

# スカラー PDF 輸送方程式における 条件付統計量モデルの実験的検証

名古屋大学・工学研究科 内田 健児 (Kenji UCHIDA)  
Graduate School of Engineering, Nagoya University

名古屋大学・工学研究科 酒井 康彦 (Yasuhiko SAKAI)  
Graduate School of Engineering, Nagoya University

## 1 緒言

乱流中の物質拡散や化学反応を伴う混合現象を解析的あるいは数値的に予測する際に、通常用いられる最も基本的な方法は、乱流の速度場同様に、濃度場に対して時間平均した保存方程式を解く方法である [1]. ただし、この場合、よく知られているように対流輸送項や化学反応項をモデル化し、方程式系を閉じた形にする必要がある。一方、濃度に対する確率密度関数 (以後、PDF: Probability Density Function) の輸送方程式を解く PDF 法 [2,3] は、このような対流輸送項や化学反応項にモデル化を必要としないため、乱流混合現象を解析する方法として、近年盛んに研究されるようになってきている [4,5]. しかしながら、濃度に対する PDF 輸送方程式を解くためには、濃度  $c$  で条件付けられた変動速度  $u_i$  の期待値 (以後、条件付速度)  $\langle u_i | c = \psi \rangle$  やスカラー散逸率  $\chi$  の期待値 (以後、条件付スカラー散逸率)  $\langle \chi | c = \psi \rangle$ , あるいは、変動濃度成分  $c$  に対するラプラシアン  $\nabla^2 c$  の期待値 (以後、条件付スカラーラプラシアン)  $\langle \nabla^2 c | c = \psi \rangle$  に対して、モデル化が必要となる。したがって、これらの条件付統計量の特性を明らかにすることは、乱流混合現象の解明にきわめて重要な役割を果たすことになる。

上記のような背景から、条件付統計量に関して、これまでに実験や数値計算により数多くの報告がされている [6-13,15]. 例えば、条件付速度  $\langle u_i | \psi \rangle$  に関する報告としては、一酸化窒素とオゾンを用いた混合層での測定 [6], スカラーとして温度を用いた軸対称噴流 [7] や一様剪断流での測定 [8] などがあり、数値的研究では、直接数値計算 (以後、DNS: Direct Numerical Simulation) による等方性乱流中で平均値勾配を持つパッシブスカラー場の計算 [9] などが挙げられる。一方、条件付スカラー散逸率  $\langle \chi | \psi \rangle$  や条件付スカラーラプラシアン  $\langle \nabla^2 c | \psi \rangle$  に関する研究としては、温度を用いた格子乱流 [10] や乱流後流と大気境界層での測定 [11], 対向流での測定 [12], 蛍光染料を用いた軸対称噴流での測定 [11] などが報告されている。また、数値的研究としては、DNS による一様等方性乱流でのパッシブスカラー場の計算 [9,13,15] などが例として挙げられる。

しかしながら、このように条件付統計量について数多く報告されているものの、これらの実験や数値計算では、そのほとんどがシュミット数  $Sc (\equiv \nu/D; \nu$  は動粘性係数,  $D$  は分子拡散係数) あるいはプラントル数  $Pr (\equiv \nu/\alpha; \alpha$  は熱拡散係数) が  $O(1)$  と小さく、シュミット数が大きな物質を用いての測定はほとんど見られない。また、レイノルズ数の影響に関しても明らかにされていない。そこで、本研究では、高シュミット数の軸対称噴流無反応濃度場において、5 種類のレイノルズ数に対して速度 2 成分と濃度の同時計測を行い、その同時測定から得られる条件付統計量の特性について調べ、これまでに報告されているモデルとの比較を行い、それらのモデルの有効性を検証した。本稿では、こ

これらの結果を報告する。

## 2 スカラー PDF に対する輸送方程式

物質の濃度や温度といったスカラーに対する PDF の輸送方程式については, Pope (2000) [4] や Fox (2003) [1] に詳しく解説されている。ここでは, 本稿に必要な部分のみをまとめて記す。今, 簡単のため, 1 成分のみを考えると, 濃度  $\tilde{c}(\mathbf{x}, t)$  に対する保存方程式は,

$$\frac{D\tilde{c}}{Dt} = D\nabla^2\tilde{c} + S(\tilde{c}(\mathbf{x}, t)), \quad (1)$$

で表される。ここで,  $D$  は分子拡散係数,  $S$  は化学反応項である。

いま, 濃度  $\tilde{c}$  の 1 点, 1 時刻オイラー PDF を  $f_{\tilde{c}}(\psi; \mathbf{x}, t)$  と表すと,  $f_{\tilde{c}}$  に対する輸送方程式は式 (1) より, 次式のように導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\tilde{c}}}{\partial t} + U_i \frac{\partial f_{\tilde{c}}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u_i | \psi \rangle f_{\tilde{c}}] \\ = - \frac{\partial}{\partial \psi} \left[ \left\langle \frac{D\tilde{c}}{Dt} \middle| \psi \right\rangle f_{\tilde{c}} \right] \\ = - \frac{\partial}{\partial \psi} [\langle D\nabla^2 c | \psi \rangle f_{\tilde{c}}] - \frac{\partial}{\partial \psi} [(D\nabla^2 C + S(\psi)) f_{\tilde{c}}]. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで,  $U_i$  と  $C$  は, それぞれ平均速度と平均濃度を表している。あるいは,

$$\begin{aligned} \frac{Df_{\tilde{c}}}{Dt} = D\nabla^2 f_{\tilde{c}} - \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u_i | \psi \rangle f_{\tilde{c}}] \\ - \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} [\langle D\nabla c \cdot \nabla c | \psi \rangle f_{\tilde{c}}] - \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} [(D\nabla C \cdot \nabla C) f_{\tilde{c}}] \\ - \frac{\partial}{\partial \psi} [S(\psi) f_{\tilde{c}}], \end{aligned} \quad (3)$$

