{\partial x} + \frac{\partial w_n^2}{\partial y^2} \right)$$

であるから、 $p_n(\pm 1, \pm 1, t) = 0$ (複号任意) を満たす。したがって Chebyshev 多項式 T_l を用いて

$$p_n(x, y, t) = \sum_{l=1}^L (1+x) \left(\frac{2-x-y^2}{3} \right) T_{l+1}(x) p_{ln}(y, t)$$

のように展開できるはずである。そこで上式を項別に微分して選点法を適用すれば

$$\left. \frac{\partial p_n}{\partial x} \right|_{x=x_j} = \sum_{l=1}^L \left[\frac{1-2x_j-y^2}{3} T_{l+1}(x_j) + (1+x_j) \left(\frac{2-x_j-y^2}{3} \right) T'_{l+1}(x_j) \right] p_{ln}$$

と書ける。ただしプライム(')は x による微分を表す。この式で、展開関数の逆行列を左から乗じることで p_{ln} が求められ、最終的に求めたい p_n が、 $\partial p_n / \partial x$ を用いて表される。同様に $\partial p_n / \partial y$ の y による積分については、 $x = -1$ 上で積分を行うため、 y, t だけの関数であり、 $y = \pm 1$ ですべりなし条件と同様の条件が課せるから

$$p_n(y, t) = \sum_{m=1}^M \Phi_m(y) p_{mn}(t)$$

と展開できるはずである。これを用いて x の場合と同様にして p_{mn} を求める。これにより補間点の変更を行う必要がなく、かつ、角の部分での境界条件が保証されるため高精度で積分を行うことができる。

参考文献

- 1) K. H. Winters: A bifurcation study of laminar flow in a curved tube of rectangular cross-section, *J. Fluid Mech.* (1987) vol. 180, pp. 343-369
- 2) Wang, L. and Yang, T., 2005, Periodic oscillation in curved duct flows, *Physica D* 200, 296-302.
- 3) R.N.Mondal: *Isothermal and Non-isothermal Flows through Curved Ducts with Square and Rectangular Cross Sections*, Ph. D. Thesis, Okayama university (2006)
- 4) Mondal, R. N., Kaga, Y., Hyakutake, T. and Yanase, S., 2007, Bifurcation diagram for two-dimensional steady flow and unsteady solutions in a curved square duct, to appear in *Fluid Dyn. Res.*.
- 5) 渡辺 毅, R. N. Mondal, 加賀 義人, 柳瀬 眞一郎, 2006, 矩形曲がり管内流における振動解の構造, 『日本流体力学会年会 2006 講演要旨集』, AM06-06-010.