数理解析研究所講究録
第 1575 巻 2008 年 7-21

Chevalley-Koszul 複体とモデル圏
(The Chevalley-Koszul complex and model categories)

大阪大学大学院 理学研究科　山崎 啓太 (Keita YAMASAKI)
Graduate School of Science, Osaka University

1 はじめに

M をコンパクト連結 Lie 群 G が作用する Lie 群，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．$\{e_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底，$v^a \in S\mathfrak{g}^*$ をその双対基底に対応する対称代数の生成元とするとき，Cartan 複体

$$(S\mathfrak{g}^* \otimes \Omega(M))_{\mathrm{inv}}, \quad 1 \otimes \mathrm{d} - \sum_a v^a \otimes \iota(e_a)$$

が M の同変コホモロジーを与えることはよく知られている．$\{c_j\}$ を $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の primitive な生成元，$\{p^j\}$ をその双対基底に Chevalley's transgression theorem によって対応する $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の生成元とすると，Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した．

主張 1. より "小さい" 複体

$$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \Omega(M)_{\mathrm{inv}}, \quad 1 \otimes \mathrm{d} - \sum_j p^j \otimes \iota(c_j)$$

が Cartan 複体と擬同型である．つまりこの複体は M の同変コホモロジーを与える． □

彼らがどのようにしてこの主張を発見したかを思い出す．$\pi : P \to B$ を主 G-束とするとき，Chevalley と Koszul により，複体

$$\Omega(B) \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota^{\wedge}(c_j),$$

は P の不変な微分形式による複体 $\Omega(P)_{\mathrm{inv}}$ と擬同型であることが示されている．Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は次を主張した．

主張 2. 下に有界な DG(differential graded) $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の圏において，上の主張は成り立つ．

そして下に有界な DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群と $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の圏の間に成り立つ Koszul 双対性を用いれば，主張 2 から主張 1 が導かれることを彼らは見出した．ただし Maszczyk-Weber [6] が [2] の主張 2 の証明にギャップがあることを指摘し，新たに証明を与えた．しかし Alekseev-Meinrenken [1] によって新しい証明にもギャップがあることを指摘されたが，彼らは主張 1 に新たな証明を与え，その "小さい" 複体を小 Cartan 複体と名付けた．[1] における証明は前の二つとは異なり，Koszul 双対性を用いずに直接主張 1 を示したのだが，次の二点で優れている．まず主張 1 を擬同型ではなく，ホモトピー同値まで示しているのである．次に G が作用する多様体の微分形式の空間の一般化として $\mathfrak{g}$-微分空間を定義して，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間に対して主張 1 を示した．微分形式は下に有界な $\mathfrak{g}$-微分空間であるから，有界条件を外したのである．以上をまとめると Alekseev-Meinrenken が示したことは次である．

主張 3 ([1, Theorem 4.2]). 任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体 $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ は $\mathcal{M}$ の Cartan 複体 $(S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}$ と，DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群の圏において，ホモトピー同値である．

一方 Alekseev-Meinrenken [1] は主張 2 の一般化である次の主張 4 を述べ，主張 3 と 4 が Koszul 双対性により関係することを示した．$W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ を Weil 代数とする．主 G-束 $P \to B$ に対して $\Omega(P)$ は，Chern-Weil 理論により，$W\mathfrak{g}$-加群になることから，$\Omega(P)$ の一般化として $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群を考える．そして任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して，彼らは複体

$$\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d} \otimes 1 + \sum_j p^j \otimes \iota(c_j),$$

を導入し Chevalley-Koszul 複体と呼んだ．

主張 4 ([1, Theorem 5.5]). 任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して，$\mathcal{N}$ の Chevalley-Koszul 複体は $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ と，DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の圏において，ホモトピー同値である．

しかし [1] の主張 4 の証明にはギャップがあることがわかった．本稿では主張 4 に新しい証明を与える．この主張と Koszul 双対性を使えば，下に有界な $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して，$\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体と Cartan 複体が擬同型であることが従う．ただし Koszul 双対性を使ったことにより，ホモトピーに関する情報と有界条件が失われていることがわかる．それを解消するため，本稿では有界条件を保つ Lefèvre [5] の圏同値を用いる．

DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群の圏 $\mathsf{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ がモデル圏になることはよく知られている．モデル圏は，fibration, cofibration, そして弱同値と呼ばれる射からなる特別な3つのクラスをもつことを思い出すと，例えば $\mathsf{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ においては，弱同値のクラスとして擬同型からなるクラスを定義すればよい．さらに Lefèvre [5] は cocomplete DG $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の圏 $\mathsf{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ がモデル圏になることを示した．$\mathcal{C}$ をモデル圏とすると，そのホモトピー圏 $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ とは弱同値のクラスでの局所化と定義する．Lefèvre [5] は，モデル圏の強力な道具立てを用いて，$\mathsf{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ と $\mathsf{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ のホモトピー圏が同値であることを示した．つまり，

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \simeq \mathsf{Ho}(\mathsf{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}).$$