で書き換えられる。ここで,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  であり,  $\psi$  はサンプル空間における濃度で,  $\langle * | \psi \rangle$  は  $\langle * | \tilde{c}(\mathbf{x}, t) = \psi \rangle$  を意味している。ここで, これらの PDF 輸送方程式において注目すべきことは, 以下の関係,

$$\langle S(\tilde{c}) | \psi \rangle = S(\psi), \quad (4)$$

により, 化学反応項が閉じられた形として現れることである。したがって, スカラー PDF に対する輸送方程式において閉じられていない項は,  $\langle u_i | \psi \rangle$ ,  $\langle D\nabla c \cdot \nabla c | \psi \rangle$  あるいは  $\langle D\nabla^2 c | \psi \rangle$  を含む項であり, これらの項に対してモデル化が必要となる。

そこで, 本研究では,  $\langle u_i | \psi \rangle$ ,  $\langle \chi | \psi \rangle$  および  $\langle D\nabla^2 c | \psi \rangle$  について, 軸対称噴流無反応濃度場に対して実験的にこれらの特性を調べ, 従来のモデルと比較することにより, モデルの有効性を検証した。なお,  $\chi$  は変動濃度  $c$  に対するスカラー散逸率であり,

$$\chi \equiv 2D\nabla c \cdot \nabla c = 2D \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad (5)$$

で定義されることに注意されたい。

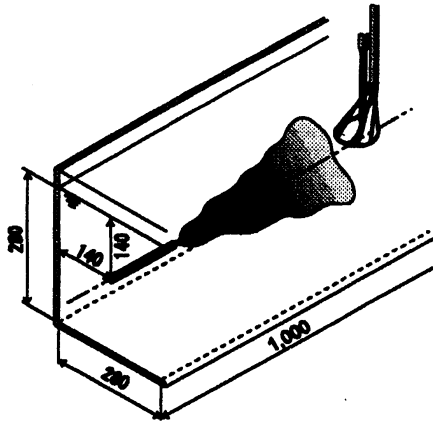


図1 実験装置概略図

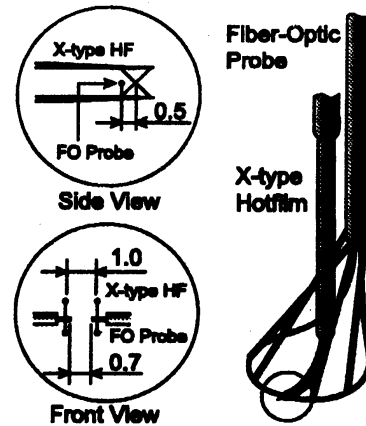


図2 速度2成分-濃度同時測定用複合プローブ

### 3 実験装置および実験条件

#### 3.1 水路および座標系

図1に本研究で用いた水槽の概略図を示す。この水槽のテストセクション寸法は縦280 mm × 横280 mm × 長さ1,000 mmであり、ノズルは水路断面の中央に位置している。座標系はノズル出口を原点とする円柱座標系で、軸方向に $x$ 、半径方向に $r$ をとっている。

噴流形成用のノズルは噴流出口直径 $d$ が2.0 mmの円形ノズルを使用し、噴流出口流速 $U_0$ はニードルバルブにより0～8.5 m/sの範囲で調整が可能で、面積式流量計(日本フローセルSCO-4型)により流量を調整することで出口流速を設定した。今回の測定では、 $U_0$ を3.2, 4.8, 6.4, 7.4, 8.5 m/sの5種類に設定し測定を行った。このときの噴流レイノルズ数 $Re$ ( $\equiv U_0 d / \nu$ )はそれぞれ、6,600, 9,900, 13,300, 15,500, 17,700である。なお、今回の測定で詳細に調査を行った位置は、 $x/d = 50$ の $r/bv = 0.00$ ( $bv$ : 軸方向平均速度の半径方向分布の半値幅)と $r/bv = 0.73$ の2点である。また、拡散流体は工業用染料C. I. Direct Blue 86( $Sc \approx 3,800$ )を含む水溶液であり、ノズルより水中に噴出される。その際の噴流出口濃度 $C_0$ は $3.0 \text{ kg/m}^3$ である。

