数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 169-191

ゼータ関数の高階導関数と正則化行列式

無所属　元信州大学 浅田明(ASADA Akira)
Freelance Matheamtician (Former: Sinsyu University)

概要

無限次元では　簡単な微積の計算でも発散の問題が起きる。是を処理する為　Schatten 級作用素 G を指定し G と Hilbert 空間 H の組 $\{H,G\}$ を考え　G のスペクトル　ゼータ関数 $\zeta(G,s)=\mathrm{tr}(G^s)$ を利用することを提案し　無限次元積分の正則化などを定義し Gauss 型経路積分などに応用し　この研究会でも報告してきた（スケーリング変換のヤコビアンの正則化、　講究禄１４０８（２００４）、正則化無限積と正則化行列式、講究禄１５００（２００６））。

今回は　正則化無限次元積分の計算で使われる正則化無限積の中で 従来あまり使われることの無かった $\zeta(G,s)$ の高階導関数を使って計算できるものが有ることと　その応用について報告する。

1　はじめに

無限次元では例えば　ヒルベルト空間 H の座標を $x=(x_1,x_2,\dots)$, $x=|sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$, $\{e_1,e_2,\dots\}$ は H の正規完備直交系、としたとき

$$\sigma_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n,$$

でさえも H の上では定義できない。$x_n=n^{-s}$ とすれば $x\in H$ であれば $s>1/2$ だが $\sigma_1(x)$ は $s>1$ でしか存在しない。しかし $\sigma_1(x)=\zeta(s)$ だから　解析接続により $\sigma_1(x)$ は $s\neq 1$ であれば $s>1/2$ で定義できる。

こうした方法で　そのまま計算すれば発散するものに有限の値を与えるため H の正値シャッテン級作用素 G で　その ζ-関数 $\zeta(G,s)=\mathrm{tr}G^s$ が $s=0$ で正則と成るものを固定する。G の固有値・固有関数を $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots$,; $Ge_n=\mu_ne_n$, とし H の正規完備直交系を $\{e_1,e_2,\dots\}$ と固定する。このとき $\sigma_1(x)$ の正則化 $:\sigma_1(x):$ を　解析接続を使って

$$:\sigma_1(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^s x_n|_{s=0},$$

出て定義する。同様に $x_1,x_2,\dots$ の k-次基本対称式 $\sigma_k(x)$;

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+tx_n)=1+\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_k(x)t^k$$

の正則化を

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s t x_n)|_{s=0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} : \sigma_k(x) : t^k,$$

で定義する。しかし 無限積 $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ の正則化はこの式からは得られない。無限積の正則化は レイ－シンガー行列式が

$$\det G = \mathrm{e}^{\zeta'(G,0)} = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^{\mu_n^s}|_{s=0},$$

であることから

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n := \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s}|_{s=0},$$

で定義するのが適切である ([2])。この式は スケーリング作用素 I_x を $I_x e_n = x_n e_n$ で定義したとき $\log I_x = I_{\log x}$; $I_{\log x} e_n = \log x_n e_n$ を使って

$$: \prod_{n=1}^{\infty} x_n := \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s \log I_x)}|_{s=0},$$

とも書ける。これから H（の稠密な部分空間）で定義された作用素 T が $\log T = S$; $\mathrm{e}^S = T$ を持つとき G に関する正則化行列式 $\det_G T$ を

$$\det{}_G T = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s S)}|_{s=0},$$

で定義する。

正則化無限積・正則化行列式は 無限次元積分を $\zeta(G,s)$ を用いて正則化する正則化無限次元積分の計算に現われる ([2])。正則化無限次元積分については 公式

$$\begin{aligned}
\int_{I_y(\mathcal{D})} f(y) : d^\infty y : &= \int_{\mathcal{D}} |\det{}_G I_x|^{-1} I_y^{-1,*} f(y) : d^\infty x :, \\
\int_{\mathcal{D}} \prod_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) : d^\infty x : &= : \prod_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n :
\end{aligned}$$

が成立するので、正則化無限積の計算は正則化無限次元積分の計算のために必要である。($\mathcal{D} = \{\sum_n x_n e_n | a_n \le x_n \le b_n\}$).

