数理解析研究所講究録
第1575巻 2008年 88-95



# 一般四元数群が自由に作用する3次元多様体から表現球面への等変写像の分類

京都産業大学理学部　牛瀧文宏 (Fumihiro Ushitaki)
Faculty of Science, Kyoto Sangyo University

## 1　序論

この小論は、京都府立医科大学大学院の長崎教授との共同研究中の内容に関するものである。特に断らない限り、$G$ を位相群とし、$X$ と $Y$ を $G$-空間とする。この小論を通し、写像は連続であるとする。

$G$-同変写像 $\varphi : X \to Y$ に対しては、$x \in X$ と $\varphi(x) \in Y$ のアイソトロピー部分群の間には常に $G_x \subset G_{\varphi(x)}$ なる関係が成り立つが、任意の $x \in X$ に対して、$G_x = G_{\varphi(x)}$ なる関係を成り立たせるような $G$-同変写像 $\varphi : X \to Y$ を $G$-等変写像（**$G$-isovariant map**）という。これは、「$X$ の同じ $G$-軌道上の二点 $x_1, x_2$ について、$\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ が成り立つならば、$x_1 = x_2$ が成り立つ」という条件と同値である。

2つの $G$-等変写像 $\varphi, \psi : X \to Y$ が $G$-ホモトックであるとする。$\varphi$ から $\psi$ への $G$-ホモトピー $F : X \times [0,1] \to Y$ が $G$-等変写像であるとき、$F$ を $\varphi$ から $\psi$ への $G$-等変ホモトピーといい、$\varphi$ と $\psi$ は $G$-等変ホモトピックであるという。この小論では、$G$-等変写像の $G$-等変ホモトピーの意味での分類問題を扱う。そこで、$X$ から $Y$ への $G$-等変写像の $G$-等変ホモトピー類を $[X, Y]_G^{\mathrm{isov}}$ と書く。

一方で、次の Borsuk-Ulam の定理は $G$-同変写像の存在をその主張の中に含む物である。

**Proposition 1.1 (Borsuk-Ulam Theorem).** $S^m$ と $S^n$ に位数2の巡回群 $C_2$ が対心的に作用しているとする。連続な $C_2$-写像 $f : S^m \to S^n$ が存在すれば $m \leqq n$ である。

通常、Borsuk-Ulam の定理の中に登場する写像 $f$ は $G$-同変写像であるが、どちらの空間への $G$-作用も自由であるから、$f$ は $G$-等変写像でもある。そのような方向性からの発展の一つとして、「同変写像」を「等変写像」に置き換えた形で、表現空間の間の $G$-等変写像に関して

Borsuk-Ulam 型の定理が成立することが A. G. Wasserman により示されている。なお、本稿では、このような群作用を持つ空間の間の同変写像や等変写像の存在から、群の作用する空間の次元に関する様々な不等式を導く形の定理を **Borsuk-Ulam** 型定理と呼ぶ。また、Borsuk-Ulam 型定理やその逆の形の定理に現れる、空間の次元に関する様々な不等式を **Borsuk-Ulam** 型不等式と呼ぶ。

**Proposition 1.2 ([9] isovariant Borsuk-Ulam Theorem).** $G$ を有限可解群とする。$V, W$ を $G$-表現とする。$G$-等変写像 $f : V \to W$ が存在すれば、

$$\dim V - \dim V^G \leqq \dim W - \dim W^G$$

が成り立つ。

その後、等変写像と Borsuk-Ulam 型の不等式の間の関係についての研究としては参考文献の [1] がある。続いて [4] において、有限群 $G$ に対し、自由 $mod|G|$ ホモロジー球面から $G$-表現球面への $G$-等変写像が存在すれば、Borsuk-Ulam 型の不等式が成立することが示された。同時にそれらの論文においては、[6] で議論されている同変障害理論を用いて Borsuk-Ulam 型定理の逆問題も考察された。すなわち [4] では $G$ が $n$ 次巡回群 $C_n$ の場合について、下で述べる Theorem 1.3 と同じ Borsuk-Ulam 型の不等式から $C_n$-等変写像の存在が導かれることを示し、それらの $C_n$-等変ホモトピー型での分類定理を与えた。