#### 3.2 測定系

瞬時速度の測定にはX型熱膜プローブ(TSI 1243-20W)を使用した。この熱膜の受感部は $51 \mu\text{m}$ の円筒型白金フィルムで、受感部長さは1 mmである。また、2本の熱膜の間隔は1 mmである。一方、瞬時濃度の測定には吸光光度法[14]を原理とする光ファイバプローブを用いた。本研究で用いた染料の吸光スペクトルは、波長665 nm付近で最大値をとるため、波長670 nmの半導体赤色レーザー(日立HL6714G)を光ファイバプローブに入射した。レーザー光は光ファイバによりプローブ先端まで導かれ、検査部を通過する。検査部を通過したレーザー光は再び光ファイバにより光電子増倍管(浜松ホトニクスH6780-20)まで伝送され、電流-電圧変換回路により光強度に比例した電圧に変換される。なお、このプローブには入射側、受光側ともにコア径が $9.5 \mu\text{m}$ の光ファイバが用いられており、検査部において両者のファイバはおおよそ0.7 mmの間隔で対向している。これらのプローブを組み合わせた速度2成分-濃度同時測定用複合プローブの概略図を図2に示す。プローブ

表 1 各噴流レイノルズ数に対する乱流レイノルズ数の評価 ( $x/d = 50$ )

Re	$R_\lambda$	$R_\lambda$
	( $r/b_U = 0.00$ )	( $r/b_U = 0.73$ )
6,600	167	113
9,900	228	169
13,300	269	218
15,500	282	241
17,700	296	263

ブ同士の接触による破損を防ぐため、熱膜交差点と光ファイバプローブとの間隔  $\Delta$  を 0.5 mm とした。なお、本研究で詳細に調査を行う  $x/d = 50$  の中心軸上での  $\Delta$  に対する速度信号と濃度信号の時間遅れは、 $Re = 6,600$  の場合には 1.123 msec、 $Re = 17,700$  の場合には 0.423 msec であり、これらはいずれも積分時間スケールの  $10^{-1}$  程度のオーダーである。一方、複合プローブの空間分解能については、Taylor のマイクロスケールと同程度のオーダーであると判断される。なお、本測定でのサンプリング周波数は 20 kHz で、サンプリング点数は 262,144 点、サンプリング時間はおよそ 13 秒である。

また、本研究における噴流レイノルズ数  $Re$  と  $x/d = 50$  での乱流レイノルズ数  $R_\lambda$  ( $\equiv u'\lambda/\nu$ ;  $u'$ : 軸方向変動速度 r.m.s. 値,  $\lambda$ : Taylor のマイクロスケール) の関係を表 1 に示す。

## 4 実験結果

### 4.1 確率密度関数分布

条件付統計量の分布を示す前に、軸方向変動速度  $u$ 、半径方向変動速度  $v$  および変動濃度  $c$  の PDF 分布を示す。図 3 (a) から (c) には、 $u, v$  および  $c$  の  $x/d = 50$  の中心軸上における各種レイノルズ数に対する PDF 分布をそれぞれ重ねて示してある。横軸、縦軸ともにそれぞれの変動 r.m.s. 値  $u', v'$  および  $c'$  で正規化されている。なお、図中の  $\xi, \zeta, \psi$  はそれぞれ  $u, v, c$  に対するサンプル空間座標を示す。図より、軸方向速度と半径方向速度の PDF はほぼガウス分布 (図中の実線) と一致している。一方、濃度 PDF は、 $Re = 17,700$  の場合を除きやや負に歪んだ分布傾向を示していることがわかる。 $Re = 17,700$  の場合に関しては、ほぼガウス分布と一致する傾向が見られた。

### 4.2 条件付速度モデルの検証

Pope (1985) [16] によれば、速度と濃度の結合確率密度関数が結合ガウス分布であるという仮定を用いると、条件付速度は次式で表される。

$$\langle \tilde{u}_i | \psi \rangle = U_i + \frac{\langle u_i c \rangle}{c'^2} (\psi - C). \quad (6)$$

あるいは、変動速度成分  $u_i = \tilde{u}_i - U_i$  および変動濃度成分  $c = \tilde{c} - C$  を用いると

$$\langle u_i | \psi \rangle = \frac{\langle u_i c \rangle}{c'^2} \psi, \quad (7)$$

