数理解析研究所講究録
第 1575 巻 2008 年 1-6

同変Morse理論のデファイナブルカテゴリーへの一般化

川上　智博

640-8510 和歌山市栄谷 930

和歌山大学教育学部数学教室

kawa@center.wakayama-u.ac.jp

1. 序文

本稿では、G. Wasserman [15], K.H. Mayer [11] による同変 Morse 理論を実数体の通常の構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >)$ の順序極小拡張 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, ...)$ に拡張することを目的とする。このような構造は、[14] により、非可算無限個存在することが知られている。通常の Morse 理論は、J.Milnor の本 [12] が有名である。

もっと一般的に、実閉体上の順序極小拡張でも議論することができるが、ここでは、$\mathcal{M}$ に制限して考える。実数体と一般の実閉体との違いの一つは、単位閉区間 $[0,1]$ がコンパクトとは限らないことである。通常のコンパクトに対応するデファイナブリーコンパクトという概念が [13] により導入されている。基礎体が実数体のとき、$0 \leq r \leq \infty$ のとき、C^r 関数がコンパクト集合上で多項式で C^r 近似できるという多項式近似定理が知られている。ところが、一般の実閉体上の順序極小構造上で、$0 \leq r \leq \infty$ のとき、C^r 関数がデファイナブリーコンパクト集合上で多項式で C^r 近似できるという命題は、不成立である。[1] の 8.8.6 のすぐ下の段落に反例が書かれている。また、一般の実閉体は、アルキメデス的とは限らないことも違いの一つである。

2000 *Mathematics Subject Classification*. 14P20, 57R35, 57S10, 57S15, 03C64.
Keywords and Phrases. 順序極小構造, デファイナブル群, デファイナブル C^r 群, デファイナブル C^rG 多様体, 同変 Morse 理論, Morse 理論.

デファイナブルカテゴリーに関しては、[2], [3] などに性質がまとめられている。ここでは、デファイナブル集合は、すべてパラメータつきで考える。

本稿の構成は、セクション 2 で同変 Morse 理論を解説し、セクション 3 でそれを $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, +, \cdot, >, \ldots)$ 上に拡張する。指定がなければ、多様体はすべて境界をもたないものとする。

2. 同変 Morse 理論

G をコンパクト Lie 群, X をコンパクト $C^\infty G$ 多様体, $f : X \to \mathbb{R}$ を G 不変 C^∞ 関数とする。G. Wasserman [15] の定義では、X がコンパクトの条件を少し弱めて定義しているが、ここでは、簡単のため、コンパクトを仮定する。$p \in X$ が f の臨界点とは、f の p における微分が 0 となることである。f の臨界点 p が非退化とは、f の p における Hessian が正則であることである。p が f の臨界点のとき、$f(p)$ を f の臨界値という。非退化臨界点 p の Hessian の負の固有値の個数を指数という。

定義 2.1. Y を X の閉 $C^\infty G$ 部分多様体とする。Y が臨界多様体（非退化臨界多様体）とは、Y の各点 p が f の臨界点（非退化臨界点）となることである。G 不変 C^∞ 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が同変 *Morse* 関数とは、f の臨界点全体の集合が、内点をもたない非退化臨界多様体の有限和となることである。

同変 Morse 理論において、以下の四つの定理が重要である。

定理 2.2 ($C^\infty G$ 微分同相定理 (G. Wasserman [15])). *G をコンパクト Lie 群, X をコンパクト $C^\infty G$ 多様体, $f : X \to \mathbb{R}$ を同変 Morse 関数とする。f が閉区間 $[a, b]$ 上に臨界値をもたないならば、$f^a := f^{-1}((-\infty, a])$ と $f^b := f^{-1}((-\infty, b])$ が $C^\infty G$ 微分同相である。*

通常の Morse 理論におけるハンドル体分解の同変版として、同変ハンドル体分解を定義することができる ([15])。

定理 2.3 (同変ハンドル体分解定理 (G. Wasserman [15])). *G をコンパクト Lie 群, X をコンパクトリーマン $C^\infty G$ 多様体, $f : X \to \mathbb{R}$ を同変 Morse 関数とする。f が閉区間 $[a, b]$ 上に臨界値 c をとるとする。このとき、c を臨界値とする f の臨界点全体集合は、コンパクト C^∞ 部分多様体 $N_1, \ldots, N_s$ の有限和で、f^b は f^a に同変ハンドル $(N_1, f), \ldots, (N_s, f)$ を接着してえられる $C^\infty G$ 多様体に $C^\infty G$ 微分同相である。*