現在その一般化を準備中であり、その全体像は長崎氏との共同研究 [5] の中で述べられる。但し、その結果はすでに [2] や [3] において公開されていて参照可能である。そこから紹介すると、一般の場合 $G$-等変写像の存在に関しては、$G$ の $SW$ への作用の特異集合を $SW^{>1} = \bigcup_{\{1\} \neq H \leq G} SW^H$ で定義するとき、次の結果が成り立つ。

**Theorem 1.3 ([3, 5]).** $G$ を有限群、$M$ を自由 $G$-作用をもつ $m$-次元弧状連結 $C^\infty$ 閉多様体であるとする。$W$ を $G$ の忠実なユニタリー表現とする。不等式

$$\dim M + 1 \leqq \dim SW - \dim SW^{>1} \tag{1}$$

がなりたてば、$M$ から $G$-表現球面 $SW$ への $G$-等変写像 $f : M \to SW$ が存在する。ただし、$SW^{>1} = \emptyset$ の場合は $\dim SW^{>1} = -1$ とおく。 □

さらに、この設定の元での$G$-等変写像の分類問題が [5] にて研究され、その結果はすでに [2] や [3] において公開されている。中でも、分類問題に関する結論の内、Borsuk-Ulam 型の不等式 (1) がストリクトに成り立つときには、その結果は次のようにわかりやすい。

**Theorem 1.4 ([2, 3, 5]).** *Theorem 1.3* の条件の下、

$$\dim M + 1 < \dim SW - \dim SW^{>1}$$

が成り立てば、$M$ から $SW$ への任意の $G$-等変写像は $G$-等変ホモトピー同値である。 □

(1) 式で等号が成立している場合については、多様体 $M$ が向き付け可能で、$G$ の $M$ への作用が向きを保つ場合について、[4] で定義した多重写像度（multi-degree）を一般化することにより [5] にて研究され、その結果はすでに [2] において公開されている。

有限巡回群以外の具体的な群に対する等変写像の分類に関しては、[7] において $Q_8$-等変写像の場合を考察した。本稿ではその結果をさらに一般化して、一般四元数群 $Q_{2n}$ の場合の一つの分類問題として次の結果を示す。

**Theorem A .** $M$ を弧状連結で向き付けられた *3* 次元 $C^\infty$ 閉多様体で、向きを保つ自由 $Q_{2n}$-作用を持つものとする。また、$W$ を $Q_{2n}$ の忠実なユニタリー表現空間、$SW$ をその表現球面とする。このとき、不等式

$$\dim SW - \dim SW^{>1} \geqq 4$$

が成り立てば、$M$ から $W$ への $Q_{2n}$-等変写像が存在し、次を満たす。

(1). $\dim SW - \dim SW^{>1} = 4$ のとき $[M, SW]^{\mathrm{isov}}_{Q_{2n}} \cong \mathbb{Z}$ が成り立つ。

(2). $\dim SW - \dim SW^{>1} > 4$ のとき $[M, SW]^{\mathrm{isov}}_{Q_{2n}} \cong *$ が成り立つ。

この小論の続く節は次のような内容で構成される。２節では $Q_{2n}$ に関する基本的な事柄を述べる。それを用いて、定理 A が第３節で証明される。

## 2　$Q_{2n}$ について

$u$ を２以上の整数とする。$n = 2^u$ とおくとき、位数 $2n$ の一般四元数群 $Q_{2n}$ とは、

$$Q_{2n} = < a, b \ : \ a^n = 1,\ a^{n/2} = b^2,\ bab^{-1} = a^{-1} > .$$

で定義される群をいう。本論では $SW$ への $Q_{2n}$-作用が自由であるときの、$[M,SW]^{\mathrm{isov}}_{Q_{2n}}$ の構造解明を目標とするが、その前に、$Q_{2n}$ とそのユニタリー表現に関する事実を纏めておく。まずは、$Q_{2n}$ の部分群に関するものから始める。

