数理解析研究所講究録
第 1570 巻 2007 年 61-67

三角不等式の精密化とその応用

新潟大学理学部　斎藤吉助
新潟工科大学　三谷健一
九州工業大学工学部　加藤幹雄
千葉大学大学院人文社会科学研究科　田村高幸

1. 始めに

三角不等式は解析学において最も基本的な性質の一つであるが、最近、加藤–斎藤–田村 [5] は次の n 個の零でない元についての三角不等式の精密化を行った。

定理 A([5]) バナッハ空間 X 上の 0 でない元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1\leq j\leq n} \|x_j\| \\
&\leq \sum_{j=1}^n \|x_j\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|.
\end{aligned}$$

特に $n=2$ のとき

定理 B バナッハ空間 X 上の $\|x\| \geq \|y\|$ をみたす 0 でない元 x, y に対して次が成り立つ:

$$\|x+y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|y\|$$

(1)
$$\leq \|x\| + \|y\|$$

(2)
$$\leq \|x+y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|x\|.$$

定理 B において不等式 (1) は最初 Hudzik–Landes[4] によって与えられた。また、この定理は Maligranda[7] の最近の論文の中で見られる。また定理 B は、次の Dunkl-Williams の不等式と関係している ([3]): バナッハ空間 X 上の 0 でない元 x, y に対して

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leq \frac{4\|x-y\|}{\|x\| + \|y\|}.$$

本論文では定理 A の不等式よりもさらに精密化した三角不等式についての結果を述べる。

定理 ([10]). $n \geq 2$ とする。バナッハ空間 X 上の 0 でない元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j^*}{\|x_j^*\|}\right\|\right)(\|x_k^*\| - \|x_{k+1}^*\|)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|$$

$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{n}\frac{x_j^*}{\|x_j^*\|}\right\|\right)(\|x_{n-k}^*\| - \|x_{n-(k-1)}^*\|),$$

ここで $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ は $(\|x_1\|, \|x_2\|, \cdots, \|x_n\|)$ の non-increasing rearrangment である。また $x_0^* = x_{n+1}^* = 0$ とする。

2. 定理の略証

まず、定理Bの証明を与える。

定理Bの証明 初めに不等式(1)を示す。もし $\|x\| = \|y\|$ ならば明らか。$\|x\| > \|y\|$ とする。

$$u = (\|x\| - \|y\|)\frac{x}{\|x\|}$$

とおく。

$$x + y = \|y\|\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) + u$$

より

$$\begin{aligned}\|x+y\| &\leq \|y\|\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| + \|u\| \\ &= \|x\| + \|y\| - (2 - \|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\|)\|y\|.\end{aligned}$$

次に不等式(2)を示す．もし $\|x\| = \|y\|$ ならば明らか。$\|x\| > \|y\|$ とする。

$$p = (\|x\| - \|y\|)\frac{y}{\|y\|}$$

とおくと

$$x + y = \|x\|\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right) - p.$$

より

$$\begin{aligned}\|x+y\| &\geq \|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\| - \|p\| \\ &= \|x\| + \|y\| - (2 - \|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\|)\|x\|.\end{aligned}$$

(証明終)

次に3個の元の場合を考える。

定理C ([10]). バナッハ空間 X 上の $\|x\| \geq \|y\| \geq \|z\|$ をみたす0でない元 x, y, z に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\|x+y+z\| + \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|z\| \\
&\quad + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)(\|y\| - \|z\|) \\
&\leq \|x\| + \|y\| + \|z\| \qquad (3) \\
&\leq \|x+y+z\| + \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|x\| \qquad (4) \\
&\quad - \left(2 - \left\|\frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)(\|x\| - \|y\|).
\end{aligned}$$

証明の概略 初めに不等式(3)を示す。もし $\|x\| = \|y\| = \|z\|$ なら明らか。従って $\|x\| = \|y\| = \|z\|$ でないと仮定してよい。

$$u = (\|x\| - \|z\|)\frac{x}{\|x\|}, \quad v = (\|y\| - \|z\|)\frac{y}{\|y\|}$$

とおく。このとき

$$x + y + z = \|z\|\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right) + u + v$$

に注意。$v \neq 0$ のとき、定理Bより

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\| \;&\leq\; \|z\|\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\| + \|u\| + \|v\| \\
&\quad - \left(2 - \left\|\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right\|\right)\|v\| \\
&= \|x\| + \|y\| + \|z\| - \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|z\|
\end{aligned}$$

$$-\left(2-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|\right)(\|y\|-\|z\|).$$