が成り立つ．ここでDG空間は下に有界であることを仮定していないことを注意しておく．

本稿では次を示す．

主張 5. 任意の $\mathfrak{g}$-differential $W\mathfrak{g}$-module $\mathcal{N}$ に対して，cocomplete DG $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の圏において，弱同値 $\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ が存在する．

そして Lefèvre によって得られた圏同値により，主張3と5が関係することを示す．特に，主張5と Lefèvre の圏同値を使えば，$\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ (下に有界であることを仮定しない) に対して，$\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体と Cartan 複体が擬同型であることがわかることを注意しておく．

さて Alekseev-Meinrenken による主張3の証明において次の発見が重要なポイントであった ([1, Theorem 3.6])．次の Maurer-Cartan 型方程式

$$\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge\mathfrak{g}} + \sum_a v^a \otimes e_a = \sum_j p^j \otimes c_j$$

は次数0の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ が存在する．彼らはこの解を用いて主張3のホモトピー同値写像を構成した．同様に主張4, 5の証明においてもこの解が用いられる．さらに $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して，$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ の $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の構造を定めるときにも，この解が必要になる．ただし Alekseev-Meinrenken は2つの異なる解を用いて構成される写像はホモトピー同値であることを示している．本稿ではこれに倣って，任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して，$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ 上2つの異なる解を用いて構成される余加群の構造を考えたとき，この2つの加群がホモトピー同値であることを示す．

2 $\mathfrak{g}$-微分空間

$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}})$ を標数0の体 $\mathbb{F}$ 上の Lie 代数とする.

定義 2.1. $\mathfrak{g}$-空間とは DG 空間 $(\mathcal{M}, \mathrm{d}^{\mathcal{M}})$, そして線型写像

$$L^{\mathcal{M}},\ \iota^{\mathcal{M}} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathcal{M}),$$

の組であり, 以下の条件をみたすものとする：

- $\xi \in \mathfrak{g}$ に対して $L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\iota^{\mathcal{M}}(\xi)$ の次数はそれぞれ 0, -1,
- $[\mathrm{d}^{\mathcal{M}}, \iota^{\mathcal{M}}(\xi)] = L^{\mathcal{M}}(\xi)$,
- $[L^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = \iota^{\mathcal{M}}([\xi, \xi']_{\mathfrak{g}})$,
- $[\iota^{\mathcal{M}}(\xi), \iota^{\mathcal{M}}(\xi')] = 0$. □

定義 2.2. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とするとき, $\mathcal{M}_{\mathrm{inv}} := \bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker L^{\mathcal{M}}(\xi)$, $\mathcal{M}_{\mathrm{hor}} := \bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}} \ker \iota^{\mathcal{M}}(\xi)$, そして $\mathcal{M}_{\mathrm{basic}} := \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \cap \mathcal{M}_{\mathrm{hor}}$ とおく. □

$\wedge\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の外積代数として, その次数を

$$(\wedge\mathfrak{g}^*)^i := \wedge^i\mathfrak{g}^*,$$

と定める. また $S\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}^*$ の対称代数として, その次数を

$$(S\mathfrak{g}^*)^{2i} := S^i\mathfrak{g}^*, \quad (S\mathfrak{g}^*)^{2i+1} := 0$$

と定める. $\{e_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底, $\{e^a\}$ をその双対基底とする. 以下では

$$y^a := e^a \in \wedge^1\mathfrak{g}^*, \quad v^a := e^a \in S^1\mathfrak{g}^*$$

と表すことにする.

例 2.3. (a) G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, そして M を G が作用する多様体とする. $\mathfrak{g}$-微分空間の典型例は M 上の微分形式からなる空間 $\Omega(M)$ である. ただしその Lie 微分と contraction は G の作用の infinitesimal generator によるものとする.
(b) 外積代数 $\wedge\mathfrak{g}^*$ は余随伴表現 $L^{\wedge}$, contraction $\iota^{\wedge}(\xi)$, そして微分

$$\mathrm{d}^{\wedge} := \frac{1}{2}\sum_a y^a L^{\wedge}(e_a)$$

を考えることにより $\mathfrak{g}$-微分空間になる. □

ここから $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数と仮定する．$\mathfrak{g}$ の外積代数 $\wedge\mathfrak{g}$ の次数は

$$(\wedge\mathfrak{g})^{-i} := \wedge^i\mathfrak{g}, \quad (\wedge\mathfrak{g})^i := 0 \qquad (i \geq 0)$$

と定める．$\wedge\mathfrak{g}$ と $\wedge\mathfrak{g}^*$ の間の非退化な pairing $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を用いて，微分 $\partial : \wedge\mathfrak{g} \to \wedge\mathfrak{g}$ を

$$\langle \mathrm{d}^\wedge X, Y\rangle = \langle X, \partial Y\rangle, \quad X \in \wedge\mathfrak{g}^*,\ Y \in \wedge\mathfrak{g}.$$