正則化無限積が計算できる例としては $\zeta(G,s)$ や その導関数の $s=0$ での値を使うものが知られていたが、ここでは それ以外に高階導関数の特殊値を使って計算できる例を述べる。

2　ヒルベルト空間とシャッテン級作用素の組

１節に書いたように H をヒルベルト空間 (係数は $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$　又は $\mathbb{C}$)、G をその上の正値シャッテン級作用素 ([11]) で　その ζ-関数 $\zeta(G,s)=\mathrm{tr}G^s$ が $s=0$ で正則なものとする。$\{H,G\}$ の重要な量としては $\nu=\zeta(G,0)$ や $\zeta(G.s)$ の最初の極の位置 d がある。また d での留数 c も使われる。

このような組 $\{H,G\}$ の例としては X をコンパクト　リーマン多様体 E をその上のベクトル　バンドルとしたとき $H=L^2(X,E)$, G は E の切断に働く非退化正値楕円形作用素 D のグリーン作用素　がある ([8])。このとき $d=n/m$, n は X の次元　m は D の階数である。

$\{H,G\}$ では H の完備正規直交系は G の固有ベクトル $e_1,e_2,\dots$ に固定される。G は正だから $Ge_n=\mu_n e_n$, $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots$, とする。H のノルム、内積を $\|x\|$, (x,y) として G からソボレフ k-ノルム,　内積を

$$\|x\|_k=\|G^{-k/2}x\|,\quad (x,y)_k=(G^{-k/2}x,G^{-k/2}y),$$

で導入する。ただし G^k は $G^ke_n=\mu_n^k e_n$ で定義する。$k<0$ であれば G^k は H の稠密な部分空間 $\mathcal{D}(G^k)$ でしか定義されない。$\mathcal{D}(G^{-k/2})$ のソボレフ k-ノルムによる完備化を W^k ($k=0$ のときは H) と書く。集合としては $W^k\subset W^l$, $l<k$ である。W^k の完備正規直交系は

$$\{e_{1,k},e_{2,k},\dots\},\quad e_{n,k}=\mu_n^{k/2}e_n,$$

で与えられる。また

$$G^{l/2}:W^k\cong W^{k+l}, \tag{1}$$

である。W^k の集合としての包含関係を使って

$$\bigcap_{l<k}W^l=W^{k-0},\quad \bigcup_{l>k}W^l=W^{k+0},\quad W^{0\pm0}=H^{\pm}, \tag{2}$$

とする。W^{k-0} の点列 $\{x_1,x_2,\dots\}$ については

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\ \text{if and only if}\ \lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_l=0,\ \text{for all}\ l;l<k, \tag{3}$$

で　また W^{k+0} の点列 $\{y_1,y_2,\dots\}$ については

$$\lim_{n\to\infty}y_n=y,\ \text{if and only if}\ \lim_{n\to\infty}\|y_n-y\|_j=0,\ \text{for some}\ j;j>k, \tag{4}$$

で収束を定義する。この位相で　W^{k-0} と W^{k+0} は双対になる。ペアリングは

$$\langle x,y\rangle_k=(x_0,y_0)_k,\quad x=G^lx_0,\ y=G^{-l}y_0,\ x_0,y_0\in W^k,$$

である。

d の定義から

$$e_{\infty,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^{d/2} e_{n,k} \in W^{k-0}, \quad e_{\infty,k} \notin W^k, \tag{5}$$

である ($k=0$ のときは $e_{\infty,0}$ を e_∞ と書く)。e_∞ は $\{H,G\}$ だけでは決まらないから e_∞ を指定するのは $\{H,G\}$ に新たな構造を入れることになるが　それについては触れない。

