数理解析研究所講究録
第 1574 巻 2007 年 35-38

弱順序極小構造上での一変数関数の単調性定理について

阿南工業高等専門学校・一般教科 田中 広志
htanaka@math.okayama-u.ac.jp

概要

$\mathcal{M}=(M,<,+,\ldots)$ を順序群の弱順序極小な拡張とする．このとき，$\mathcal{M}$ 上 definable な一変数関数は，一般には順序極小構造と同じような意味での単調性定理は成立しない．しかしながら，$\mathcal{M}$ が非付値的な場合は成立することが Macpherson-Marker-Steinhorn や Wencel により示されている．このノートでは，彼らの結果を解説する．

1 はじめに

$\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ を端点を持たない全順序構造とする．M の部分集合 A が，任意の $a,b\in A$ と $c\in M$ に対して，$a<c<b$ ならば $c\in A$ をみたすとき，A は M の**凸集合**とよぶ．さらに $\sup A,\inf A\in M\cup\{-\infty,+\infty\}$ のとき，A は M の**区間**とよぶ．構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 集合 $D\subseteq M$ が，区間 (凸集合) の有限和で表せるとき，$\mathcal{M}$ は**順序極小構造** (**弱順序極小構造**) であるとよぶ．理論 $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ の任意のモデルが順序極小 (弱順序極小) になるとき，$\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ は**順序極小理論** (**弱順序極小理論**) とよぶ．順序極小構造に関する参考文献として [2], [4], 弱順序極小構造に関する参考文献として [3], [5], [6], [8] がある．

以後考える構造 $\mathcal{M}$ はすべて弱順序極小構造とする．

$C,D\subseteq M$ とする．任意の $c\in C$, $d\in D$ に対して $c<d$ のとき，$C<D$ と書く．対 $\langle C,D\rangle$ が，$C<D$ かつ $C\cup D=M$ でさらに D が最小元を持たないとき，M の**切断**とよぶ．$\mathcal{M}$ の definable 切断全体を $\overline{M}$ によって表すことにする．任意の $a\in M$ に対して，definable 切断 $\langle(-\infty,a],(a,+\infty)\rangle$ を考えることにより，$M\subseteq\overline{M}$ とみなす．さらに $\langle C_1,D_1\rangle<\langle C_2,D_2\rangle$ を $C_1\subsetneq C_2$ と定義することにより，$(M,<)$ を $(\overline{M},<)$ の部分構造とみなす．

M ($\overline{M}$) 上に，M ($\overline{M}$) の開区間を基本開集合として位相を入れる．

n を自然数とし，$A\subseteq M^n$ を definable とする．写像 $f:A\to\overline{M}$ において，集合 $\{\langle x,y\rangle\in A\times M: y<f(x)\}$ が definable になるとき，f は **definable** であるという．

$I\subseteq M$ を definable 凸開集合とし，$f:I\to\overline{M}$ を definable とする．このとき，任意の $a\in I$ に対して，a の開近傍 $J\subseteq I$ が存在して $f|J$ が狭義単調増加になるとき，f は I 上**局所狭義単調増加**という．同様に**局所狭義単調減少**，**局所一定**を定義できる．

定理 1 ([1])**.** $\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ を弱順序極小構造とする．$I\subseteq M$ を definable とし，$f:I\to\overline{M}$ を definable とする．このとき I の分割となる有限集合 X と definable 凸開集合 $I_0,\ldots,I_k$ が存在して，任意の $i\leq k$ に対して

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C64, 14P10.
Key words and phrases. Weakly o-minimal, monotonicity.

- $f|I_i$ は局所狭義単調増加,
- $f|I_i$ は局所狭義単調減少,
- $f|I_i$ は局所一定

のどれかひとつが成り立つ.

