数理解析研究所講究録
第 1570 巻 2007 年 145-151

ZHONG による弱 PALAIS-SMALE 条件と COERCIVITY について

九州工業大学・工学部　鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

数学者の定義の一つに「コーヒーから定理をつくる人」というものがある. もちろん, これは冗談であるが, 非常に的を射ている. ただ, この定義に従うと, 筆者は数学者ではないことになるだろう. 筆者は定理をつくることよりも, 別証明や (反) 例をつくることが好きだからだ. —— 前置きが長くなったが, 本稿では, 筆者の最近の論文 [11] に関する解説を書こうと考えている. この論文の中で, Zhong [13, 14] の定理に関する別証明と例を与えている. つまり, 論文 [11] は最も筆者らしい論文の一つと言える. 論文 [11] では具体的に以下のことをしている.

- Ekeland の定理を一度しか用いない簡潔な別証明を与えた
- h の連続性が不要であることを示した
- Zhong の弱 Palais-Smale 条件がある意味「最弱」な Palais-Smale 条件であることを示した
- 完備性のないあるノルム空間における反例を与えた

なお, 講究録の趣旨には合わせるため, 通常の論文とは異なり, 筆者の主観的なコメントも記述している. 筆者の現時点での感覚なので, 的外れな意見もあるかも知れない. この点について, ご容赦願いたいのと同時に, 楽しんでいただければ幸いである. また, 本質的な部分に焦点をあてる為に, 本質的でない部分については, 若干強い条件を仮定している所もある.

2. 準備

本稿を通して, $\mathbb{N}$ を自然数全体からなる集合とする. $\mathbb{R}$ を実数全体からなる集合とする.

f をバナッハ空間 X で定義された実数値関数とする. f が $x \in X$ でガトー微分 (**Gâteaux differentiable**) 可能であるとは, X 上で定義された実数値

キーワード. Palais-Smale 条件, coercivity, Ekeland の変分原理, τ-distance.
住所. 〒 804–8550 北九州市戸畑区仙水町 1–1 九州工業大学工学部数学教室.
電子メール. `suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp`.

線形連続関数 $f'(x)$ が存在して, すべての $y \in X$ について

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t} = \langle f'(x), y \rangle$$

が成立することをいう. (この定義と異なるガトー微分の定義もあるので注意)
f が**コアシブ (coercive)** であるとは,

$$\lim_{r \to \infty} \inf_{\|x\| \geq r} f(x) = \infty$$

が成立することをいう. また, f が**弱パレイスメイル条件 (weak Palais-Smale condition, weak-PS)** [13] を満たすとは, 以下を満たす $[0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への非減少 (連続) 関数 h が存在することをいう:

- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)}\, dt = \infty$
- X の点列 $\{x_n\}$ について, $\{f(x_n)\}$ が有界でかつ $\lim_{n\to\infty} \|f'(x_n)\| \left(1 + h(\|x_n\|)\right) = 0$ を満たすならば, $\{x_n\}$ は収束する部分列を持つ

$h(t) = 0$ の場合, f は**パレイスメイル条件 (Palais-Smale condition, PS)** を満たすといい, $h(t) = t$ の場合, f は**セラミパレイスメイル条件 (Cerami-Palais-Smale condition, Cerami-PS)** を満たすという.

$$\text{PS} \quad \Longrightarrow \quad \text{Cerami-PS} \quad \Longrightarrow \quad \text{weak-PS}$$

という関係が成立する. 「Cerami-PS $\Longrightarrow$ weak-PS」は特別な場合であることから従う. 「PS $\Longrightarrow$ Cerami-PS」は条件の結論の部分が同じで, 仮定の部分については PS のが弱いことから従う.

定義 1 ([5]). (X, d) を距離空間とし, p を $X \times X$ から $[0, \infty)$ への関数とする. このとき, p が X 上の **τ-distance** であるとは $X \times [0, \infty)$ から $[0, \infty)$ への関数 η が存在して以下の 5 条件を満たすことをいう.

(τ1) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ がすべての $x, y, z \in X$ について成り立つ

(τ2) $\eta(x, 0) = 0$ と $\eta(x, t) \geq t$ がすべての $(x, t) \in X \times [0, \infty)$ について成り立ち, η は第 2 変数について凹かつ連続である

(τ3) $\lim_n x_n = x$ かつ $\lim_n \sup\{\eta(z_n, p(z_n, x_m)) : m \geq n\} = 0$ ならば $p(w, x) \leq \liminf_n p(w, x_n)$ がすべての $w \in X$ について成立する

(τ4) $\lim_n \sup\{p(x_n, y_m) : m \geq n\} = 0$ かつ $\lim_n \eta(x_n, t_n) = 0$ ならば $\lim_n \eta(y_n, t_n) = 0$ が成立する

(τ5) $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, x_n)) = 0$ かつ $\lim_n \eta(z_n, p(z_n, y_n)) = 0$ ならば $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$ が成立する

注意. 距離関数 d は一つの τ-distances である. また, 「$p(x,y)=p(y,x)$」, 「$p(x,x)=0$」, 「$p(x,y)=0 \Longrightarrow x=y$」等は一般には成立しない. [4–11] 等を参照のこと.

