数理解析研究所講究録
1570 巻 2007 年 112-117

Banach 空間における超平面対称変換と直交性から見た von Neumann-Jordan 定数について

松江工業高等専門学校　中村　元 (Gen Nakamura)
Matsue National College of Technology
広島女学院大学　橋本　一夫 (Kazuo Hashimoto)
Hiroshima Jogakuin University

1 Introduction

Banach 空間 X の von Neumann-Jordan 定数 ($C_{NJ}(X)$ と表記) に関する結果は最近 M. Kato, Y. Takahashi 等の結果がある ([8], [9], [10], [16], また, 古典的な結果としては, [3], [6] が挙げられる). 特に, 彼等は様々な空間で, $C_{NJ}(X)$ の値の計算と評価を与え, uniform non-square 性, super-reflexive 性, type , cotype のような X の性質が定数 $C_{NJ}(X)$ によって記述できること示した.

具体的, L_p に対して $C_{NJ}(L_p)$ の値を計算すると, $C_{NJ}(L_p)=2^{2/\min\{p,p'\}-1}$ (Clarkson[3]) が知られている. ここで, $1\leq p\leq\infty$, $1/p+1/p'=1$ とする. 一般に, $1\leq C_{NJ}(X)\leq 2$ で, もしも, X が Hilbert 空間となるための必要十分条件は $C_{NJ}(X)=1$ (Jordan-von Neumann[6]) であることが知られる. 本研究では, $C_{NJ}(X)$ の値が 1 に近いところでの Banach 空間 X の幾何学的性質について調べたい.

いま, 記号 $\widetilde{C}_{NJ}(X)$ で X 上で元のノルムと同値となる全てのノルムに関する値 $C_{NJ}(X)$ の下限を表すことにすると,「$\widetilde{C}_{NJ}(X)=1$ となるような Banach 空間は如何なる空間か?」という問題が考えられる. このような空間は Hilbert 空間か? e.t.c.. 結論を言えば, 我々は, これに対して, 反例を与えることができる ([13]), つまり, $\widetilde{C}_{NJ}(X)=1$ は成り立つが, X は如何なる Hilbert 空間にも位相同型にはならない Banach 空間の例を与えることができる.

他に, $\widetilde{C}_{NJ}(X)$ を用いた Banach 空間の特徴付けを与えた研究として, Y. Takahashi and M. Kato [17] のものがある. 彼等は $\widetilde{C}_{NJ}(X)$ の値によって L_p の部分空間 (或いは商空間) と位相同型となる Banach 空間の特徴付けを与えた.

本研究での我々の目的は, 超平面対称変換 (hyperplanary symmertry) の概念を導入して, これと Banach 空間に登場する種々の直交性の概念を通して $C_{NJ}(X)$ の値が 1 に近いところでの Banach 空間の幾何学的性質を調べることにある.

2 Preliminaries

X を実 Banach 空間とし, X^* をその双対空間とする. また, $B(X)$ を X の単位球 $B(X)=\{x\in X:\|x\|\leq 1\}$ と表し, $S(X)$ を X の単位球面 $S(X)=\{x\in X:\|x\|=1\}$ を表すことにする.

定義 1. X に対する *von Neumann-Jordan (NJ-)* 定数 $C_{NJ}(X)$ (Clarlson [3]) は次の不等式が成り立つ定数 C の最小値を表す:

$$\frac{1}{C}\leq\frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)}\leq C\quad\forall x,\forall y\in X,\ (x,y)\neq(0,0).$$

更に, $\widetilde{C}_{NJ}(X)$ で X 上で元のノルムと同値となる全てのノルムに関する値 $C_{NJ}(X)$ の下限を表すことにする.

$C_{NJ}(X)$ に対して次の結果が知られている:

(i) $C_{NJ}(X) = C_{NJ}(X^*)$ ([10]).

(ii) $1 \le C_{NJ}(X) \le 2$; X が Hilbert 空間となるための必要十分条件は $C_{NJ}(X) = 1$ (Jordan-von Neumann[6]).