によって定義する．同様に contraction $\iota^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\wedge\mathfrak{g})$ を

$$\langle \xi\cdot X, Y\rangle = \langle X, \iota^*(\xi)Y\rangle, \quad X \in \wedge\mathfrak{g}^*,\ Y \in \wedge\mathfrak{g}.$$

で定義する．$[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を Schouten 括弧とするとき，微分 ∂ と $[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を考えれば ($\wedge\mathfrak{g}$ ではなく) $(\wedge\mathfrak{g})[1]$ が DG Lie 代数になることを注意しておく．ここで $(\wedge\mathfrak{g})[1]$ は $(\wedge\mathfrak{g})[1]^i := (\wedge\mathfrak{g})^{i+1}$ なる次数付き空間とする．

$(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ を $\wedge\mathfrak{g}$ の随伴表現による不変部分空間とする．$\mathfrak{g}$ は簡約 Lie 代数であるから，$\wedge\mathfrak{g}$ と $\wedge\mathfrak{g}^*$ の間の pairing は $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の間の非退化な pairing に制限される．これより $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の積が $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の余積 Δ を導く．$x \in (\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ が primitive であるとは

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$$

を満たすこととする．$(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ においても primitive な元を同様に定義する．$\mathcal{P}, \mathcal{P}^*$ をそれぞれ $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$, $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の primitive な元からなる部分空間とすると，よく知られているように，$(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ と $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の間の pairing は $\mathcal{P}$ と $\mathcal{P}^*$ の間の pairing に制限される．よって $\mathcal{P}^*$ は $\mathcal{P}$ の双対空間になるので，$\{c_j\}$ を $\mathcal{P}$ の基底，$\{c^j\}$ をその双対基底とする．

$L^S(\xi)$ は余随伴表現を $S\mathfrak{g}^*$ の次数 0 の derivation に拡張したものとして，その不変部分空間を $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ と表す．Chevalley's transgression theorem によって c^j に対応する $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の元を p^j と表す (例えば [1] 参照). $\deg p^j = \deg c^j + 1$ であることを注意しておく．

3　Chevalley-Koszul 複体

$\mathfrak{g}$-微分代数とは次数付き結合代数 $\mathcal{A}$ であり，$\mathfrak{g}$-微分空間の構造を持ち d, $L(\xi)$ そして $\iota(\xi)$ がその積に関して derivation になるものとする．$\mathfrak{g}$-微分 $\mathcal{A}$-加群とは $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{N}$ であり，$\mathfrak{g}$-微分空間の準同型写像 $\mathcal{A}\otimes\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ をもつものとする．

例 3.1. Weil 代数 $W\mathfrak{g} := S\mathfrak{g}^* \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ において，Lie 微分として $L^W(\xi) := L^S(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^\wedge(\xi)$, contraction として $1 \otimes \iota^\wedge(\xi)$, そして微分として

$$\mathrm{d}^W := \sum_a (1 \otimes y^a) L^W(e_a) - 1 \otimes \mathrm{d}^\wedge + \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$$

を定めれば $\mathfrak{g}$-微分代数となる. □

任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して, horizontal projection

$$P_{\mathrm{hor}} := \prod_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a)y^a : \mathcal{N} \to \mathcal{N}_{\mathrm{hor}}$$

が構成できる. 定義から P_{hor} は $S\mathfrak{g}^*$ の作用と $L^{\mathcal{N}}(\xi)$ と可換である. $\mathrm{d}_{\mathrm{hor}} := P_{\mathrm{hor}} \circ \mathrm{d}^{\mathcal{N}}$ とすると, $\mathrm{d}_{\mathrm{hor}}$ は derivative であり, 任意の $x \in \mathcal{N}_{\mathrm{hor}}$ に対して, $\mathrm{d}_{\mathrm{hor}}x = (\mathrm{d} - \sum_a y^a L^{\mathcal{N}}(e_a))x \in \mathcal{N}_{\mathrm{hor}}$ が成り立つことを注意しておく. また $\mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ 上の次数 0 の自己準同型写像

$$\alpha := \sum_a \iota^{\mathcal{N}}(e_a) \otimes y^a, \quad \beta := \sum_a y^a \otimes \iota^{\wedge}(e_a)$$

を定める. α, β は nilpotent であるから e^α, e^β は有限和となる.

[1] における Proposition 5.3 にはギャップがあるので, 次のように修正する.

命題 3.2. $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とする. $\mathcal{N}_{\mathrm{hor}} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*$ を

$$1 \otimes \mathrm{d}^{\wedge} + \mathrm{d}_{\mathrm{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^{\wedge}(e_a) - \sum_a (1 \otimes y^a)L(e_a), \tag{1}$$

を微分とする DG 空間と考える. ここで $L(\xi) := L^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes L^{\wedge}(\xi)$. このとき

$$e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} : \mathcal{N}_{\mathrm{hor}} \otimes \wedge\mathfrak{g}^* \to \mathcal{N}, \quad x \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|(|x|+1)}\eta \cdot x$$

は DG 空間の同型写像になる. □

証明. まず

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(e^\alpha)(1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)) &= 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi) + [\alpha, 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)] + \frac{1}{2}[\alpha, [\alpha, 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi)]] + \dots \\ &= \iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi).\end{aligned}$$