定義１。空間 $W^{k,\sharp}$ ($k=0$ の時は $H^\sharp$) を

$$W^{k,\sharp} = W^k \oplus \mathbb{K} e_{\infty,k} \subset W^{k-0}, \tag{6}$$

で定義する。

定義から $x \in W^{k,\sharp}$ は $x = x_f + te_{\infty,k}$; $x_f \in W^k$ と一意的に書ける。これから

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} (x_{f,n} + t\mu_n^{d/2}) e_{n,k}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_{f,n}|^2 < \infty, \tag{7}$$

と書ける。$e_1, e_2, \ldots$ を使えば

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n,k} e_n, \quad x_{n,k} = \mu_n^{k/2} x_n,$$

である。また $e_{\infty,k} = G^{k/2} e_\infty$ だから

$$G^{k/2} H^\sharp = W^{k,\sharp}, \quad G^{l/2} W^{k,\sharp} = W^{k+l,\sharp},$$

である。

$W^{k,\sharp}$ はヒルベルト空間でないが $x = x_f + te_{\infty,k}$, $y = y_f + ue_{\infty,k}$ として

$$\langle x, y\rangle_k = \lim_{s\downarrow 0} (G^{s/2}(x_f + \sqrt{s}te_{\infty,k}), G^{s/2}(y_f + \sqrt{s}ue_{\infty,k}))_k,$$

で内積を入れればヒルベルト空間 $W^{k,\natural}$ になる。この内積では

$$\langle e_{n,k}, e_{\infty,k}\rangle_k = 0, \quad \langle e_{\infty,k}, e_{\infty,k}\rangle_k = c,$$

となる。とくに $H^\natural = W^{0,\natural}$ は H の極座標を $\|x\| = r$ として

$$x_1 = r\cos\theta_1, \; x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2, \ldots,$$

としたとき $\theta_1, \theta_2, \ldots$ の制約 $\lim_{n\to\infty} \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_n = 0$ をはずして　得られた空間 $\hat{H}$ と同一視できる。

3　正則化無限積と正則化行列式

「はじめに」に書いたように H の座標の基本対称式の正則化 $:\sigma_k(x):$ は

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s x_n t)|_{s=0} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} :\sigma_k(x): t^k,$$

で定義される。スケーリング作用素 I_x; $I_x e_n = x_n e_n$ を使えば

$$:\sigma_1(x) := \mathrm{tr}(G^s I_x), \tag{8}$$

だから $:\sigma_1(x):$ は Paicha の renormalized trace と解釈できる ([6],[10])。また

$$\begin{aligned}\log(\prod_{n=1}^{\infty}(1+\mu_n^s x_n t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\log(1+\mu_n^s x_n t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\mu_n^{ks}x_n^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^{ks}x_n^k)\frac{(-1)^k}{k+1}t^k,\end{aligned}$$

であり　$x\in H$ なら $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^k < \infty$, $k\geq 2$ だから $:\sigma_1(x):$ が存在すれば $:\sigma_k(x):$, $k\geq 2$ は存在する。しかし　総ての座標の積 $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$ の正則化はこの方法ではできない。

定義 2。数列 $x_1, x_2, \ldots$ が Agmon 角 θ; $\theta+\epsilon \leq \mathrm{Arg}.x_n \leq \theta+2\pi-\epsilon$ を持つとき $x_1, x_2, \ldots$ の G (と θ) に関する　正則化無限積 $:\prod_{n=1}^{\infty} x_n :=: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :_G$ $(=: \prod_{n=1}^{\infty} x_n :_{G,\theta})$ を

$$:\prod_{n=1}^{\infty} x_n :_{G,\theta} = \prod_{n=1}^{\infty} x_n^{\mu_n^s}|_{s=0}, \quad x^a = |x|^a e^{a\mathrm{Arg}.x}, \ \theta < \mathrm{Arg}.a < \theta+2\pi, \tag{9}$$