(iii) $1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ とすれば, $C_{NJ}(L_p) = 2^{2/\min\{p,p'\}-1}$ (Clarkson[3])

次に本研究の鍵となる重要な概念「超平面対称変換」を導入する. いま, $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$, $x_0^*(x_0) \neq 0$ とすれば, この x_0^* に対して, 任意の $x \in X$ は次のように一意に分解される:

$$x = ax_0 + y \quad (a \in \mathbb{R},\ y \in \operatorname{Ker} x_0^*).$$

このとき, X 上の線形変換 $T: X \to X$ を次で定義する:

$$T(x_0, x_0^*)x = -ax_0 + y.$$

今後, この変換を対 (x_0, x_0^*) に関する超平面対称変換 (*hyperplanary symmertry*) と呼ぶことにする.

$T \in L(X)$, $T^2 = I$ は平易である. 次の事実は基本的である.

命題 1. $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$, $x_0^*(x_0) \neq 0$ とすると, 次は互いに同値である:

(i) $T(x_0, x_0^*)$ 等距離同形.

(ii) $\|T(x_0, x_0^*)\| = 1$.

(iii) $T(x_0, x_0^*)B(X) = B(X)$.

(iv) $\|x_0 + y\| = \|x_0 - y\|$ $(\forall y \in \operatorname{Ker} x_0^*)$

この命題から X が Hilbert 空間であれば, (i)〜(iv) は「x_0 と $\ker x_0^*$ が直交する」という条件と同値であることが条件 (iv) から容易に分かる.

命題 2. $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$, $x_0^*(x_0) \neq 0$ に対して, 次の関係が成り立つ.

$$\|T(x_0, x_0^*)\| = \|T(x_0^*, x_0)\|.$$

3 Orthogonalities and von Neumann-Jordan constant

本節では, Hilbert 空間では同値となる直交概念を導入し, von Neumann-Jordan 定数が 1 に近い Banach 空間の幾何学的性質を調べる.

次の最初の 3 つの直交概念は Hilbert 空間では同値であるが, 一般の Banach 空間では必ずしも同値にはならない ([4]).

定義 2. 二等辺的直交性 (*Isosceles othogonality*): $x,\ y \in X$ とする. $\|x+y\| = \|x-y\|$ が成り立つとき, x は y に *I-orthogonal* であると呼び, $x \perp_I y$ と表す.

定義 3. *Pythagoras* 的直交性 (*Pythagorean othogonality*): $x,\ y \in X$ とする. $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2$ が成り立つとき, x は y に *P-orthogonal* であると呼び, $x \perp_P y$ と表す.

定義 4. *Birkhoff* 的直交性 (*Birkhoff othogonality*): $x,\ y \in X$ とする. $\|x\| \le \|x + \lambda y\|$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ が成り立つとき, x は y に *B-orthogonal* (単に, *orthogonal*) であると呼び, $x \perp_B y$ (単に, $x \perp y$) と表す.

次の 2 つの定義は, それぞれ, 上記の Pythagoras の直交性, Birkhoff の直交性の一般化である.

定義 5. $x,\ y \in X,\ \varepsilon > 0$ とする.

$$(1-\varepsilon)\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \le \|x-y\| \le (1+\varepsilon)\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$$

が成り立つとき, x は y に *P_ε-orthogonal* であると呼び, $x \perp_{P_\varepsilon} y$ と表す.

定義 6. $x,\ y \in X,\ \varepsilon > 0$ とする. $(1-\varepsilon)\|x\| \le \|x + \lambda y\|$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$ が成り立つとき, x は y に *B_ε-orthogonal* であると呼び, $x \perp_{B_\varepsilon} y$ と表す.

注意. Y を Banach 空間 X の部分空間とすると次が成り立つ.

$$x \perp_P Y \ (\text{つまり}, x \perp_P y\ \forall y \in Y) \Longrightarrow x \perp_I Y,\ Y \perp_I x \Longrightarrow x \perp_B Y,\ Y \perp_B x.$$

命題 3 (see [12]). X を無限次元 Banach 空間とし, F を X の有限次元部分空間で, $\varepsilon > 0$ とすれば, $F \perp_{B_\varepsilon} x$ が成り立つ $x (\ne 0) \in X$ が存在する.