同様に

$$\mathrm{Ad}(e^{-\beta})(\iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1) = \iota^{\mathcal{N}}(\xi) \otimes 1 + 1 \otimes \iota^{\wedge}(\xi).$$

よって

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\beta}} & \mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^* & \xrightarrow{e^{-\alpha}} & \mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^* \\
{\scriptstyle \iota^{\mathcal{N}}(\xi)\otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota^{\mathcal{N}}(\xi)\otimes 1 + 1\otimes\iota^{\wedge}(\xi)} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\iota^{\wedge}(\xi)} \\
\mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^* & \xrightarrow[e^{-\beta}]{} & \mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^* & \xrightarrow[e^{-\alpha}]{} & \mathcal{N} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*
\end{array}$$

が可換であることがわかる．$\bigcap_{\xi\in\mathfrak{g}}\ker(1\otimes\iota^{\wedge}(\xi))=\mathcal{N}\otimes\mathbb{F}=\mathcal{N}$ に注意すると，2つの同型写像

$$\mathcal{N}_{\rm hor}\otimes\wedge\mathfrak{g}^* \xrightarrow{e^{-\beta}} (\mathcal{N}\otimes\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm hor} \xrightarrow{e^{-\alpha}} \mathcal{N}$$

を得る．$(\mathcal{N}\otimes\mathfrak{g}^*)_{\rm hor}$ において，$e^{-\alpha}=\prod_a(1-\iota^{\mathcal{N}}(e_a)\otimes y^a)$ は

$$1\otimes\prod_a(1-y^a\iota^{\wedge}(e_a))=1\otimes\prod_a\iota^{\wedge}(e_a)y^a=1\otimes P^{\wedge}_{\rm hor}$$

と一致する．これから $e^{-\alpha}\circ e^{-\beta}(x\otimes\eta)=(-1)^{|\eta|(|x|+1)}\eta\cdot x$ であることがわかる． □

$$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}):=(\mathcal{N}_{\rm hor}\otimes\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv}$$

とする．$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$ を微分 (1) の $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ への制限とする．つまり

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}=1\otimes\mathrm{d}^{\wedge}+\mathrm{d}_{\rm hor}\otimes 1-\sum_a v^a\otimes\iota^{\wedge}(e_a).$$

$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ は微分を $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$, $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群構造を $(-1)^{|c|}(1\otimes\iota^{\wedge}(c))$ とする DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群と考える．ここで $\iota^{\mathcal{M}}:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathcal{M})$ を代数の準同型写像 $\iota^{\mathcal{M}}:\wedge\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(\mathcal{M})$ に拡張しておく．一方 $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とすれば，$\mathcal{N}_{\rm inv}$ は DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群になる．ただし $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群構造は $\iota^{\mathcal{N}}(c)$ とする．α,β は $L(\xi)$ と可換であるから，e^{α}, e^{β} も $L(\xi)$ と可換である．よって $e^{-\alpha}\circ e^{-\beta}$ の $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ への制限が DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群の同型写像であることがわかる．つまり $e^{-\alpha}\circ e^{-\beta}$ の制限も同じ記号で書くと，

$$\mathrm{d}^{\mathcal{N}}\circ e^{-\alpha}\circ e^{-\beta}=e^{-\alpha}\circ e^{-\beta}\circ\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \tag{2}$$

が成り立つ．

定義 3.3. $\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とする．$\mathcal{N}$ の Chevalley-Koszul 複体とは DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群

$$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}):=\mathcal{N}_{\rm basic}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\rm inv},\quad \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}:=\mathrm{d}^{\mathcal{N}}\otimes 1+\sum_j p^j\otimes\iota^{\wedge}(c_j),$$

である．ただし $(\wedge\mathfrak{g})_{\rm inv}$-加群構造は $1\otimes\iota^{\wedge}(c)$ と定める． □

$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ と $K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ を結び付けるため，Alekseev-Meinrenken [1] に倣って，ある Maurer-Cartan-型方程式を考える．$(\wedge\mathfrak{g})^-:=\bigoplus_{i>0}\wedge^i\mathfrak{g}$ とするとき，Alekseev-Meinrenken は次を示した ([1, Theorem 3.6] 参照):

$$\partial f+\frac{1}{2}[f,f]_{\wedge\mathfrak{g}}+\sum_a v^a\otimes e_a=\sum_j p^j\otimes c_j \tag{3}$$

は次数 0 の canonical な解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ が存在する．ここで $\wedge\mathfrak{g}$ における微分 ∂，Schouten 括弧 $[\cdot,\cdot]_{\wedge\mathfrak{g}}$ を

$$\partial(p \otimes y) := p \otimes \partial y, \quad [p \otimes y, p' \otimes y']_{\wedge\mathfrak{g}} := pp' \otimes [y, y']_{\wedge\mathfrak{g}}.$$