**Lemma 2.1.** $Q_{2n}$ は次の部分群をもち、任意の部分群はこれらのいずれかに共役である。

(1). $<a>$ の部分群。これらはいずれも正規部分群である。とくに $<a^2>$ は $Q_{2n}$ の交換子群であり、$<a^{n/2}>=<b^2>$ は、$Q_{2n}$ の中心である。

(2). $<b>$。これは、位数 4 の部分群であり、任意の整数 $k$ に対して、$<a^{2k}b>$ と共役である。

(3). $<ab>$。これは、位数 4 の部分群であり、任意の整数 $k$ に対して、$<a^{2k-1}b>$ と共役である。

(4). $v$ を $0 \leqq v \leqq u-1$ を満たす整数とするとき、$<a^{2^v},b>$ と表される指数 $2^v$ の部分群。$v=0$ のときは $Q_{2n}$ と一致し、$v=1$ のときは正規部分群である。そして $v=u-1$ のときこの部分群は $<b>$ と一致する。それ以外の時、$<a^{2^v},b>$ は任意の整数 $k$ に対して $<a^{2^v},a^{2k}b>$ と共役である。

(5). $v$ を $0 \leqq v \leqq u-1$ を満たす整数とするとき、$<a^{2^v},ab>$ と表される指数 $2^v$ の部分群。$v=0$ のときは $Q_{2n}$ と一致し、$v=1$ のときは正規部分群である。そして $v=u-1$ のときこの部分群は $<ab>$ と一致する。それ以外の時、$<a^{2^v},ab>$ は任意の整数 $k$ に対して $<a^{2^v},a^{2k-1}b>$ と共役である。

□

$Q_{2n}$ の既約表現をリストアップすると、次のようになる。

**Lemma 2.2.** $Q_{2n}$ は次で定義される *4* つの *1* 次の既約表現 $\varepsilon,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ および、$(n/2-1)$ 個の *2* 次の既約表現 $\rho_k$ $(1 \leqq k \leqq n/2-1)$ を持つ。ただし、ここで $\omega = e^{2\pi i/n}$ である。

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\varepsilon$ | $1$ | $1$ |
| $\sigma_1$ | $-1$ | $1$ |
| $\sigma_2$ | $1$ | $-1$ |
| $\sigma_3$ | $-1$ | $-1$ |
| $\rho_k$ | $\begin{pmatrix} \omega^k & 0 \\ 0 & \omega^{-k} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^k$ |

□

このうち、3次元球面への作用が自由であるかどうかについては、次が成り立つことが容易に示される。

**Lemma 2.3.** 表現 $\rho_k$ を通して $Q_{2n}$ が次元球面 $S^3$ に作用しているとする。$k$ と $n$ の最大公約数を $\delta$ とおく。このとき、$S^3$ の任意の点 $x$ に対して、$G_x = < a^{n/\delta} > \cong C_\delta$ であり、従ってその作用が自由であるための必要十分条件は $k$ が奇数であることである。 □

## 3 Theorem A の証明

与えられた条件下での $Q_{2n}$-等変写像の存在は Theorem 1.3 より明らか。また、Theorem A (2) の主張については、Theorem 1.4 より明らか。以後、Theorem A (1) を証明する。

一般に群 $G$ と $G$-集合 $X$ に対し、各点でのイソトロピー群をすべて集めたものを $\mathrm{Iso}(X)$ と表す。このとき、次が成り立つ。

**Lemma 3.1.** *1* 次の既約表現 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ および、*2* 次の既約表現 $\rho_k$ $(1 \leqq k \leqq n/2-1)$ の表現空間をそれぞれ $T_{\sigma_1}, T_{\sigma_2}, T_{\sigma_3}$ そして $T_{\rho_k}$ とおく。このとき、次が成り立つ。

(1). $\mathrm{Iso}(T_{\sigma_1}) = \{< a^2, b >, Q_{2n}\}$.