次の定理は Ekeland の変分原理と呼ばれる.

定理 2 (Ekeland [2, 3]). (X,d) を完備距離空間とし, f を X で定義された下半連続で, 下から有界な実数値関数とする. このとき, $u \in X$ と $\lambda > 0$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

$$f(v) \le f(u) - \lambda\, d(u,v)$$
$$f(w) > f(v) - \lambda\, d(v,w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\}$$

次の定理は τ-distance 版の Ekeland の変分原理である.

定理 3 ([5]). (X,d) と f は定理 2 と同じとする. p を X 上の τ-distance とする. このとき, $p(u,u)=0$ を満たす $u \in X$ に対して, 以下を満たす $v \in X$ が存在する.

$$f(v) \le f(u) - p(u,v) \tag{1}$$
$$f(w) > f(v) - p(v,w), \quad \forall w \in X \setminus \{v\} \tag{2}$$

注意. $\lambda\, d(\cdot,\cdot)$ は一つの τ-distance なので, 定理 2 は定理 3 の特別な場合と言える. この定理 3 は, 我々の主道具である.

3. Zhong の定理の別証明

この節では, 本稿の目的の一つである, Zhong の定理に対する別証明を与える.

定理 4 (Zhong [13]). f をバナッハ空間 X で定義されたガトー微分可能な下半連続実数値関数とする. h を $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への非減少関数で $\int_0^\infty \big(1+h(t)\big)^{-1} dt = \infty$ を満たす関数とする. もし, $\alpha := \lim_{r\to\infty} \inf_{\|x\|\ge r} f(x)$ が実数ならば, $\lim_n \|x_n\| = \infty$, $\lim_n f(x_n) = \alpha$ そして $\lim_n \|f'(x_n)\| \big(1 + h(\|x_n\|)\big) = 0$ を満たす X の点列 $\{x_n\}$ が存在する.

この定理の対偶もどきを取ると以下になる.

定理 5 (Zhong [13]). X と f は定理 4 と同じとする. f は下から有界であると仮定する. このとき, もし f が weak-PS を満たせば, f はコアシブである.

Zhong の証明は Ekeland の変分原理を何度も使う少し複雑なものであった. 以下では, 定理 3 を一度しか使わない別証明を与える.

定理 4 の証明 ([11]). 以下を示せば十分である. 「すべての $\varepsilon > 0$ に対して, $\|v\| \geq 1/\varepsilon$, $|f(v) - \alpha| \leq \varepsilon$, $\|f'(v)\| \left(1 + h(\|v\|)\right) \leq \varepsilon$ を満たす $v \in X$ が存在する」 $\varepsilon > 0$ を固定し, τ-distance p を

$$p(x,y) = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|x\|}^{\|x\|+\|x-y\|} \frac{dt}{1+h(t+1)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|y\|}^{\|y\|+\|x-y\|} \frac{dt}{1+h(t+1)}$$

で定義する. 実数値関数 g を

$$g(x) = \max\left\{f(x),\ \alpha - 2\varepsilon\right\}$$

で定義する. 明らかに, g は下半連続でかつ下から有界である. $r, r' \in \mathbb{R}$ を $1/\varepsilon < r < r'$, $1 < r$, $\inf_{\|x\| \geq r} f(x) > \alpha - \varepsilon$, $\int_r^{r'} \frac{dt}{1+h(t+1)} = 6$ を満たすようにとる. $u \in X$ を $\|u\| > r'$, $f(u) < \alpha + \varepsilon$ を満たすようにとる. $\|u\| > r$ なので, $g(u) = f(u)$ である. 定理 3 により, (1), (2) を満たす $v \in X$ が存在する. もし $\|v\| < r$ を仮定すると, (1) より,

$$\begin{aligned}
\alpha - 2\varepsilon \leq g(v) &\leq g(u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|v\|}^{\|v\|+\|u-v\|} \frac{dt}{1+h(t+1)} \\
&\leq g(u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\|v\|}^{\|u\|} \frac{dt}{1+h(t+1)} \leq g(u) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{r}^{r'} \frac{dt}{1+h(t+1)} \\
&= f(u) - 3\varepsilon < \alpha - 2\varepsilon
\end{aligned}$$