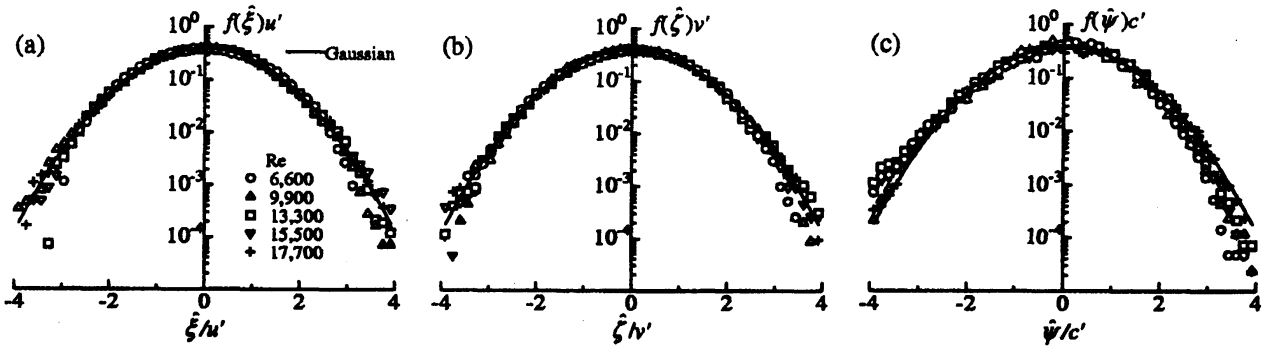


図3 確率密度関数分布, (a) 軸方向速度, (b) 半径方向速度, (c) 濃度

と変形される。ここで、 $\psi$  は変動濃度  $c$  に対するサンプル空間座標である。式 (7) より、変動濃度 r.m.s. 値  $c'$  と物質フラックス  $\langle u_i c \rangle$  で無次元化された条件付速度  $\langle u_i | \psi \rangle c' / \langle u_i c \rangle$  の分布は、無次元化変動濃度  $\psi / c'$  に対して傾きが 1 の線形性を示すことがわかる。

図 4 は、 $x/d = 50$  の中心軸上において、各種レイノルズ数に対する条件付軸方向速度  $\langle u | \psi \rangle$  の分布を重ねて示したものである。 $\langle u | \psi \rangle$  は変動濃度 r.m.s. 値  $c'$  および物質フラックス  $\langle uc \rangle$  で無次元化されている。また、図中に一点鎖線で示されるのが、Ferchichi & Tavoularis (2002) [8] による一様剪断乱流での温度場に対する測定結果 ( $R_\lambda = 253$ ,  $Pr \approx 0.7$ ) である。図より、分布は各種レイノルズ数に対して良い相似性を示しており、 $|\psi/c'| \leq 2$  の範囲において、式 (7) に示したように分布の傾きが 1 (図中の実線) になっていることがわかる。なお、 $|\psi/c'| \geq 2$  の領域で、分布のばらつきが見られるのはサンプル数が少ないことによるものと考えられる。

図 5 および図 6 は、 $x/d = 50$ ,  $r/b_U = 0.73$  において、各種レイノルズ数に対する条件付軸方向速度  $\langle u | \psi \rangle$  および条件付半径方向速度  $\langle v | \psi \rangle$  の分布を重ねて示したものである。 $\langle u | \psi \rangle$  については、中心軸上の場合と同様に、各種レイノルズ数によらず分布は良い相似性を示しており、 $|\psi/c'| \leq 2$  の範囲において、分布の傾きが 1 (図中の実線) になっている。また、 $\langle v | \psi \rangle$  に関しても、 $|\psi/c'| \leq 2$  の範囲においては、傾きが 1 (図中の実線) の良い相似性を示していることがわかる。なお、図中に破線で示されるのが、Overholt & Pope (1996) [9] が DNS を用いて計算した一様等方性乱流中の平均値勾配を持つパッシブスカラー場の計算値 ( $R_\lambda = 52$ ,  $Pr = 0.7$ ) で、一点鎖線で示されるのが、Ferchichi & Tavoularis (2002) [8] による測定値 ( $R_\lambda = 253$ ,  $Pr \approx 0.7$ ) である。本研究で得られた測定値 ( $Sc \approx 3,800$ ) は、これらの結果 ( $Pr \approx 0.7$ ) と拡散係数が大きく異なるにもかかわらず、分布形状がよく一致していることがわかる。

したがって、以上の結果から、Pope によって提案された式 (7) は、レイノルズ数やシュミッ

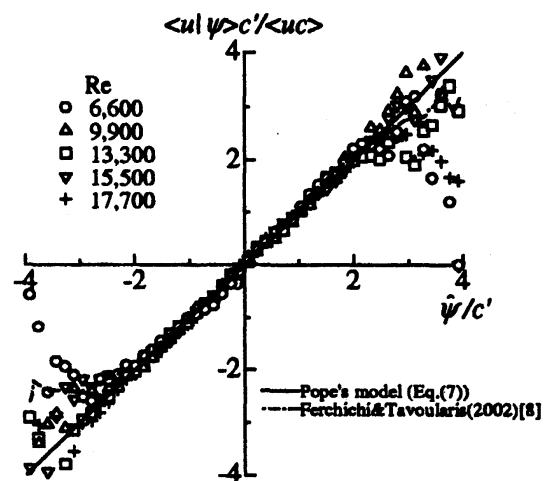


図4 条件付軸方向速度分布 ( $x/d = 50$ ,  $r/b_U = 0.00$ )

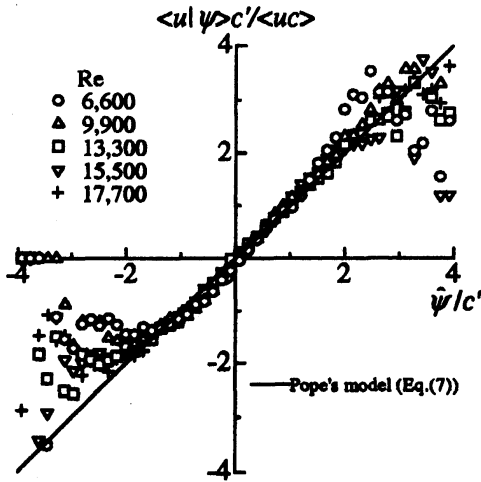


図5 条件付軸方向速度分布 ( $x/d = 50, r/b_U = 0.73$ )