(2). $\mathrm{Iso}(T_{\sigma_2}) = \{< a >, Q_{2n}\}$.

(3). $\mathrm{Iso}(T_{\sigma_3}) = \{< a^2, ab >, Q_{2n}\}$.

(4). $\mathrm{Iso}(T_{\rho_k}) = \{< a^{n/\delta} >, Q_{2n}\}$. ただし、$\delta = (k, n)$.

**Proof.** 一つ一つ確かめることで容易に証明される。 □

**Remark 3.2.** Lemma 3.1(4) において、$1 \leqq k \leqq n/2-1$ が成り立つから、$T_{\rho_k}$ のイソトロピー群として登場する $< a >$ の部分群は $< a^4 > \cdots < a^{n/2} >, \{e\}$ である。

$W$ を $Q_{2n}$ の忠実なユニタリー表現空間とする。まず、$W$ が等式 $\dim SW - \dim SW^{>1} = 4$ を満たすための条件を考える。$W$ を既約表現の直和に分解して、

$$W = s_0 T_\varepsilon \oplus s_1 T_{\sigma_1} \oplus s_2 T_{\sigma_2} \oplus s_3 T_{\sigma_3} \oplus (\bigoplus_{\ell:\mathrm{odd}} t_\ell T_{\rho_\ell}) \oplus (\bigoplus_{m:\mathrm{even}} t_m T_{\rho_m}) \tag{2}$$

とおく。ここで、各表現空間の前についた係数は 0 以上の整数であって、それぞれの表現を直和する個数を表す。今、Lemma 3.1 より、

$$W^{<b^2>} = s_0 T_\varepsilon \oplus s_1 T_{\sigma_1} \oplus s_2 T_{\sigma_2} \oplus s_3 T_{\sigma_3} \oplus (\bigoplus_{m:\text{even}} t_m T_{\rho_m})$$

が成り立つ。また、Lemma 2.1 より、$< a^{n/2} >=< b^2 >$ は $Q_{2n}$ の単位群の除く全ての部分群に含まれるから、$SW^{>1} = SW^{<b^2>}$ が成立する。よって、

$$\dim SW - \dim SW^{>1} = 4 \sum_{\ell:\text{odd}} t_\ell \tag{3}$$

が成立する。よって、(3) 式の値が 4 に等しくなるためには (4) 式はただ一つの奇数 $\ell$ に対して、

$$W = s_0 T_\varepsilon \oplus s_1 T_{\sigma_1} \oplus s_2 T_{\sigma_2} \oplus s_3 T_{\sigma_3} \oplus T_{\rho_\ell} \oplus (\bigoplus_{m:\text{even}} t_m T_{\rho_m}) \qquad (\ell : \text{odd}) \tag{4}$$

という形でなければならい。(逆に $\bigoplus_{\ell:\text{odd}} t_\ell T_{\rho_\ell}$ は $Q_{2n}$ が自由に作用する部分であって、この部分の直和因子の数が 2 以上になると、定理の主張の (1) の場合になってしまう。)

今

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =& \{H \in \mathrm{Iso}(W) | \dim SW^H = \dim SW^{>1}\}\\ \mathcal{A}/G =& \{(H) \mid H \in \mathcal{A}\}.\end{aligned}$$

とおく。等変写像の分類に関する我々の結果 ([5], [2]) によると、この設定の元、等変写像の等変ホモトピータイプによる分類は $\mathcal{A}/G$ にインデックスをもつ有理整数環の直和として表された。そこで、$\mathcal{A}/G$ の構造を決定すれば証明が終わる。ところが、次の命題に見るように、我々の設定の元、$\mathcal{A}$ に属するイソトロピー群はすべて $G$ の正規部分群になるので、$\mathcal{A}$ の方で考えれば十分である。