となり, 矛盾を得る. すなわち, $\|v\| \geq r > 1/\varepsilon$ である. よって $g(v) = f(v)$ を得て, これより

$$\alpha - \varepsilon < \inf_{\|x\| \geq r} f(x) \leq f(v) \leq f(u) < \alpha + \varepsilon$$

を得る. すなわち, $|f(v) - \alpha| \leq \varepsilon$ である. また (2) より $\|f'(v)\| \left(1 + h(\|v\|)\right) \leq \varepsilon$ を得る. □

注意. 証明すべき 3 つの条件 $\|v\| \geq 1/\varepsilon$, $|f(v) - \alpha| \leq \varepsilon$, $\|f'(v)\| \left(1 + h(\|v\|)\right) \leq \varepsilon$ のうち一番複雑なのが 3 番目の条件である. この 3 番目の条件が自動的に成立するように τ-distance を定義するのが, この証明の最も重要なポイントである. 次に, 閉集合 $\{x \in X : \|x\| \geq 1/\varepsilon\}$ から v を探すのであるが, 微分情報を得るために, 実際には, 開集合 $\{x \in X : \|x\| > 1/\varepsilon\}$ から v を探さなければならない. Ekeland の定理は閉集合にしか適用できないので, これは問題である. Ekeland の定理を適用する際, 集合 $\{x \in X : \|x\| \leq 1/\varepsilon\}$ が無意味になるように, u, r, r' そして τ-distance p を選ぶことで, この問題を解決した. すなわち, 問題の複雑で困難な部分を τ-distance p に負わせることにより, 見通しのよい簡潔な別証明を得ることができたのである.

4. h の連続性

Zhong [13] は定理 4 において「h の連続性」を仮定しているので, 厳密に言えば, 定理 4 は新しい定理であり, 従って, 上の証明は別証明ではない. しかしながら, 「h の連続性」は仮定してもしなくても同値であることが分かった. この節ではそれを証明する.

命題 6 ([11]). h を $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への非減少で $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)}\,dt=\infty$ を満たす関数とする. このとき, 非減少連続関数 θ で $\int_0^\infty \frac{1}{1+\theta(t)}\,dt=\infty$ と $h(t)\le\theta(t)$ を満たす関数が存在する.

証明. $[t]$ を t を越えない最大の整数とする. 関数 θ を

$$\theta(t)=\bigl(1-t+[t]\bigr)\,h\bigl([t]+1\bigr)+\bigl(t-[t]\bigr)\,h\bigl([t]+2\bigr)$$

で定義する. この関数は, h のグラフを 1 左に平行移動し, 間隔 1 で点を取り, それらの点を線分で結んだ折れ線をグラフとする関数である. 従って, $h(t)\le\theta(t)\le h(t+2)$ が成立する. よって

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+\theta(t)}\ge\int_0^\infty \frac{dt}{1+h(t+2)}=\int_2^\infty \frac{dt}{1+h(t)}=\infty$$

も成立する. □

同様に以下も成立する.

命題 7 ([11]). h を $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への非減少で $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)}\,dt<\infty$ を満たす関数とする. このとき, 非減少連続関数 θ で $\int_0^\infty \frac{1}{1+\theta(t)}\,dt<\infty$ と $\theta(t)\le h(t)$ を満たす関数が存在する.

従って, 我々の議論においては, 「h の連続性」を気にする必要はない.

5. 最弱な Palais-Smale 条件

論文 [11] を別なジャーナルに投稿したときに, リジェクトされたのであるが, そのときにエディタに次のように言われた. 「定理 4 のインパクトがあまりない」なぜなら「無限遠くで値が有限にとどまるならば, 傾きがゼロになる点列があるというのは, 直感的にも理論的にも明らかである」と. この貴重な意見を動機付けとして, 筆者は定理 4 のインパクトを上げるための例を 2 つつくった.

例 8 ([11]). $X:=\mathbb{R}$ とし, h を $[0,\infty)$ から $[0,\infty)$ への非減少で $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)}\,dt<\infty$ を満たす連続関数とする. X 上の微分可能で下から有界な実数値関数 f を

$$f(x)=\int_0^x \frac{-1}{1+h(\max\{t,0\})}\,dt$$

で定義する. このとき

$$\lim_{r\to\infty}\inf_{|x|\geq r} f(x)\in\mathbb{R} \quad \text{かつ} \quad |f'(x)|\left(1+h(|x|)\right)\geq 1,\ \forall x\in X$$

が成立する.

weak-PS の定義から条件 $\int_0^\infty \frac{1}{1+h(t)}\,dt=\infty$ を外す (それを「weak-PS もどき」と仮に名づける). すると, weak-PS もどきだけれども, コアシブでない例が必ず作れることを, この例は主張している. すなわち, weak-PS は「弱い PS」というだけではなく「最弱な PS」であるということを主張している.