補題 A. F を Banach 空間 X の 2 次元部分空間とすれば, 任意の $x \in S(F)$ 対して, $x \perp_I y$, i.e., $\|x+y\| = \|x-y\|$ となるような $y \in S(F)$ が存在する.

$\rho_1(t) = \sqrt{\max\left(0, \frac{1}{t^2} + \frac{2}{t} - 2t^2\right)}$, $\rho_2(t) = \sqrt{t^2 + 2t - \frac{2}{t^2}}$ $(1 \le t \le 2)$ とおくと, $\rho_1,\ \rho_2 \in C([1,2])$, $\rho_1(1) = \rho_2(1) = 1$ で, しかも ρ_1 は単調減少関数, ρ_2 は単調増加関数となる.

ρ_1, ρ_2 に対して次の補題が得られる.

補題 B. $x,\ y \in S(X)$, $x \perp_I y$ とすれば, 次の不等式が成り立つ.

$$\rho_1(C_{NJ}(X))\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \le \|\alpha x - \beta y\| \le \rho_2(C_{NJ}(X))\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{for all } \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$$

$C_{NJ}(X)$ が 1 に近い Banach 空間では次の意味でピタゴラスの定理に近い定理が成り立つ.

補題 C. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ があって, $C_{NJ}(X) \leq \delta + 1$ とすれば, $x,\ y \in S(X)$ に対して, 次の性質が成り立つ:

$$x \perp_{B_\delta} y \Longrightarrow (1-\varepsilon)\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \leq \|\alpha x - \beta y\| \leq (1+\varepsilon)\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \forall\alpha,\ \forall\beta \in \mathbb{R}.$$

定理 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ 存在して, $C_{NJ}(X) \leq \delta + 1$ ならば, $x, y \in X$ に対して, 次の性質が成り立つ:

$$x \perp_{B_\delta} y \Longrightarrow x \perp_{P_\varepsilon} y.$$

補題 D. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1)$ 存在して, $C_{NJ}(X) \leq 1 + \delta$ ならば, $x, y \in X$ に対して, 次の性質が成り立つ:

$$x \perp_I y \Longrightarrow x \perp_{B_\varepsilon} y.$$

補題 E. $x_0^*(x_0) \neq 0$ である $x_0 \in X$, $x_0^* \in X^*$ と $\varepsilon > 0$ に対して, 次の 3 命題は同値である:

(i) $\|T(x_0, x_0^*)\| \leq 1 + \varepsilon.$

(ii) $T(x_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\varepsilon)B(X)$

(iii) $\dfrac{1}{1+\varepsilon}B(X) \subseteq T(x_0, x_0^*)B(X)$

定理 2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して, 次の 3 つの命題が成り立つ:

(i) $C_{NJ}(X) \leq 1 + \delta$ とすれば, $\forall x_0(\neq 0) \in X$, $\exists x_0^* \in X^*$ $(x_0^*(x_0) \neq 0)$:

$$\frac{1}{1+\varepsilon}B(X) \subseteq T(x_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\varepsilon)B(X).$$

(ii) $C_{NJ}(X) \leq 1 + \delta$ とすれば, $\forall x_0^*(\neq 0) \in X^*$, $\exists x_0 \in X$ $(x_0^*(x_0) \neq 0)$:

$$\frac{1}{1+\varepsilon}B(X) \subseteq T(x_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\varepsilon)B(X).$$

(iii) $C_{NJ}(X) \leq 1 + \delta$ とすれば, $\forall x_0, \forall y_0 \in S(X)$ $(x_0 \neq y_0)$, $\exists x_0^* \in X^*$ $(x_0^*(x_0 - y_0) \neq 0)$:

$$T(x_0 - y_0, x_0^*)x_0 = y_0, \quad \frac{1}{1+\varepsilon}B(X) \subseteq T(x_0 - y_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\varepsilon)B(X).$$

この定理の逆として次の定理が成り立つ.

定理 3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して, 次の 3 つの命題が成り立つ:

(i) $\forall x_0(\neq 0) \in X$, $\exists x_0^* \in X^*$ $(x_0^*(x_0) \neq 0)$:

$$\frac{1}{1+\delta}B(X) \subseteq T(x_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\delta)B(X),$$

ならば $C_{NJ}(X) \leq 1+\varepsilon$.