定理 2.4 (同変Morse関数の存在定理 (G. Wasserman [15])). Gをコンパクト*Lie*群, Xをコンパクト$C^\infty G$多様体とする。$C^\infty_{inv}(X,\mathbb{R})$を$X$上の$G$不変$C^\infty$関数全体の集合、$M_G(X,\mathbb{R})$を$X$上の同変*Morse*関数で、その臨界点全体の集合が非退化軌道の有限和となるもの全体の集合とする。このとき、C^∞位相で、$M_G(X,\mathbb{R})$は$C^\infty_{inv}(X,\mathbb{R})$において開かつ稠密である。

この定理から、次の問題が考えられる。

問題 2.5. Gをコンパクト*Lie*群, Xをコンパクト$C^\infty G$多様体, YをXの閉$C^\infty G$部分多様体で、$\dim Y < \dim X$とする。

(1) Yを臨界点全体の集合とするX上の同変*Morse*関数は存在するか？

*(2) (1)*が正しい場合、上のような関数全体の集合は、$C^\infty_{inv}(X,\mathbb{R})$において、$C^\infty$位相で、開であるか、また稠密であるか？

四つ目の定理のGホモトピー同値性定理を述べる前に、次の準備をする。

GをコンパクトLie群、Xを$C^\infty G$多様体で軌道型が$(G_1),\dots,(G_n)$の有限個とする。軌道型の集合に、$(G_i) \le (G_j) \Leftrightarrow G_j$は$G_i$の部分群と同型と定義して、順序を定める。また、$X(G_i) = \{x \in X | (G_x) = (G_i)\}$とする。同変Morse関数$f : X \to \mathbb{R}$が特殊とは、臨界点全体の集合が臨界軌道の有限和で、各臨界軌道$G(p) \subset X(G_i)$に対して、$f|X(G_i) : X(G_i) \to \mathbb{R}$の$p$における指数が$f$の$p$における指数と一致することである。K.H. Mayer [11] によって、Xがコンパクトのとき、特殊同変Morse関数が存在することが知られている。

定理 2.6 (Gホモトピー同値性定理 (K.H. Mayer [11])). Gをコンパクト*Lie*群, Xを$C^\infty G$多様体, $f : X \to \mathbb{R}$を特殊同変*Morse*関数とする。

(1) 任意の$a \in \mathbb{R}$に対して、f^aがコンパクトのとき、XはG CW複体とGホモトピー同値である。

(2) Xがコンパクトのとき、Xは有限G CW複体とGホモトピー同値である。

3. デファイナブルカテゴリーへの拡張

ここからは、セクション2の定理を、実数体の$\mathcal{R} = (\mathbb{R},+,\cdot,<)$の順序極小拡張$\mathcal{M} = (\mathbb{R},+,\cdot,<,\dots)$上のデファイナブルカテゴリーに拡張する。また、$2 \le r < \infty$とする。

GをコンパクトデファイナブルC^r群, XをコンパクトデファイナブルC^rG多様体とする。Xの閉デファイナブルC^rG部分多様体に対しても、臨界多様体、非退化臨界多様体を同様に定義することができる。

デファイナブルC^rG多様体は、[9], [7], [8], [6] などで研究されている。

定義 3.1. G不変デファイナブルC^r関数$f : X \to \mathbb{R}$が同変デファイナブル*Morse*関数とは、fの臨界点全体の集合が内点をもたない非退化臨界多様体の有限和となることである。

以下で述べる定理は、[4] によるものである。

定理 3.2 (デファイナブルC^rG微分同相定理 [4]). $2 \le r < \infty$, GをコンパクトデファイナブルC^r群, XをコンパクトアフィンデファイナブルC^rG多様体とする。同変デファイナブルC^r関数$f : X \to \mathbb{R}$が閉区間$[a, b]$に臨界値をもたないならば、f^aとf^bはデファイナブルC^rG微分同相である。

これは、定理2.2のデファイナブル版である。定理2.2の証明は、$C^\infty G$ベクトル場を積分して、$C^\infty G$微分同相写像をえている。ところが、デファイナブルカテゴリーでは、デファイナブルC^rGベクトル場の積分がデファイナブルとは限らないので、この証明法は適用できない。

例 3.3 (デファイナブル関数の積分がデファイナブルでない例).
(1) $\mathcal{M} = \mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <)$とし、$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$とする。このとき、$F(x) = \int_0^x f(t)dt = tan^{-1}(x)$となり、$F(x)$は$\mathcal{M}$上デファイナブルでない。

(2) $\mathcal{M} = \mathbf{R}_{exp} = (\mathbb{R}, +, \cdot, <, e^x)$とする。ただし、$e^x$は自然対数を底とする通常の指数関数とする。$f(x) = e^{x^2}$とし、$F(x) = \int_0^x f(t)dt$とすると、$F(x)$は$\mathcal{M}$上デファイナブルでない。