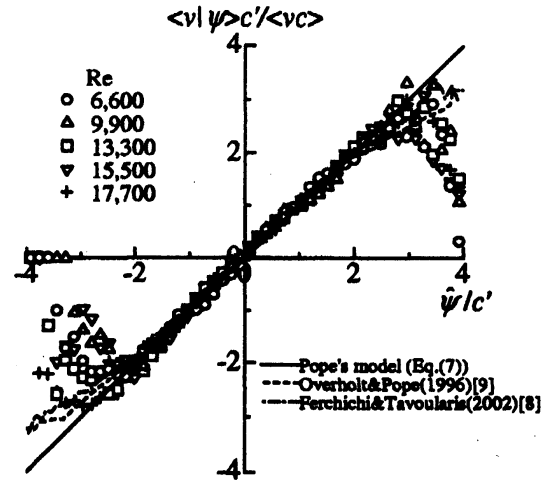


図6 条件付半径方向速度分布 ( $x/d = 50, r/b_U = 0.73$ )

ト数 (あるいはプラントル数) に関係なく、軸対称噴流の中心軸上とその近傍 ( $r/b_U = 0.73$ ) においてほぼ成立すると考えられる。

### 4.3 条件付スカラー散逸率モデルの検証

#### 4.3.1 スカラー散逸率の推定

条件付スカラー散逸率を求めるためには、スカラー散逸率  $\chi$  の瞬時値を推定する必要がある。この項では、スカラー散逸率の瞬時値の推定法について説明する。スカラー散逸率の瞬時値を定義式 (5) に従って求めるには、 $\partial c/\partial x_i$  の全ての成分を測定する必要がある。しかしながら、これは困難であるため、局所等方性の仮定がよく用いられる。したがって、本研究でも、局所等方性の仮定

$$\chi = 6D \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)^2, \quad (8)$$

により  $\chi$  を評価した。

実際のスカラー散逸率  $\chi$  の計算には、 $x$  方向の空間微分を Taylor の仮説、すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x} = -\frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (9)$$

により時間微分に置き換え、

$$\chi = 6D \left( \frac{\partial c}{\partial x} \right)^2 = \frac{6D}{U^2} \left( \frac{\partial c}{\partial t} \right)^2, \quad (10)$$

を用いて値を算出した。また、微分値の算出には、

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} = \frac{c_{i-2} - 8c_{i-1} + 8c_{i+1} - c_{i+2}}{12\Delta t}, \quad (11)$$

で示される Taylor の 5 点法を用いた。ここで、 $\Delta t$  はサンプリング間隔である。したがって、条件付スカラー散逸率  $\langle \chi | \psi \rangle$  は、以上の方法から求められるスカラー散逸率  $\chi$  を、濃度  $c = \psi$  で条件付

けを行うことにより求められる。なお、ここで注意しなければいけないことは、局所等方性の仮定と Taylor 仮説を用いて求めた値の精度である。これについては、Kailasnath *et al.* (1993) [11] が、液相軸対称噴流拡散場の中心軸上での濃度測定から得た条件付スカラー散逸率  $\langle \chi | \psi \rangle$  をもとに考察を行っている。彼らは、噴流レイノルズ数  $Re (\equiv U_0 d / \nu) = 2700, 3900$  で噴出される蛍光染料水溶液に対して、PLIF (Planar Laser-Induced Fluorescence) 法を用いて濃度測定を行った。その測定から得られた濃度場の二次元空間マップから、 $(\partial c / \partial x)^2$ 、 $(\partial c / \partial y)^2$  および  $(\partial c / \partial x)^2 + (\partial c / \partial y)^2$  を求め、それぞれの値から  $\langle \chi | \psi \rangle$  を推定した。ここで、 $x$  および  $y$  はそれぞれ流れ方向および半径方向座標である。その結果、 $(\partial c / \partial x)^2$ 、 $(\partial c / \partial y)^2$  および  $(\partial c / \partial x)^2 + (\partial c / \partial y)^2$  からそれぞれ推定した  $\langle \chi | \psi \rangle$  は、高濃度部分 ( $\hat{\psi} / c' \geq 4$ ) を除き、分布形状が非常によく一致していることが確認されている。また、Taylor 仮説の影響に関しては、 $(\partial c / \partial x)^2$  と  $(\partial c / \partial t)^2$  を用いてそれぞれ推定した  $\langle \chi | \psi \rangle$  を比較した結果、 $\hat{\psi} / c' \geq 2$  の領域を除き、分布形状がよく一致していることが確認されている。一方、 $\hat{\psi} / c' \geq 2$  の領域においては、Taylor 仮説を用いて推定した値の方がやや小さい値をとる傾向が見られる。ここで注意すべきことは、平均値からのずれが大きい濃度の部分では、条件付スカラー散逸率の正確な分布形状自体が不確かであり、Taylor 仮説を評価するには不十分に思われることである。

本研究は、Kailasnath *et al.* に比べ、噴流レイノルズ数が  $Re = 6,600 \sim 17,700$  と大きいのが、Kailasnath *et al.* の実験条件から乱流レイノルズ数を推定すると  $R_\lambda \sim 300$  となり、本研究とほぼ同程度であることから、本研究の条件付スカラー散逸率についても、中心軸上の測定値に関しては、平均値からのずれが大きい濃度の部分を除いて議論を行うのに十分な精度の分布が得られているものと予想される。