と定義することにより $(S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ 上に拡張する．以下では (3) の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ をひとつ固定しておく．また $f = \sum_i f_i' \otimes f_i'' \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して，$(N_{\mathrm{hor}} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ 上に $\iota(f)$ を

$$\iota(f)(x \otimes \eta) := \sum_i f_i' x \otimes \iota^\wedge(f_i'')\eta.$$

で定義する．f は nilpotent であるから，$e^{\iota(f)} : (\mathcal{N}_{\mathrm{hor}} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \to K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ は有限和であることを注意しておく．

$K_{\mathfrak{g}}'(\mathcal{N}) := (\mathcal{N}_{\mathrm{hor}} \otimes \wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は微分，$(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群構造を，それぞれ

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}' := e^{-\iota(f)} \circ \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)}, \quad (-1)^{|c|}(1 \otimes \iota^\wedge(c)).$$

と定めた DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群と考える．

ここで

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes \mathrm{d}^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes \mathrm{d}^\wedge - \iota(\partial f + \frac{1}{2}[f, f]_{\wedge\mathfrak{g}}) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a)$$

となる ([1, Lemma 2.2] 参照)．(3) の解 f を用いれば

$$e^{-\iota(f)} \circ (1 \otimes \mathrm{d}^\wedge) \circ e^{\iota(f)} = 1 \otimes \mathrm{d}^\wedge - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a).$$

であり，$K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ の微分が $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}} = 1 \otimes \mathrm{d}^\wedge + \mathrm{d}_{\mathrm{hor}} \otimes 1 - \sum_a v^a \otimes \iota^\wedge(e_a)$，であったことを思い出せば，

$$\begin{aligned} e^{-\iota(f)} \circ \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)} &= \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} - \iota(\sum_j p^j \otimes c_j - \sum_a v^a \otimes e_a) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a) \\ &= 1 \otimes \mathrm{d}^\wedge + \mathrm{d}_{\mathrm{hor}} \otimes 1 - \sum_j p^j \otimes \iota^\wedge(c_j) + \sum_a \iota(\iota^*(e^a)f)L^\wedge(e_a) \end{aligned} \tag{4}$$

が成り立つことがわかる．

次の写像

$$\tilde{i} : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \hookrightarrow K_{\mathfrak{g}}'(\mathcal{N}) \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta|} z \otimes \eta.$$

を定義する．$x \in \mathcal{N}_{\mathrm{basic}}$ に対しては $\mathrm{d}_{\mathrm{hor}} x = \mathrm{d}^{\mathcal{N}} x$ であることに注意すれば

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}' \circ \tilde{i} = \tilde{i} \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} \tag{5}$$

がわかる．よって $\tilde{\imath}$ はコチェイン写像である．さらに $\tilde{\imath}$ は DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の準同型写像であることがわかる．

定義から $e^{\iota(f)} : K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \to K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ は DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の同型写像であるから，写像 Ψ を次の合成

$$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{\imath}} K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{\iota(f)}} K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\alpha}\circ e^{-\beta}} \mathcal{N}_{\mathrm{inv}},$$

とすれば，Ψ はコチェイン写像である．実際，(2) と (5) によって

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} &= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{\imath} \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}} \\
&= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \mathrm{d}'_{\mathfrak{g}} \circ \tilde{\imath} \\
&= e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{\imath} \\
&= \mathrm{d}^{\mathcal{N}} \circ e^{-\alpha} \circ e^{-\beta} \circ e^{\iota(f)} \circ \tilde{\imath} = \mathrm{d}^{\mathcal{N}} \circ \Psi.
\end{aligned}$$

明らかに Ψ は DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群の準同型写像である．

さらに次を得るが，この証明は [1] の Theorem 4.2 の証明とパラレルであるから省略する．

定理 3.4. $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数，$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

$$\Psi : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|}(e^{\iota(f)}\eta) \cdot z$$

は DG $(\wedge\mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$-加群としてホモトピー同値写像である． □

4 小 Cartan 複体

4.1 小 Cartan 複体

定義 4.1. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．$\mathcal{M}$ の Cartan 複体とは DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群

$$C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}}, \quad \mathrm{d}^C_{\mathfrak{g}} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_a v^a \otimes \iota^{\mathcal{M}}(e_a),$$

であり，そのコホモロジー $H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \mathrm{d}^C_{\mathfrak{g}})$ が $\mathcal{M}$ の同変コホモロジーの Cartan モデルと呼ばれる． □

注意 4.2. $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とする．G をコンパクト連結 Lie 群，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数，そして M を G が作用している多様体とする．このとき古典的な結果として $H_{\mathfrak{g}}(\Omega(M))$ は M の同変 (Borel) コホモロジーと同型である． □

定義 4.3. $\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．$\mathcal{M}$ の小 Cartan 複体とは DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes \mathcal{M}_{\mathrm{inv}}, \quad \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}^{C} := 1 \otimes \mathrm{d}^{\mathcal{M}} - \sum_j p^j \otimes \iota^{\mathcal{M}}(c_j),$$