で定義する。

$x_1, x_2, \ldots$ を変数と見たとき $:\prod_n x_n:$ は各変数 x_n に付いて線形で

$$\begin{aligned}:\prod_{n=1}^{\infty}|x_n|: &= |:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:|, \quad :\prod_{n=1}^{\infty} x_n^c := (:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:)^c, \quad c\in\mathbb{R}, \\ :\prod_{n=1}^{\infty}(tx_n): &= t^{\nu}:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:,\end{aligned}$$

をみたす。また各変数について線形なことから

$$\begin{aligned}&:\prod_{n\notin\{i_1,\ldots,i_m\}} x_n: \\ &= \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_m}}:\prod_{n=1}^{\infty} x_n := \frac{:\prod_{n=1}^{\infty} x_n:}{x_{i_1}\cdots x_{i_m}},\end{aligned} \tag{10}$$

として良い。

$x=\sum_n x_n e_n \in H^\sharp$ のとき：$\prod_{n=1}^\infty x_n$：は総ての座標の積の正則化だから：$\sigma_\infty x$：と書いてよい。$x=x_f+te_\infty$, $t\neq 0$ で $\sum_{n=1}^\infty |\mu_n^{-d/2}x_{f,n}|<\infty$ であれば

$$\begin{aligned} :\sigma_\infty x: &= \prod_{n=1}^\infty t^{\mu_n^s}\mu_n^{\mu_n^s d/2}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{x_{f,n}}{\mu_n^{d/2}t}\right)^{\mu_n^s}\Big|_{s=0} \\ &= t^\nu(\det G)^{d/2}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{x_{f,n}}{\mu_n^{d/2}t}\right), \end{aligned}$$

だから：$\sigma_\infty x$：は存在する。定義から

$$:\sigma_\infty G^a x := (\det G)^a : \sigma_\infty x :, \quad :\sigma_\infty tx := t^\nu : \sigma_\infty x :,$$

が成立する。また $x=x_f+te_\infty\in H^\sharp$ にたいし $\breve{x}=-x_f+te_\infty$ とすれば $x_f\in W^d$ であれば $x=\sum_n x_n e_n$, $\breve{x}=\sum_n \breve{x}_n e_n$ として $\breve{x}_n=t^2-x_{f,n}^2$ だから：$\prod_{n=1}^\infty x_n\breve{x}_n$：は存在する。従って：$\sigma_\infty x$：は $x\in W^d\oplus \mathbf{K}e_\infty$ のとき解析的である。

スケーリング作用素 I_x; $I_x e_n = x_n e_n$ の対数 $\log I_x$ は

$$\log x = (\log x_1, \log x_2, \ldots),$$

として $I_{\log x}$ で与えられる。このとき

$$:\prod_{n=1}^\infty x_n := \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s \log I_x)}|_{s=0}, \tag{11}$$

である。これから

定義３。線形作用素 T が対数 $S=\log T$ を持つとき T の G に関する正則化行列式 $\det_G T$ を

$$\det{}_G T = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s S)}|_{s=0}, \tag{12}$$

で定義する。

$\log T$ は一意的でないから　一般には $\det_G T$ は一意的でない。例えば

$$\det{}_G(tT) = t^\nu \det{}_G T,$$

だから ν が整数で無ければ $\det_G(tT)$ は一意ではない。また

$$\det{}_G(PTP^{-1}) = \det{}_{P^{-1}GP}T,$$

だが　これは一般には $\det_G T$ とは異なる。

$\det_G(PTP^{-1}) = \det_G T$ が成立する充分条件としては $P = I + K$; K はコンパクト作用素、または $PG = GP$ がある。K が　ある $l < 0$ について KG^l は有界　となれば $G^l e_\infty \in H$ だから $P = I + K$ は $H^\sharp$ の作用素に拡張され $H^\sharp$ を $H^\sharp$ に写す（極分解 $K = UL$, U は unitary,L は正定値を使えば KG^l が有界　と LG^l が有界が同値だから KG^l が有界と $G^l K$ が有界は同値である）。この条件は K が H^- のコンパクト作用素になる条件である。