$v=0$ のとき、$\|y\|=\|z\|$ より

$$\begin{aligned}\|x+y+z\| &\le \|z\|\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}+\frac{z}{\|z\|}\right\|+\|x\|-\|z\| \\ &= \|x\|+\|y\|+\|z\|-\left(3-\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}+\frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|z\| \\ &\quad -\left(2-\left\|\frac{x}{\|y\|}+\frac{x}{\|y\|}\right\|\right)(\|y\|-\|z\|).\end{aligned}$$

従って不等式 (3) が得られる。同様に不等式 (4) を示すことができる。

(証明終)

一般に n 個の元に対して、定理の証明は定理 B と定理 C により、 数学的帰納法から示される。詳細は [10] を参照のこと。

3. 三角不等式の応用

定理の応用は、実際に未だないが、バナッハ空間の幾何学的な構造として重要な uniformly non-ℓ_1^n の概念があるが、定理 A の応用として、次の事実を示すことが出来る。先ず、uniformly non-ℓ_1^n の定義を与える。

バナッハ空間 X に対して、$S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$, $B_X=\{x\in X:\|x\|\le 1\}$ とする。バナッハ空間 X が uniformly non-ℓ_1^n であるとは、ある ε $(0<\varepsilon<1)$ が存在し、任意の S_X 上の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して $\theta=(\theta_j)$, $\theta_j=\pm1$ が存在し

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|\le n(1-\varepsilon)$$

をみたすときを言う。$n=2$ のとき X を uniformly non-square と言う。

このとき、定理 A から次の結果を得る。

命題 ([5]). バナッハ空間 X に対して次が同値:

(i) X は uniformly non-ℓ_1^n.

(ii) ある ε $(0<\varepsilon<1)$ が存在し、任意の B_X 上の元 $x_1,\cdots,x_n$ に対して $\theta=(\theta_j)$, $\theta_j=\pm1$ が存在し

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\|\le n(1-\varepsilon). \tag{5}$$

実際、ある ε $(0<\varepsilon<1)$ が存在し、任意の S_X の元 $x_1,\cdots,x_n$ とある $\theta=(\theta_j)$, $\theta_j=\pm1$ に対して (5) が成り立つと仮定する。B_X の任意の元 $x_1,\cdots,x_n$ をとる。もし $\|x_{j_0}\|:=\min\{\|x_1\|\ldots,\|x_n\|\}\le 1/2$ ならば

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\| &\le \sum_{j\neq j_0}\|x_j\|+\|x_{j_0}\|\\ &\le n\left(1-\frac{1}{2n}\right).\end{aligned}$$

もし $\|x_{j_0}\|\ge\frac{1}{2}$ ならば、仮定から、ある $\theta=(\theta_j)$, $\theta_j=\pm1$ が存在し、(5) が $x_1/\|x_1\|,\cdots,x_n/\|x_n\|$ に対して成り立つ。定理 A の不等式より

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j x_j\right\| &\le \sum_{j=1}^{n}\|x_j\|-\left(n-\left\|\sum_{j=1}^{n}\theta_j\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\|x_{j_0}\|\\ &\le n-\frac{n\varepsilon}{2}=n\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

従って、$\varepsilon_0=\min\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2n}\}$ とおくことにより (i)⇒(ii) を得る。

References

[1] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 88–97.

[2] S. S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in Banach spaces*, J. Inequal. Pure and Appl. Math. **6**(5) (2005), Art. 129, pp. 46.

[3] C. F. Dunkl and K. S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 53–54.

[4] H. Hudzik and T. R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann. **294** (1992), 117–124.

[5] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces*, Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 451–460.

[6] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Uniform non-ℓ_1^n-ness of ψ-direct sums of Banach spaces $X \oplus_\psi Y$*, submitted.

[7] L. Maligranda, *Simple norm inequalities,* Amer. Math. Monthly **113** (2006), 256–260.

[8] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis I,* Ann. of Math. **67** (1958), 517–573.

[9] P. R. Mercer, *The Dunkl-Williams inequality in an inner product space*, Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 447–450.

[10] K. -I. Mitani, K. -S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl., **336** (2007), 1178–1186.

[11] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, *Classical and new inequalities in analysis,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.

[12] J. Pečarić and R. Rajić, *The Dunkl-Williams inequality with n elements in normed linear spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 461–470.

[13] S. Saitoh, *Generalizations of the triangle inequality,* J. Inequal. Pure Appl. Math. **4**(3) (2003), no. 3, Art. 62, pp. 5.