であり，そのコホモロジー $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) := H(\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}), \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}^{C})$ が同変コホモロジーの小 Cartan モデルと呼ばれる． □

Goresky-Kottwitz-MacPherson [2] は $\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であると主張した．Maszczyk-Weber [6] により [2] におけるその証明にはギャップが指摘されたが，Alekseev-Meinrenken [1] は次を示した．

定理 4.4 ([1, Theorem 4.2]). $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数，$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．方程式 (3) の任意の解 $f \in (S\mathfrak{g}^* \otimes (\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ に対して，合成写像

$$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{e^{\iota(f)}} C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としてホモトピー同値写像である．特に，これは同型写像 $\tilde{H}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} H_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ を導く． □

[2], [6], そして [1] において指摘されているように，この定理と Koszul 双対性を使えば，下に有界な $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して，$\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ と $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ が擬同型であることがわかる．逆に，定理 3.4 と Koszul 双対性を使えば，下に有界な $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して，$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ が擬同型であることがわかる．これより，Koszul 双対性を使えば，ホモトピーの情報と有界条件を失うことがわかる．そのため本稿では，Lefèvre [5] によって得られた有界条件を保つ圏同値を用いる．

4.2 Lefèvre の圏同値

この節では Lefèvre [5] によって得られた結果を復習する．[4] に良い解説があることを注意しておく．

A を augmented DG 代数とし，d^A を微分，$\mu^A : A \otimes A \to A$ を積，そして $\varepsilon^A : A \to \mathbb{F}$ を augmentation とする．C を cocomplete augmented DG 余代数とし，d^C を微分，$\Delta^C : C \to C \otimes C$ を余積，そして $\varepsilon^C : \mathbb{F} \to C$ を augmentation とする．ここで余代数 C が cocomplete であるとは，C が

$$C \to C^{\otimes n} \to (C/\mathbb{F})^{\otimes n}, \quad n \geq 2,$$

の kernel の和集合と一致することとする．ただし最初の写像は余積を n 回繰り返したもの，最後の写像は標準的な射影とする．$\tau : C \to A$ を

twisting cochain とする．つまり次数 1 の $\mathbb{F}$-線型写像であり，

$$\mathrm{d}^A \circ \tau + \tau \circ \mathrm{d}^C = \mu^A \circ (\tau \otimes \tau) \circ \Delta^C, \quad \varepsilon^A \circ \tau \circ \varepsilon^C = 0$$

を満たすものとする．DG 右 A-加群 L に対して，$1 \otimes \Delta^C$ を余積，

$$\mathrm{d}^L \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}^C + (\mu^L \otimes 1) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (1 \otimes \Delta^C).$$

を微分とする cocomplete DG 右 C-余加群 $L \otimes C$ を構成し，$L \otimes_\tau C$ と表すことにする．このとき，$\mathsf{Mod}\, A$ を DG 右 A-加群の圏，$\mathsf{Comc}\, C$ を cocomplete DG 右 C-余加群の圏とすると，関手

$$? \otimes_\tau C : \mathsf{Mod}\, A \to \mathsf{Comc}\, C$$

を得ることがわかる．同様にして, cocomplete DG 右 C-余加群 M に対して，

$$\mathrm{d}^M \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{d}^A - (1 \otimes \mu^A) \circ (1 \otimes \tau \otimes 1) \circ (\Delta^M \otimes 1).$$

を微分とする DG 右 A-加群 $M \otimes A$ が構成でき，$M \otimes_\tau A$ と表す．このとき関手

$$? \otimes_\tau A : \mathsf{Comc}\, C \to \mathsf{Mod}\, A.$$

を得る．Lefèvre は $(? \otimes_\tau C, ? \otimes_\tau A)$ が随伴関手の組であることを示した ([5, Lemme 2.2.1.2] 参照).

以下では $\tau : C \to A$ は acyclic であると仮定する．つまり adjunction morphism $(A \otimes_\tau C) \otimes_\tau A \to A$ が擬同型写像であるとする．よく知られているように，$\mathsf{Mod}\, A$ は擬同型写像を弱同値，全射準同型写像を fibration と定めるとモデル圏になる．Lefèvre は次を示した．

定理 4.5 ([5, Théorèm 2.2.2.2]). (a) $\mathsf{Comc} C$ は $f \otimes_\tau A$ が擬同型となる射 f を弱同値，単射準同型写像を cofibration と定めるとモデル圏になる．
(b) 関手 $? \otimes_\tau C$, $? \otimes_\tau A$ は quasi-inverse equivalence

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod} A) \rightleftarrows \mathsf{Ho}(\mathsf{Comc} C),$$

を導く．ここでモデル圏 $\mathcal{C}$ に対して，ホモトピー圏 $\mathsf{Ho}(\mathcal{C})$ とは弱同値のクラスによる局所化とする． □

$A = (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$, $C = (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ とする．よく知られた結果を 2 つ復習する．まず $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ における primitive な元からなる部分空間 $\mathcal{P}^*$ に対して，$(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong \wedge\mathcal{P}^*$ が成り立つ．次に $\tilde{\mathcal{P}}^* := \mathcal{P}^*[-1]$ を transgression により