次にデファイナブルMorse関数の存在に関する結果を述べる。

$1 \le r < \infty$, $Def^r(\mathbb{R}^n)$で$\mathbb{R}^n$上のデファイナブルC^r関数全体の集合を表すとする。$f \in Def^r(\mathbb{R}^n)$と正値デファイナブル連続関数$\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$に対して、$f$の$\epsilon$近傍$N(f; \epsilon)$を$\{h \in Def^r(\mathbb{R}^n) | h - f$の$r$階までのすべての偏導関数の絶対値が$\epsilon$未満$\}$と定義する。この$\epsilon$近傍全体をopen subbasisとする位相をデファイナブルC^r位相と定義する。

G作用を考えない場合の結果は以下である。

定理 3.4 (デファイナブルMorse関数の存在定理 [10]). $2 \le r < \infty$, Xを$\mathbb{R}^n$のデファイナブルC^r部分多様体とする。このとき、$\{f \in Def^r(\mathbb{R}^n) | f|X$は$X$上のデファイナブル*Morse*関数である$\}$は、$Def^r(\mathbb{R}^n)$において、デファイナブル$C^r$位相で開かつ稠密である。

G 作用を考えた場合の結果は以下である。

定理 3.5 (同変デファイナブル Morse 関数の存在定理 [4]). $2 \leq r < \infty$, G をコンパクトデファイナブル C^r 群, X をコンパクトアフィンデファイナブル C^rG 多様体とする。$Def_{equi-Morse,o}(X)$ を X 上の同変デファイナブル $Morse$ 関数で、その臨界点全体の集合が臨界軌道の有限和となるものとする。このとき、$Def_{equi-Morse,o}(X)$ は、X 上の G 不変 C^r 関数全体の集合 $C^r_{inv}(X)$ において、C^r 位相で稠密である。

$Def_{equi-Morse,o}(X)$ が X 上の G 不変デファイナブル C^r 関数全体の集合 $Def^r_{inv}(X)$ で、C^r 位相またはデファイナブル C^r 位相で、開かどうかは、今後の課題である。

G CW 複体をデファイナブルカテゴリーに拡張することができる。群作用が直交作用の場合が [5] で導入されており、一般のデファイナブル作用の場合が [4] で定義されている。

定理 3.6 (デファイナブル G 同相性定理 [4]). G をコンパクトデファイナブル群, X をデファイナブル位相 G 多様体とする。このとき、X はデファイナブル G CW 複体から開 G セルを除いてえられる G 不変デファイナブル部分集合にデファイナブル G 同相である。特に、X がコンパクトならば、X はデファイナブル G CW 複体にデファイナブル G 同相である。

上の定理は、定理 2.6 より少し強くなっている。

REFERENCES

[1] J. Bochnak, M. Coste and M.F. Roy, *Géométie algébrique réelle*, Erg. der Math. und ihrer Grenzg., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.

[2] L. van den Dries, *Tame topology and o-minimal structures*, Lecture notes series **248**, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), 497-540.

[4] T. Kawakami, *Definable C^rG Morse functions on definable C^rG manifolds*, in preparation.

[5] T. Kawakami, *Definable G CW complex structures of definable G sets and their applications*, Bull. Fac. Ed. Wakayama Univ. Natur. Sci. **55**, (2004), 1–15.

[6] T. Kawakami, *Equivariant definable C^r approximation theorem, definable C^rG triviality of G invariant definable C^r functions and compactifications*, Bull. Fac. Edu. Wakayama Univ. 55. (2005), 23-36.

[7] T. Kawakami, *Equivariant differential topology in an o-minimal expansion of the field of real numbers*, Topology Appl. **123** (2002), 323-349.

[8] T. Kawakami, *G manifolds and G vector bundles in algebraic, semialgebraic, and definable categories*, Current Trends in Transformation Groups, K-Monographs in Mathematics 7, Kluwer academic publishers, (2002), 37-51.

[9] T. Kawakami, *Imbedding of manifolds defined on an o-minimal structures on* $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$, Bull. Korean Math. Soc. **36** (1999), 183–201.

[10] T.L. Loi, *Density of Morse functions on sets definable in o-minimal structures*, Ann. Polon. Math. **89**, (2006), 289–299.

[11] K.H. Mayer, *G-invariante Morse-funktionen*, Manuscripta Math. **63**, (1989), 99-114.

[12] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, (1963).

[13] Y. Peterzil and C. Steinhorn, *Definable compactness and definable subgroups of o-minimal groups*, J. London Math. Soc. 59 (1999), no. 3, 769–786.

[14] J.P. Rolin, P. Speissegger and A.J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 751-777.

[15] G. Wasserman, *Equivariant differential topology*, Topology **8**, (1969), 127-150.