G の固有空間による H の分解を $H = \sum_m \oplus E_m$ とすれば $PG = GP$ の時 $PE_m = E_m$ だから

$$P = \sum_m \dot{+} P_m, \quad P_m = P|E_m, \quad G|E_m = \mu_{(m)} I_m,$$

となる。P が $H^\sharp$ の作用素に拡張され $H^\sharp$ を $H^\sharp$ に写せば $Pe_\infty = ce_\infty$ として $\lim_{m\to\infty} \|P_m - cI_m\| = 0$ である。このとき

$$\lim_{m\to\infty} \mu_{(m)}^l \|P_m - cI_m\| = 0,$$

が　ある $l < 0$ で成立すれば $P - cI$ は H^- のコンパクト作用素となる。これから K が H^- のコンパクト作用素になるような逆をもつ $I + K$ の形の作用素の群 $\mathcal{K}^\natural$ を cI; $c \in \mathbb{K}^\times$ で拡大した群 $\mathrm{Sym}(H^\sharp)$ は $\det_G$ の対称性の群になるが、更にこの群に G^k, $k \in \mathbb{R}$ などを添加して拡大した群が正則化積分を計算するときには役に立つ。これについては７節で　改めて述べる。

4　正則化積分

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots)$, $\sum_n a_n e_n, \sum_n b_n e_n \in H^\sharp$ とし

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} &= \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in H^\sharp | a_n \le x_n \le b_n\}, \\
\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}^N &= \{\sum_{n=1}^{N} x_n e_n | a_n \le x_n \le b_n\} \subset \mathbb{R}^N \subset H^\sharp, \\
* &= (c_1, c_2, \ldots) \in \mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}, \quad *_N = (c_{N+1}, c_{N+2}, \ldots),
\end{aligned}$$

とすれば $\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ の関数 f の正則化積分は s に関する解析接続を使って

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}} f(x) : d^\infty x := \lim_{N\to\infty} f(x_1, \ldots, x_N, *_N) d(x_1^{\mu_1^s}) \cdots d(x_N^{\mu_N^s})|_{s=0}, \quad (13)$$

で定義される ($a_n = -\infty$, $b_n = \infty$ でも良い)。この定義は f が全微分可能なら $*$ の取り方によらない。

なお $a_n < 0$ の場合は $x_n^{\mu_n^s}$ は $\mathrm{Arg}(-1) = \pi$ ととるか $-\pi$ ととるかで この積分の値は異なる可能性がある。-1 の偏角は 総ての座標について同じにとるということにする。従って $a_n < 0$ の場合には 正則化積分は２種類の値を持つ可能性がある。

$\sum_n a_n e_{n,k}, \sum_n b_n e_{n,k} \in W^{k,\sharp}$ のとき, ソボレフ空間 $W^{k,\sharp}$ の部分集合を

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b};k} = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_{n,k} \in W^{k,\sharp} | a_n \leq x_n \leq b_n\},$$

で定義したとき $\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b};k}$ の上の関数についても同様に正則化無限次元積分が定義できる。この場合の積分を

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b};k}} f(x) : d^{\infty;k} x :,$$

とすれば

$$\begin{aligned} & d\big((\mu_1^{k/2} x_1)^{\mu_1^s}\big) \cdots d\big((\mu_N^{k/2} x_N)^{\mu_N^s}\big) \\ = \ & \big(\mu_1^{\mu_1^s} \cdots \mu_N^{\mu_N^s}\big)^{k/2} d(x_1^{\mu_1^s}) \cdots d(x_N^{\mu_N^s}), \end{aligned}$$