定理 4 を, 使用者の立場から眺めれば, インパクトは弱いかも知れない — 少なくとも, 現時点では. しかしながら, 必要十分条件であることを鑑みれば, 定理 4 は理論的に充分な価値があると筆者は考えている.

6. 完備性の役割に関する考察

この節では, 定理 4 のインパクトを上げるための第 2 の例について述べる. 先ほどの「無限遠くで値が有限にとどまるならば, 傾きがゼロになる点列があるというのは, 直感的にも理論的にも明らかである」について, 命題が正しいのだから, 「明らか」と言われてしまえば議論の余地はない. そこで, ある完備でないノルム空間上で, 反例をつくってみた.

例 9 ([11]). 集合 X を

$$X=\{x : x \text{ は実数列で途中から } 0 \text{ の並びになる}\}$$

とし, X に ℓ_1 ノルム $\|x\|=\sum_{n=1}^\infty |x(n)|$ を入れる. $\mathbb{R}$ から $(0,\infty)$ への関数 f を

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\exp\left(2^n x(n)\right)$$

で定義する. すると, f は下半連続, 非連続, 凸, ガトー微分可能,

$$\lim_{r\to\infty}\inf_{\|x\|\geq r} f(x)=0\in\mathbb{R} \quad \text{かつ} \quad \|f'(x)\|\geq 1,\ \forall x\in X$$

を満たす.

f は PS を満たしているが, コアシブでないという反例である. 定理 4 が「直感的にも理論的にも明らか」とは, 今の筆者には見えない. 完備性に対するそこまでの感覚を筆者は身に付けていない.

X を完備化したものは ℓ_1 である. 逆に言えば, X は ℓ_1 を完備化する前のものである. 完備性があると, 凸関数の下半連続性と連続性が同値になるのだが, この例はその性質に対する反例にもなっている.

コンパクトと完備は, 存在性と強い関係のある, 非常によく似た条件であるが, 前者が強くて派手なのに対して, 後者は弱くて地味である. 筆者はこの弱くて地味な完備性という性質に — 何故か — 非常に魅力を感じ, 研究を重ねてきた. そして, 例9を思いついたときに, この「弱くて地味」という印象が少し変わった. 「地味」というのは同じであるが, 「弱い」というネガティブな印象から「縁の下の力持ち」というポジティブな印象に変わったのだ. また, 完備性のある空間とない空間の下でのガトー微分の意味は, 本質的に異なるのではないか, という妄想を現在筆者は抱いている.

7. 最後に

最後に, 本稿の主目的は別証明であるので, 「Zhong [13] による証明と本稿の証明を比較して頂きたい」と書かねばならないだろう. しかし, 言うまでもないが, 筆者は Zhong の結果を知った後で別証明を与えている. 何もない所から証明するのとは比較にならない程, これは楽なことである.

参考文献

[1] G. Cerami, *Un criterio de esistenza per i punti critici su varietà ilimitate*, Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A, **112** (1978), 332–336.

[2] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **47** (1974), 324–353.

[3] ———, *Nonconvex minimization problems*, Bull. Amer. Math. Soc., **1** (1979), 443–474.

[4] O. Kada, T. Suzuki and W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japon., **44** (1996), 381–391.

[5] T. Suzuki, *Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **253** (2001), 440–458.

[6] ———, *On Downing-Kirk's theorem*, J. Math. Anal. Appl., **286** (2003), 453–458.

[7] ———, *Several fixed point theorems concerning τ-distance*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 195–209.

[8] ———, *Generalized Caristi's fixed point theorems by Bae and others*, J. Math. Anal. Appl., **302** (2005), 502–508.

[9] ———, *Contractive mappings are Kannan mappings, and Kannan mappings are contractive mappings in some sense*, Comment. Math. Prace Mat., **45** (2005), 45–58.

[10] ———, *The strong Ekeland variational principle*, J. Math. Anal. Appl., **320** (2006), 787–794.

[11] ———, *On the relation between the weak Palais-Smale condition and coercivity by Zhong*, to appear in Nonlinear Anal.

[12] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[13] C.-K. Zhong, *A generalization of Ekeland's variational principle and application to the study of the relation between the weak P.S. condition and coercivity*, Nonlinear Anal., **29** (1997), 1421–1431.

[14] ———, *On Ekeland's variational principle and a minimax theorem*, J. Math. Anal. Appl., **205** (1997), 239–250.