$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の部分空間と同一視すると，$(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong S\tilde{\mathcal{P}}^*$ が成り立つ．以上に注意して，

$$\tau : (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \cong \wedge\mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^* \to S\tilde{\mathcal{P}}^* \cong (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

と定義する．ここで $\wedge\mathcal{P}^* \to \mathcal{P}^*$ は自然な射影，$\mathcal{P}^* \to S\tilde{\mathcal{P}}^*$ は transgression とする．このとき τ は acyclic twisting cochain になる．よって定理 4.5(b) により，$? \otimes_\tau (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$, $? \otimes_\tau (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は圏同値

$$\mathsf{Ho}(\mathsf{Mod}(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \simeq \mathsf{Ho}(\mathsf{Comc}(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}) \tag{6}$$

を導くことがわかる．

4.3 Chevalley-Koszul 複体との関係

Δ を $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ の余積とすると，$\mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は $1 \otimes \Delta$ を余積とする cocomplete DG $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群になる．一方，定理 3.4 の用語を用いて，写像 $\Upsilon : \mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \to \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ を合成写像

$$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \xrightarrow[\sim]{e^{\beta}\circ e^{\alpha}} K_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow[\sim]{e^{-\iota(f)}} K'_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\tilde{\Pi}} \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$$

として定義する．このとき合成写像

$$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{1\otimes\Delta} \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \xrightarrow{\Psi\otimes 1} \mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}.$$

は $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ の余積となることがわかる．よって $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ は cocomplete DG $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群になる．

ただし Ψ, Υ は Maurer-Cartan 型方程式 (3) の解を用いて定義されるので，$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ 上の余加群構造はその解の選び方による．次節では $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ において異なる解を用いて定義された 2 つの余加群はホモトピックであることを示す．

$\Upsilon \circ \Psi = 1$ が成り立つことに注意すると，Ψ, Υ は DG $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群の準同型写像になることがわかる．さらに定理 3.4 より Ψ, Υ が擬同型であることも従う．以下では Ψ, Υ が $\mathsf{Comc}\ (\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ において弱同値であることを示す．

filtered C-余加群 M が admissible であるとは，filtration $\{M^i\}$ が exhaustive，かつ $M^0 = 0$ を満たすとする．Lefèvre は次を示した．

補題 4.6 ([5, Lemme 2.2.2.5]). cocomplete augmented DG 余代数 C が $C^0 = \mathbb{F}$ である exhaustive filtration $\{C^i\}$ をもつならば，admissible filtered DG C-余加群の間の擬同型は弱同値になる． □

$C^j := \bigoplus_{i \le j} (\wedge^i \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ とすれば，$(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ 上に exhaustive filtration

$$\mathbb{F} = C^0 \subset C^1 \subset \cdots \subset C^{\dim \mathfrak{g}} = (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

を得る．$\mathcal{P}$ を $(\wedge \mathfrak{g})_{\mathrm{inv}}$ の primitive な元からなる部分空間として，F^j を $\wedge^j \mathcal{P}$ の全ての元の contraction で 0 になる元からなる $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ の部分空間とする．このとき $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$ 上に exhaustive filtration

$$0 = F^0 \subset F^1 \subset \cdots \subset F^{\dim \mathcal{P}+1} = \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N})$$

を得る．同様に $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ 上にも $(F')^0 = 0$ である exhaustive filtration $\{(F')^j\}$ を得る．よって，filtered $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-余加群 $\tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}), \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ はともに admissible. 定義から Ψ, Υ が filtration を保つことは従うので，補題 4.6 により次が成り立つ．

定理 4.7. $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数，$\mathcal{N}$ を $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群とする．このとき

$$\Psi : \tilde{K}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{N}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}}, \quad z \otimes \eta \mapsto (-1)^{|\eta||z|} (e^{\iota(f)} \eta) \cdot z$$

は cocomplete DG $(\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-comodules としての弱同値である． □

これと定理 4.5 (a) から，任意の $\mathfrak{g}$-微分 $W\mathfrak{g}$-加群 $\mathcal{N}$ に対して，DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群としての擬同型写像

$$\Psi \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} : \mathcal{N}_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \to \mathcal{N}_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}, \tag{7}$$

を得る．ここで，簡単のため，$\otimes_\tau$ の代わりに $\otimes$ と表す．

$\sim$ を Mod $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ における擬同型を表すことにすると，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M}) &\cong \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (W\mathfrak{g} \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{basic}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \\
&\cong (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \otimes (S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}} \\
&\sim (S\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{M})_{\mathrm{inv}} \\
&= C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})
\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで最初の $\sim$ は $W\mathfrak{g}$ の acyclicity から導かれ，次の $\sim$ は擬同型写像 (7) から得られ，そして最後の $\sim$ は圏同値 (6) からわかる．$\mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ 上の余積は $\gamma := \sum_j \iota^{\mathcal{M}}(c_j) \otimes c^j$ を用いて

$$\mathcal{M}_{\mathrm{inv}} = \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \otimes \mathbb{F} \xrightarrow{e^\gamma} \mathcal{M}_{\mathrm{inv}} \otimes (\wedge \mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}},$$