#### 4.3.2 条件付スカラー散逸率分布

図 7 は、 $x/d = 50$  の中心軸上において、各種レイノルズ数に対する条件付スカラー散逸率  $\langle \chi | \psi \rangle$  の分布を重ねて示したものである。縦軸には、平均スカラー散逸率  $\langle \chi \rangle$  で無次元化された  $\langle \chi | \psi \rangle$  をとっている。また、図中に点線で示されるのが、Jayesh & Warhaft (1992) [10] による平均温度勾配を持つ格子乱流での温度場に対する測定値 ( $R_\lambda = 54.4, Pr \approx 0.7$ )、一点鎖線で示されるのが、Kailasnath *et al.* (1993) [11] による液相軸対称噴流中の濃度の測定値 ( $Re = 3,900, Sc \approx 1,900$ )、そして、破線で示されるのが、Overholt & Pope (1996) [9] が DNS を用いて行った一様等方性乱流中での平均値勾配を持つパッシブスカラー場の計算値である ( $R_\lambda = 52, Pr = 0.7$ )。図より、研究者により条件付スカラー散逸率の分布が大きく異なっていることがわかる。本研究の測定値は、 $|\hat{\psi} / c'| \leq 2$  の範囲において、 $\langle \chi | \psi \rangle / \langle \chi \rangle = 1$  の平坦な分布をしており、また、レイノルズ数による分布の違いもほとんど見られない。本測定と Overholt & Pope の計算結果を比較すると、流れ場や拡散係数が大きく異なるにも関わらず、よく一致していることがわかる。

条件付スカラー散逸率の形状の違いに関して、Miller *et al.* (1995) [17] は、スカラー PDF  $f_c(\psi; x, t)$  の形状、特に、スカラー PDF の尾に依存すると報告している。もし、スカラー PDF がガウスの尾を持つならば、条件付スカラー散逸率は  $\hat{\psi}$  の値に関わらず平坦な分布形状を示し、一方、指数尾を持つならば、Jayesh & Warhaft の測定値のような頂点の丸い V 字形状を示すとしている。本研究における濃度 PDF は、図 3 (c) に示すように、ガウス分布に近い形状をしているため、条件付スカラー散逸率が平坦な分布形状になったものと考えられる。また、Jayesh & Warhaft の温度 PDF は指数尾を持ち、Overholt & Pope のスカラー PDF はガウス分布であることから、これらの研究者らの結果もまた、Miller *et al.* の報告と一致している。

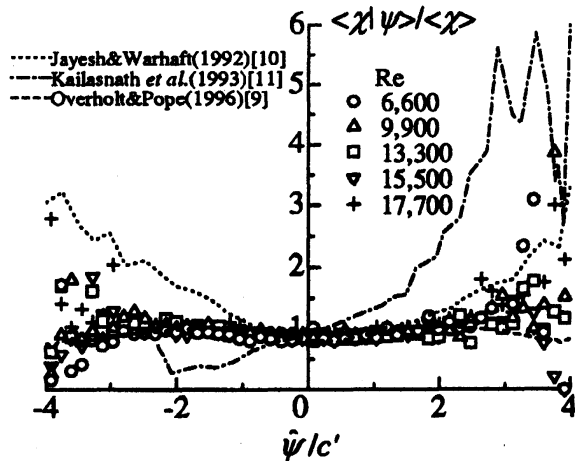


図7 条件付スカラー散逸率分布  
( $x/d = 50, r/b_U = 0.00$ )

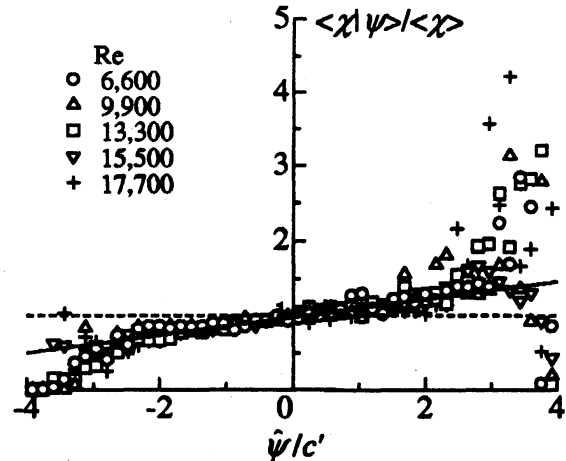


図8 条件付スカラー散逸率分布  
( $x/d = 50, r/b_U = 0.73$ )

一方、Taylor 仮説が  $x/d = 50, r/b_U = 0.73$  においても有効であると仮定した場合に、各種レイノルズ数に対して、条件付スカラー散逸率  $\langle \chi | \psi \rangle$  の分布を重ねて示したものが図8である。なお、図中の破線は  $\langle \chi | \psi \rangle / \langle \chi \rangle = 1$  の直線である。図より、中心軸上の分布とは異なり、負の変動から正の変動になるに従い、やや単調に増加している傾向が見られ、その傾きはレイノルズ数によらずおよそ 0.12 であった (図中の実線)。これは、先ほど述べた Miller *et al.* [17] の報告から推測すると、図には示していないが、この位置における濃度 PDF がガウス分布からやや逸脱しているために、条件付スカラー散逸率の分布もやや右肩上がりの分布になったものと考えられる。