だから

$$: d^{\infty;k} x := (\det G)^{k/2} : d^{\infty} x :, \tag{14}$$

である。 一般に $I_\xi e_n = \xi_n e_n$ をスケーリング変換とすれば

$$\int_{I_\xi(\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}})} I_\xi^\sharp(f) : d^\infty I_\xi x := \int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}} |\det{}_G I_\xi| f : d^\infty x :, \tag{15}$$

が成り立つ。ただし $\det_G T$ は T の G に関する正則化行列式;

$$\det{}_G T = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s S)}|_{s=0}, \quad S = \log T; \mathrm{e}^S = T,$$

である。I_ξ の正則化行列式は $\xi_1, \xi_2, \ldots$ の正則化無限積;

$$: \prod_{n=1}^{\infty} \xi_n :_G = \prod_{n=1}^{\infty} \xi_n^{\mu_n^s} |_{s=0},$$

になる。(1) から $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(x_n)$ の時は

$$\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}} f(x) : d^\infty x :=: \prod_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n :, \tag{16}$$

だから 正則化行列式、正則化無限積の計算は大切である。例えば (15) から

$$
\begin{aligned}
f_I(x) &= \prod_{n=1}^{\infty} *(2m_n\mu_n^{-d/2}\pi x_n), \\
* &= \sin \text{ or } \cos,\ I = ((*_1, m_1), (*_2, m_2), \dots),
\end{aligned}
$$

であれば $\mathcal{D}_{0,\mu^{d/2}} = \{\sum_n x_n e_n \in H^\sharp | 0 \le x_n \le \mu_n^{d/2}\}$ として

$$
\int_{\mathcal{D}_{0,\mu^{d/2}}} f_I(x) f_J(x) : d^\infty x := 0,\ I \neq J, \quad \int_{\mathcal{D}_{0,\mu^{d/2}}} f_I(x)^2 : d^\infty x := \epsilon_I,
$$

となる。ここで

$$
\epsilon_I = \begin{cases} \frac{(\det G)^{d/2}}{2^{\nu-m}} & m_i \neq 0 \text{ except } m \text{ numbers} \\ \frac{(\det G)^{d/2}}{2^m} & m_i = 0 \text{ except } m \text{ numbers.} \end{cases}
$$

である ([2],[4])。これから $H^\sharp$ の周期関数のフーリエ展開が計算できる。

この場合の周期格子は H で $\mu_n^{d/2} e_n, n = 1, 2, \dots$ で生成されるアーベル群 $\mathbb{Z}^\infty$ の $H^\sharp$ での閉包 $\hat{\mathbb{Z}}^\infty$ で この格子は $\mu_n^{d/2} e_n, n = 1, 2, \dots$ と e_∞ で生成される。現在の所 この周期だけが H^∞ での周期関数を考えるのに意味があり計算可能な格子である。また $\mathbb{T}^\infty = H/\mathbb{Z}^\infty$ と $\hat{\mathbb{T}}^\infty = H^\sharp/\hat{\mathbb{Z}}^\infty$ との間には

$$
\hat{\mathbb{T}}^\infty = \mathbb{T}^\infty \times S^1, \quad S^1 = (\mathbb{R}e_\infty / \mathbb{Z}e_\infty),
$$

の関係がある。是は $\hat{\mathbb{T}}^\infty$ が $\mathbb{T}^i nfty$ の何らかの意味での弱コンパクト化であることを示唆している。

また (15) から

$$
\int_{\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}} : d^\infty x :=: \prod_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) :,
$$

となる。これから $\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ の正則化体積を

$$
: \mathrm{vol}(\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) :=: \prod_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) :,
$$

で定義できる。定義から 正則化体積は平行移動不変;

$$
: \mathrm{vol}(\mathcal{D}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) :=: \mathrm{vol}(\mathcal{D}_{\mathbf{a}+\mathbf{c},\mathbf{b}+\mathbf{c}}) :,
$$