**Proposition 3.3.** $W$ を $Q_{2n}$ の忠実なユニタリー表現空間、$SW$ をその表現球面とする。$\dim SW - \dim SW^{>1} = 4$ が成り立つとき、$\mathcal{A}$ には $G$ の正規部分群がただ一つ含まれるのみである。

**Proof.** 場合分けして証明する。

● $s_0 = \cdots = s_3 = t_2 = t_4 = \cdots = t_{n/2-2} = 0$ のとき:

すなわち $W = T_{\rho_\ell}$ $(\ell : \text{odd})$ の場合である。このとき、$SW$ への $Q_{2n}$ 作用は自由で、$\dim SW^{>1} = -1$ となるから、$\mathrm{Iso}(W) = \{\{e\}, Q_{2n}\}$ から $\dim SW^H = \dim SW^{>1}$ として

適する $G$ の部分群 $H$ を選ぶと、$\mathcal{A}=\{Q_{2n}\}$ となる。

● $s_0,\ldots,s_3$ の中に少なくとも一つ 0 でない数があって、$t_2=t_4=\cdots=t_{n/2-2}=0$ のとき:

すなわち、$W=s_0T_\varepsilon\oplus s_1T_{\sigma_1}\oplus s_2T_{\sigma_2}\oplus s_3T_{\sigma_3}\oplus T_{\rho_\ell}$ ($\ell$ : odd) の場合である。このとき、$\mathcal{A}$ は係数が 0 でないところの 1 次元既約表現に対応するイソトロピー群の共通部分として得られるので、$\mathcal{A}$ としては、$\{Q_{2n}\},\{<a>\},\{<a^2,b>\},\{<a^2,ab>\},\{<a^2>\}$ のいずれかである。

● $t_2,t_4,\ldots,t_{n/2-2}$ の中に少なくとも一つ 0 でない数があるとき:

すなわち、$W$ が一般に (4) 式の形をしている場合である。このとき、$T_{\rho_2},T_{\rho_4},\ldots,T_{\rho_{n/2-2}}$ のところに現れるイソトロピー群は $1\leqq v\leqq u-1$ を満たすような一つの整数 $v$ に対して、$<a^{2^v}>$ という形をしている。自由でない 2 次既約表現から現れるイソトロピー群のうち、最小のもの (すなわち $v$ が最大となるもの) を考え、それを $H=<a^{2^w}>$ とおく。すると、$H$ は $\mathrm{Iso}(W)$ に登場する全てのイソトロピー群の部分群になっているので、$\dim SW^H=\dim SW^{>1}$ を満たす唯一のイソトロピー群である。よって、$\mathcal{A}=\{<a^{2^w}>\}$ である。 □

## 参考文献


[1] I. Nagasaki, *Isovariant Borsuk-Ulam results for pseudofree circle actions and their converse*, Trans. Amer. Math. Soc. **358** (2006), 743–757.

[2] I. Nagasaki, *Classifications of isovariant homotopy classes under a Borsuk-Ulam type type inequality*, Proceeedings of 34th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 97-102.

[3] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *On existence of isovariant maps under Borsuk-Ulam type inequalities*, RIMS kokyuroku **1569** (2007), 28–34.

[4] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Isovariant maps from free $C_n$-manifoflds to representation sheres*, preprint.

[5] I. Nagasaki and F. Ushitaki, *Classification of isovariant maps from free G-manifoflds to representation sheres*, in preparation.

[6] T. tom Dieck, *Transformation Groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 1987.

[7] F. Ushitaki, *Isovariant maps and Borsuk-Ulam type Theorems*, Proceeedings of 33th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 84-93.

[8] F. Ushitaki, *Isovariant homotopy classes from free $Q_{2n}$-manifolds to representation spheres*, Proceeedings of 34th Symposium on Transformation Groups, ed. by T.Kawakami, Wing Co. Ltd. (2007), 76-79.

[9] A. G. Wasserman, *Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem*, Topology Appl. **38** (1991),155–161.