と定義すれば，関手 $?\otimes(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ は $\mathcal{M}_{\mathrm{inv}}$ を $\mathcal{M}_{\mathrm{inv}}\otimes(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ にうつすが，その微分は $\mathrm{d}^{\mathcal{M}}\otimes 1-\sum_j \iota^{\mathcal{M}}(c_j)\otimes p^j$ となることを注意しておく．以上のことにより，任意の $\mathfrak{g}$-微分空間 $\mathcal{M}$ に対して(ここで下に有界な仮定は必要ではない)，$\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ と $C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$ は擬同型であることがわかる．逆に，この主張と圏同値 (6) を用いれば直ちに定理 4.7 が従う．

4.4 $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ 上の余加群構造

$\mathfrak{g}$-微分 $(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群 $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ に対して，$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ 上の余加群構造を

$$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{\Upsilon}\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{1\otimes\Delta}\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{\Psi\otimes 1}\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}.$$

と定義した．ここで

$$\Psi:\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\to\mathcal{N}_{\mathrm{inv}},\quad \Upsilon:\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}\to\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$$

は定理 3.4 のホモトピー同値写像とする．Ψ,Υ が Maurer-Cartan 型方程式 (3) の解 $f\in\in(S\mathfrak{g}^*\otimes(\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ を用いて定義されたので，この余積は f に依存する．しかし Alekseev-Meinrenken によって次が示された．

定理 4.8 ([1, Theorem 4.6])**.** $\mathfrak{g}$ を簡約 Lie 代数，$\mathcal{M}$ を $\mathfrak{g}$-微分空間とする．方程式 (3) の解 $f\in(S\mathfrak{g}^*\otimes(\wedge\mathfrak{g})^-)_{\mathrm{inv}}$ によって定義された DG $(S\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$-加群の準同型写像

$$\Phi:\tilde{C}_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})\hookrightarrow C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})\xrightarrow{e^{\iota(f)}}C_{\mathfrak{g}}(\mathcal{M})$$

は up to homotopy で f に依存しない． □

f,f' を方程式 (3) の異なる 2 つの解とする．f を用いて定義された定理 3.4 のホモトピー同値写像を $\Psi:\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\to\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$, $\Upsilon:\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}\to\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}$ として，同様に f' を用いて定義されたものをそれぞれ Ψ',Υ' と表す．上の定理を用いて

$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\circ H+H\circ\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}=\Psi\circ\Upsilon-1$$
$$\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}\circ K+K\circ\tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}=\Psi'\circ\Upsilon'-1$$

を満たすホモトピー H,K の存在がわかる．ここで Ψ,Υ を用いて余積を定義したものを $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$，$\Psi',\Upsilon'$ を用いて余積を定義したものを $\mathcal{N}'_{\mathrm{inv}}$ と表すことにして区別する．

$$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{\Upsilon}\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{\Psi'}\mathcal{N}'_{\mathrm{inv}},\quad \mathcal{N}'_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{\Upsilon'}\mathcal{N}_{\mathrm{basic}}\otimes(\wedge\mathfrak{g}^*)_{\mathrm{inv}}\xrightarrow{\Psi}\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$$

を考える．$\Upsilon' \circ \Psi' = 1$ に注意すると

$$\begin{aligned}(\Psi \circ \Upsilon') \circ (\Psi' \circ \Upsilon) - 1 &= \Psi \circ \Upsilon - 1 \\ &= \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ H + H \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}\end{aligned}$$

となる．同様にして $(\Psi' \circ \Upsilon) \circ (\Psi \circ \Upsilon') - 1 = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}} \circ K + K \circ \tilde{\mathrm{d}}_{\mathfrak{g}}$ となる．以上のことにより $\Psi' \circ \Upsilon$, $\Psi \circ \Upsilon'$ はホモトピー同値写像であるから，$\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$, $\mathcal{N}'_{\mathrm{inv}}$ はホモトピックであることがわかる．つまり $\mathcal{N}_{\mathrm{inv}}$ 上の余積は Maurer-Cartan 型方程式 (3) の解 f の選び方に up to homotopy で依存しないことが示された．

参考文献

[1] A. Alekseev, E. Meinrenken, *Equivariant cohomology and the Maurer-Cartan equation*, Duke Math. J. 130 (2005), no. 3, 479–521.

[2] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. 131 (1998), no. 1, 25–83.

[3] V. Guillemin, S. Sternberg, *Supersymmetry and equivariant de Rham theory*, Springer-Verlag, 1999.

[4] B. Keller, *A-infinity algebras, modules and functor categories*, math.RT/0510508.

[5] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ catégories*, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot-Paris 7, November 2003, available at B. Keller's web site.

[6] T. Maszczyk, A. Weber, *Koszul duality for modules over Lie algebras*, Duke Math. J. 112 (2002), no. 3, 511–520.