$\mathcal{M}=(M,<,+,\ldots)$ を順序群 $(M,<,+)$ の弱順序極小な拡張とする. [5] の定理 5.1 より, $\mathcal{M}$ はアーベル群でかつ可除になる. 切断 $\langle C,D\rangle$ が $\inf\{y-x : x\in C, y\in D\}=0$ をみたすとき, **非付値的**という. またそうでないとき, **付値的**という. 構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 切断が非付値的になるとき, $\mathcal{M}$ を**非付値的**という.

このノートでは次の単調性定理の証明を目的とする.

定理 2 ([8, 補題 1.4]). $\mathcal{M}=(M,<,+,\ldots)$ を順序群 $(M,<,+)$ の非付値的弱順序極小な拡張とする. $I\subseteq M$ を definable とし, $f:I\to\overline{M}$ を definable とする. このとき I の分割となる有限集合 X と definable 凸開集合 $I_0,\ldots,I_k$ が存在して, 任意の $i\le k$ に対して

- $f|I_i$ は狭義単調増加,
- $f|I_i$ は狭義単調減少,
- $f|I_i$ は一定

のどれかひとつが成り立つ.

定理 2 を使えば, 下記の定理などが示せる.

定理 3 ([7]). $\mathcal{M}=(M,<,+,\cdot,\ldots)$ を順序体 $(M,<,+,\cdot)$ の非付値的弱順序極小な拡張とする. $I\subseteq M$ を definable 凸開集合とし, $f:I\to\overline{M}$ を definable とする. このとき, f が I 上微分可能ならば導関数 $f':I\to\overline{M}$ は definable になる.

定理 4 ([7]). $\mathcal{M}=(M,<,+,\cdot,\ldots)$ を順序体 $(M,<,+,\cdot)$ の非付値的弱順序極小な拡張とする. $I\subseteq M$ を definable 凸開集合とし, $f:I\to\overline{M}$ を definable とする. このとき, 集合 $\{x\in I : f'(x)$ が $\overline{M}$ 上存在する $\}$ は定義可能になる.

2 定理 2 の証明

この章を通して $\mathcal{M}=(M,<,+,\ldots)$ を順序群 $(M,<,+)$ の非付値的弱順序極小な拡張とする.

補題 5. $H\le M$ を definable 部分群とする. このとき, $H=M$ または $H=\{0\}$ である.

(証明) $\{0\}\lneq H\lneq M$ となる definable 部分群 H が存在したとする. このとき $\mathcal{M}$ は弱順序極小より, H は凸集合である. $D:=\{y\in M : H<y\}$ とおく. このとき, $\langle M\setminus D, D\rangle$ は付値的な切断である. これは矛盾する. ■

補題 6. E を M 上の definable 同値関係とする. このとき, E は無限クラスを無限個持つことはない.

(証明) そうでないとする. すると無限クラスを無限個持つ M 上の definable 同値関係 E が存在する. $A:=\{x\in M : \exists y_1\exists y_2(y_1<x<y_2\wedge(\forall z\in(y_1,y_2)\to E(x,z)))\}$ とおく. 任意の $x,y\in A$ に対して,

$E'(x,y) \equiv E(x,y) \wedge E(x,M)$ は有界 $\wedge \exists z_1 \exists z_2 (x,y \in (z_1,z_2) \wedge \forall w \in (z_1,z_2) \to E(x,w))$ とおく．すると E の性質と $\mathcal{M}$ が弱順序極小であることから，E' は A 上の definable 同値関係で，E' の各クラスは凸かつ開であり，また E' はクラスを無限個持つ．

任意の E'-クラス B に対し，

$$\begin{aligned} I_B &:= \{b_1 - b_2 : b_1, b_2 \in B\}, \\ J_B &:= \{b \in I_B : 2b \in B\}, \\ X_1(B) &:= \{b \in B : \forall x \in B\ (x < b \to b - x \in J_B)\}, \\ X_2(B) &:= \{b \in B : \forall x \in B\ (x > b \to x - b \in J_B)\} \end{aligned}$$