である。しかし正則化体積は開（閉）集合であっても必ずしも存在しないので、これから $H^\sharp$ のボレル集合族にたいする測度を定義することはでき

ない。他方　正則化体積を使って　正則化積分のリーマン式定義を与える可能性はある。

また極座標を使えば

$$: d^{\infty}x := r^{\nu-1}drd^{\infty}\omega, \quad d^{\infty}\omega = \prod_{n=1}^{\infty} \sin^{\nu-n-1}\theta_n d\theta_n,$$

となる ([2],[3])。G が楕円形作用素 D のグリーン作用素のとき

$$\zeta(D+mI,0) = \nu + \sum_{k=1}^{d} \frac{\mathrm{Res}_{s=k}\zeta(D,s)}{k} m^k,$$

だから ν を m の関数と見ることができる。これは正則化積分の極座標表示から次元正則化 ([1], Part I, §7,§8　参照) の解釈を与える可能性を示唆している。

なお一般には $\log T$ や $\mu_n^{\mu_n^s}$ は一意にはきまらないので、これを決める条件が必要である。例えば　有限個（m 個）の ξ_i を除き $\xi_i < 0$ であれば積分は $I_{|\xi|}$, $|\xi| = (|\xi_1|, |\xi_2|, \dots)$ と符号が $(-1)^{\nu-m}$ だけことなるから ν が整数でないと　値は $-1 = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$ とするか $\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}}$ とするかで異なる。

正則化積分は　$(\mathbf{a} = 0,\ \mathbf{b} = (x_1, x_2, \dots),\ x_1 > 0, x_2 > 0, \dots$ の時）分数冪積分

$$I_x^a f(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} f(t)dt,$$

を使って

$$\int_{\mathcal{D}_{0,\mathbf{b}}} f(x) : d^{\infty}x := \lim_{n\to\infty} I_{x_1}^{\mu_1^s} \cdots I_{x_n}^{\mu_n^s} f(x_1, \dots, x_n, *^n)|_{s=0},$$

とも書ける ([2])。この場合解析接続は

$$\log\Big(\prod_{n=1}^{\infty} \Gamma(1+\mu_n^s)\Big) = -\gamma\zeta(G,s) + \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m \frac{\zeta(m)}{m} \zeta(G, ms),$$

の極が実軸上 0 に収束するので、実軸を通らずに 0 に行く右反平面内の路を取らなければならない。

$\mathbb{R}^N_{i_1,\dots,i_N} = \{\sum_{j=1}^N x_{n_j} e_{n_j} | x_{n_j} \in \mathbb{R}\}$ を H の部分空間とみて

$$H^{\sharp}_{i_1,\dots,i_N} = (\mathbb{R}^N_{i_1,\dots,i_N})^{\perp} \oplus \mathbb{R}e_{\infty,\{i_1,\dots,i_N\}},$$

$e_{\infty,\{i_1,\dots,i_N\}} = \sum_{n\notin\{i_1,\dots,i_N\}} \mu_n^{d/2} e_n$, とすれば $H^{\sharp}_{i_1,\dots,i_N}$ で　同様に正則化積分が定義できる。ここでの正則化体積要素を $: d^{\infty-\{i_1,\dots,i_N\}}x :$ とすれば

$$dx_{i_1} \cdots dx_{i_N} : d^{\infty-\{i_1,\dots,i_N\}}x :=: d^{\infty}x :,$$

である。この場合は交換関係は可換としているが反可換だと

$$\begin{aligned} & dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_N}\wedge : d^{\infty-\{i_1,\ldots,i_N\}}: \\ = \quad & (-1)^N\nu - N : d^{\infty-\{i_1,\ldots,i_N\}}x : dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_N}, \end{aligned}$$

となり ν が整数でなければ（実係数としては）定義できない（複素係数だと非可換トーラスと同じような交換関係を使って　定義可能になる）。

$H^\sharp_{i_1,\ldots,i_N}$ での正則化体積要素（積分）の存在は無限次元トーラス $H^\sharp/\hat{\mathbb{Z}}^\infty$ に　ポワンカレ双対をもつ　ド・ラム型コホモロジーが存在することを示している。一般に　ヒルベルト多様体などの無限次元多様体に弱位相が定義でき　弱位相でコンパクトであれば　ポワンカレ双対を持つド・ラム型コホモロジーが定義できないかは今後の問題である ([7] 参照)。