(ii) $\forall x_0^*(\neq 0) \in X^*$, $\exists x_0 \in X$ $(x_0^*(x_0) \neq 0)$:

$$\frac{1}{1+\delta}B(X) \subseteq T(x_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\delta)B(X),$$

ならば $C_{NJ}(X) \leq 1+\varepsilon$.

(iii) $\forall x_0, \forall y_0 \in S(X)$ $(x_0 \neq y_0)$, $\exists x_0^* \in X^*$ $(x_0^*(x_0 - y_0) \neq 0)$:

$$T(x_0 - y_0, x_0^*)x_0 = y_0, \quad \frac{1}{1+\delta}B(X) \subseteq T(x_0 - y_0, x_0^*)B(X) \subseteq (1+\delta)B(X),$$

ならば $C_{NJ}(X) \leq 1+\varepsilon$.

超平面対称変換を用いて, Hilbert 空間を次のように特徴付けることが可能である. 証明には命題 1 と前の定理 3 を使う.

定理 4. 次の命題は同値である:

(i) X は Hilbert 空間.

(ii) $\forall x_0(\neq 0) \in X$, $\exists x_0^* \in X^*$ $(x_0^*(x_0) \neq 0)$:

$$T(x_0, x_0^*)B(X) = B(X).$$

(iii) $\forall x_0^*(\neq 0) \in X^*$, $\exists x_0 \in X$ $(x_0^*(x_0) \neq 0)$:

$$T(x_0, x_0^*)B(X) = B(X).$$

(iv) $\forall x_0, \forall y_0 \in S(X)$ $(x_0 \neq y_0)$, $\exists x_0^* \in X^*$ $(x_0^*(x_0 - y_0) \neq 0)$:

$$T(x_0 - y_0, x_0^*)x_0 = y_0, \ T(x_0 - y_0, x_0^*)B(X) = B(X).$$

References

[1] J. Alonso and P. Martín, A counterexample to a conjecture of G. Zbăganu about the Neumann-Jordan constant, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **51**(2006), no.2, 135–141.

[2] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J. **1**(1935), 169–172.

[3] J. A. Clarkson, The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space, Ann. of Math. **38**(1937), 114–115

[4] R. C. James, Orthognality in normed linear spaces, Duke Math. J. **12**(1945), 291–302.

[5] R. C. James, Orthonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **61**(1947), 265–292.

[6] P. Jordan and J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math. **36**(1935), 719–723.

[7] M. Kato and K. Miyazaki, The von Neumann-Jordan constant for $l_p^n(L_p)$-spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. Math. Natur. Sci. **40**(1993), 23–27.

[8] M. Kato and Y. Takahashi, Uniform convexity, uniform non-squareness and von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, RIMS Kokyuroku (Kyoto Univ.) **939**(1996), 87–96.

[9] ———, On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997), 1055–1062.

[10] ———, Von Neumann-Jordan constant for Lebesgue-Bochner spaces, J. Inequal. Appl. **2**(1998), 89–97.

[11] M. Kato and Y. Takahashi and K. Hashimoto, on n-th von Neumann-Jordan constants for Banach spaces, Bull. Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. Math. **45**(1998), 25–33.

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.

[13] G. Nakamura and K. Hashimoto, An example of the Banach space X with $\widetilde{C}_{NJ}(X) = 1$ which can not be isomorphic to any Hilbert sapce, preprint.

[14] ———, On hyperplanary symmertry, some orthogonalities and von Neumann-Jordan constant in Banach spaces, preprint.

[15] S. Saejung, On James and von Neumann-Jordan constants and sufficient conditions for the fixed point property, J. Math. Anal. Appl. **323**(2006), no.2, 1018–1024.

[16] Y. Takahashi and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces, Nihonkai Math. J. **9**(1998), 155–169.

[17] Y. Takahashi and M. Kato, On subspaces of L_p and Jordan-von Neumann constant, Bull. Kyushu Inst. Tech. Pure Appl. Math. **48**(2001), 1–8.

[18] C. Yang and F. Wang, On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant, J. Math. Anal. Appl. **324**(2006), no.1, 555–565.