とおく．

主張 1. I_B は凸集合である．

(主張 1 の証明) $a, b \in I_B$, $a < b$, $x \in (a,b)$ とする．すると，ある $a_1, a_2, b_1, b_2 \in B$ が存在して，$a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ と書ける．$a_2 < b_2$ と思う (他の場合も同様)．このとき，$a_1 - b_2 < a_1 - a_2 < x < b_1 - b_2$ より，$a_1 < x + b_2 < b_1$ となる．B は凸集合より，$x + b_2 \in B$ となる．よって，$x = (x + b_2) - b_2 \in I_B$ である．したがって，I_B は凸集合である．■

主張 2. $I_B = J_B$ となる E'-クラス B が存在する．

(主張 2 の証明) 任意の E'-クラス B に対して，$X_1(B) \subsetneq B$ かつ $X_2(B) \subsetneq B$ と仮定する．$X := \bigcup\{X_1(B) : B$ は E'-クラス $\} \cup \bigcup\{X_2(B) : B$ は E'-クラス $\}$ とおく．すると，$X = \{x \in A : \forall y \in A\ (E'(x,y) \wedge y < x \to x - y \in J_B)\}$ より，X は definable である．よって，$\mathcal{M}$ は弱順序極小より X は凸集合の有限和で表せる．それゆえ，$X_1(B) = X_2(B) = \emptyset$ となる E'-クラス B がとれる．$b \in B$ とする．$b \notin X_i(B)$ $(i \in \{1,2\})$ より，$a_1 < b < a_2$ かつ $a_2 - b, b - a_1 > J_B$ となる $a_1, a_2 \in B$ がとれる．このとき，$a_2 - a_1 = (a_2 - b) + (b - a_1) \geq 2\min\{a_2 - b, b - a_1\} > I_B$ となる．これは $a_2 - a_1 \in I_B$ に矛盾する．したがって，$X_1(B) = B$ または $X_2(B) = B$ となる E'-クラス B が存在する．すると $I_B = J_B$ となる．よって補題 6 は成り立つ．■

主張 2 より，$I_B = J_B$ となる E'-クラス B をとる．このとき，I_B は M の definable 部分群になる．さらに B は有界より，$I_B \neq M$ である．また $\{0\} \subsetneq I_B$ である．これは補題 5 に反する．■

(定理 2 の証明) $I \subseteq M$ を definable とし，$f : I \to \overline{M}$ を definable とする．定理 1 より，I の分割となる有限集合 X と definable 凸開集合 $I_0, \ldots, I_k$ が存在して，任意の $i \leq k$ に対して，$f|I_i$ は局所狭義単調増加，局所狭義単調減少，または局所一定のどれかになる．

$f|I_i$ は局所狭義単調増加と思う (他の場合も同様)．任意の $a, b \in I_i$ に対して，$E(a,b) \equiv a = b \vee (a < b \Rightarrow f|(a,b)$ は狭義単調増加$) \vee (b < a \Rightarrow f|(b,a)$ は狭義単調増加$)$ と定める．このとき，E は I_i 上の definable 同値関係になる．補題 6 より，E は無限クラスを無限個持つことはない．よって，I_i の分割となる有限集合 Y と definable 凸開集合 $J_0, \ldots, J_l$ が存在して，$f|J_j$ は狭義単調増加になる．したがって定理 2 は示された．■

参考文献

[1] R. D. Arefiev, *On the property of monotonicity for weakly o-minimal structures*, in Algebra and model theory II, edited by A. G. Pinus and K. N. Ponomarev, Novosibirsk, 1997, 8-15.

[2] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[3] M. A. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, J. Symbolic Logic 52 (1987), 116–128.

[4] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[5] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, *Weakly o-minimal structures and real closed fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 5435–5483.

[6] H. Tanaka and T. Kawakami, C^r strong cell decompositions in non-valuational weakly o-minimal real closed fields, Far East Journal of Mathematical Sciences, to appear.

[7] H. Tanaka and T. Kawakami, Completion and differentiability in weakly o-minimal structures, Proceedings of 34th Symposium on Transformation Groups (2007), 119–125.

[8] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, available at http://www.math.uni.wroc.pl/~rwenc.