以上により、条件付スカラー散逸率の分布は、各種流れ場や拡散場の状態に依存し、単純なモデル化が困難であるように思われる。

#### 4.4 条件付スカラーラプラシアンモデルの検証

条件付スカラーラプラシアン の推定は、第 4.3.1 項と同様の方法で行った。まず、変動濃度成分  $c$  のラプラシアン  $\nabla^2 c$  は次式で与えられる。

$$\nabla^2 c = \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_i} \quad (12)$$

ここで、局所等方性の仮定を用いると、

$$\nabla^2 c = 3 \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial x} \quad (13)$$

と書き換えられ、さらに、Taylor の仮説を用いると、

$$\nabla^2 c = \frac{3}{U^2} \frac{\partial^2 c}{\partial t \partial t} \quad (14)$$

と変形される。したがって、本測定では式 (14) により、条件付スカラーラプラシアン  $\langle D \nabla^2 c | \psi \rangle$  の推定を行った。



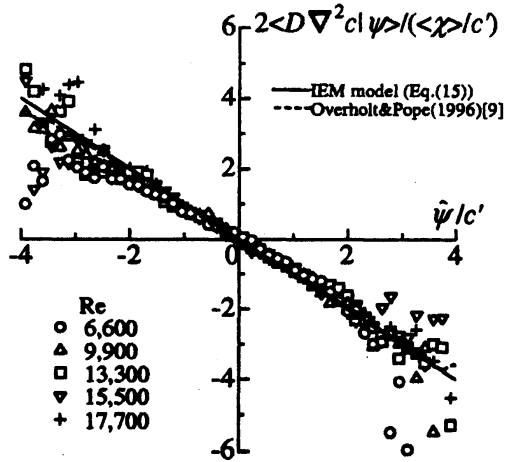


図9 条件付スカラーラプラシアン分布 ( $x/d = 50, r/b_U = 0.00$ )

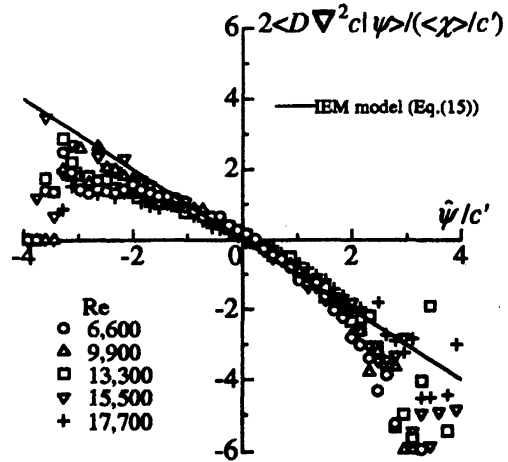


図10 条件付スカラーラプラシアン分布 ( $x/d = 50, r/b_U = 0.73$ )

図9は、 $x/d = 50$ の中心軸上において、各種レイノルズ数に対する条件付スカラーラプラシアン ( $\nabla^2 c|\psi$ ) の分布を重ねて示したものである。縦軸には、平均スカラー散逸率  $\langle \chi \rangle$  と変動濃度 r.m.s. 値  $c'$  で無次元化された  $\langle D\nabla^2 c|\psi \rangle$  をとっている。また、図中の実線は傾きが -1 の直線であり、破線は Overholt & Pope (1996) [9] による計算結果である。図より、本研究の条件付スカラーラプラシアンの測定結果は、各レイノルズ数に対してほぼ相似な分布を示しており、その分布の傾きは、 $|\hat{\psi}/c'| \leq 2$  の領域において、およそ -1 であることがわかる。このことは、条件付スカラーラプラシアンに対して、

$$\langle D\nabla^2 c|\psi \rangle = -\frac{1}{2} \frac{\langle \chi \rangle}{c'^2} (\psi - C), \quad (15)$$

と表されることを示し、現在、このモデルは IEM (Interaction by Exchange with the Mean) モデルと呼ばれている [18]。また、本研究の測定結果と Overholt & Pope の計算結果を比較すると、分布がよく一致していることがわかる。

一方、 $x/d = 50, r/b_U = 0.73$  における各種レイノルズ数に対する条件付スカラーラプラシアン ( $\nabla^2 c|\psi$ ) を重ねて示したものを図10に示す。図より、各レイノルズ数に対してほぼ相似な分布をしているものの、中心軸上の場合とは異なり、-1の傾きからやや逸脱していることがわかる。

以上をまとめると、条件付スカラーラプラシアンの分布は、軸対称噴流の中心軸上ではレイノルズ数に関係なく IEM モデルとほぼ一致するが、中心軸から離れた位置 ( $r/b_U = 0.73$ ) においては、IEM モデル方程式 (15) からやや逸脱する傾向が見られるようである。

## 5 結言

高シュミット数物質水溶液を用いた軸対称噴流拡散場中で、軸方向および半径方向瞬時速度と瞬時濃度の同時測定を行い、条件付速度や条件付スカラー散逸率、条件付スカラーラプラシアンの統計的特性について調査した。そして、従来から提案されているモデルと比較することにより、これらのモデルの有効性について検証・考察した。その結果、以下のような結論を得た。

1. 噴流軸上において、無次元化条件付軸方向速度  $\langle u|\psi \rangle c' / \langle uc \rangle$  の分布は、相対変動濃度  $\hat{\psi}/c'$  の

大きさが比較的小さい領域 ( $|\hat{\psi}/c'| \leq 2$ ) に対して傾きが1の良い線形性を示した。一方、噴流軸からやや離れた位置 ( $r/b_U = 0.73$ ) における条件付軸方向速度  $\langle u|\psi \rangle$  および条件付半径方向速度  $\langle v|\psi \rangle$  に関しても、同様の結果が得られた。これは、噴流の中心部付近 (中心軸から半値幅付近) において、速度と濃度の結合確率密度関数が結合ガウス分布的であるとするモデルが、比較的有用であることを意味する。

2. 条件付スカラー散逸率  $\langle \chi|\psi \rangle$  は、噴流軸上では  $\langle \chi|\psi \rangle / \langle \chi \rangle = 1$  の平坦な分布形状を示したが、噴流軸からやや離れた位置 ( $r/b_U = 0.73$ ) では、低濃度側から高濃度側に向かい単調増加する傾向が見られた。これらの分布形状の違いは、スカラー PDF の分布形状の違いによるものと予想され、 $\langle \chi|\psi \rangle$  のモデル化の際に、検討すべき点と考えられる。
3. 条件付スカラーラブラシアン  $\langle DV^2c|\psi \rangle$  は、噴流軸上では IEM モデルとほぼ一致するが、噴流軸からやや離れた位置 ( $r/b_U = 0.73$ ) では、IEM モデルからの逸脱が見られる。
4. 今回求めた3種類の条件付統計量は、いずれもレイノルズ数の違いによる分布形状への影響は見られなかった。また、本研究 ( $Sc \simeq 3,800$ ) と他の研究者ら ( $Pr \simeq 0.7$ ) を比較した結果、拡散係数が大きく異なるにも関わらず、分布形状にはそれほど大きな違いは見られなかった。

## 参考文献

- [1] Fox, R.O., *Computational models for turbulent reacting flows*, Cambridge University Press, 2003.
- [2] Dopazo, C. and O'Brien, E.E., An approach to the autoignition of a turbulent mixture, *Acta Astronautica*, 1, pp.1239-1266, 1974.
- [3] Pope, S.B., The probability approach to the modeling of turbulent reacting flow, *Combust. Flame*, 27, pp.299-312, 1976.
- [4] Pope, S.B., *Turbulent flows*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] Heinz, S., *Statistical mechanics of turbulent flows*, Springer-Verlag, 2003.
- [6] Li, J.D. and Bilger, R.W., A simple theory of conditional mean velocity in turbulent scalar-mixing layer, *Phys. Fluids*, 6, pp.605-610, 1994.
- [7] Lucas, J.F. et al., Conditional velocity statistics in turbulent jets, U. Frisch ed., *Advances in Turbulence VII*, pp.561-564, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] Ferchichi, M. and Tavoularis, S., Scalar probability density function and fine structure in uniformly sheared turbulence, *J. Fluid Mech.*, 461, pp.155-182, 2002.
- [9] Overholt, M.R. and Pope, S.B., Direct numerical simulation of a passive scalar with imposed mean gradient in isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, 8, pp.3128-3148, 1996.
- [10] Jayesh and Warhaft, Z., Probability distribution, conditional dissipation, and transport of passive temperature fluctuations in grid-generated turbulence, *Phys. Fluids A*, 4, pp.2292-2307, 1992.
- [11] Kailasnath, P. et al., Conditional scalar dissipation rates in turbulent wakes, jets, and boundary layers, *Phys. Fluids A*, 5, pp.3207-3215, 1993.
- [12] Saradi, K. et al., Conditional scalar dissipation statistics in a turbulent counterflow, *J. Fluid Mech.*, 361, pp.1-24, 1998.
- [13] Eswaran, V. and Pope, S.B., Direct numerical simulations of the turbulent mixing of a passive

- scalar, *Phys. Fluids*, **31**, pp.506-520, 1988.
- [14] 大倉洋甫 他, 吸光光度法—有機編—, 共立出版, 1984.
- [15] Vedula, P. *et al.*, Dynamics of scalar dissipation in isotropic turbulence: a numerical and modelling study, *J. Fluid Mech.*, **433**, pp.29-60, 2001.
- [16] Pope, S.B., PDF methods for turbulent reactive flows, *Prog. Energy Combust. Sci.*, **11**, pp.119-192, 1985.
- [17] Miller, R.S. *et al.*, Modeling and simulation of conditional scalar statistics in turbulent mixing and reaction, *10th Symp. Turbulent Shear Flows*, **2**, 1995.
- [18] Villermaux, J. and Devillon, J. C., Représentaion de la coalescence et de la redispersion des domaines de ségrégation dans un fluide par un modèle d'interaction phénoménologique, *Proc. 2nd Int. Symp. Chem. React. Eng.*, pp.1-13, 1972.