5　G の対数

$\{G^t|t\geq 0\}$ は H 上の作用素の半群だが $t>0$ のとき $\lim_{n\to\infty}\mu_n^t=0$ だから $t=0$ ではノルム位相では不連続で　強位相でしか連続にならない。また

$$\lim_{h\downarrow 0}\frac{(G^h-I)x}{h}=Ax,$$

となる A は $x\in H^+$ でしか定義できない。定義から $Ae_n=\log\mu_n e_n$ だから

$$A=\log G,\quad \log Ge_n=\log\mu_n e_n,$$

と書く。これから $G^tG^s=G^{s+t}$, $s,t\geq 0$ により

$$\frac{d^n}{dt^n}G^t=(\log G)^nG^t, \tag{17}$$

が ($t\geq 0$ で) 成立する。$t>0$ であれば　$\log GG^t$ は H の有界作用素で　微分を定義する極限はノルム位相でよいが、$t=0$ での微分の定義での極限は強位相の意味でとる。また

$$(\log G)^mG^c=G^c(\log G)^m,$$

が任意の $m\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{C}$ について成立する。

$W^\infty=\bigcap_k W^k$ とすれば　群 $\{G^t|t\in\mathbb{R}\}$ は W^∞ で定義される。W^∞ の位相は $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|_k=0$ が総ての k について成り立つとき $\lim_{n\to\infty}x_n=$

x として入れる。この場合 (16) は　この位相に関する強位相の意味で常に ($t \in \mathbb{R}$ で) 成り立つ。

定義から $\mathrm{e}^{\log G} = G$ となって

$$\mathrm{e}^{t(\log G)^m} = G^{t(\log G)^{m-1}}, \quad m \geq 1, \tag{18}$$

が成り立つ。ここで $\mathrm{e}^{t(\log G)^m}$ は

$$\mathrm{e}^{t(\log G)^m} e_n = \mathrm{e}^{t(\log \mu_n)^m} e_n,$$

で　定義される。ただし $\lim_{n\to\infty} \log \mu_n = -\infty$ だから　m が偶数なら

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^k \mu_n^{(\log \mu_n)^{m-1}} = \infty,$$

が総ての $k > 0$ に対し成り立つ。したがって $G^{(\log G)^{m-1}}$ の定義域は W^∞ より狭い。一方 m が奇数のときは

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n^{-k} \mu_n^{(\log \mu_n)^{m-1}} = 0,$$

が総ての $k > 0$ に対し成り立つから $G^{(\log G)^{m-1}}$ はトレース級作用素になる。逆に $G^{-(\log G)^{m-1}}$ は m が偶数ならトレース級　m が奇数なら　定義域は W^∞ より狭くなる。群 $\{G^{t(\log G)^m} | t \in \mathbb{R}\}$ を考えるときは　内積

$$(x, y)_{\exp;m,t} = (G^{t|\log G|^m/2} x, G^{t|\log G|^m/2} y),$$

を導入し　それから作られるソボレフ型空間を $W^t_{\exp;m}$ とおき　その共通部分を

$$\bigcap_{t\in\mathbb{R}} W^t_{\exp;m} = W^\infty_{\exp;m},$$

として　$W^\infty_{\exp;m}$ で考えればよい。更に m も動かすのなら $\bigcap_{m\in\mathrm{N}} W^\infty_{\exp;m} = W^\infty_{\exp;\infty}$ といった空間を考えればよいが以下の計算では　これらの空間は使わない。

$\log G e_n = \log \mu_n e_n$ だから

$$\mathrm{tr}(G^s \log G) = \sum_{n=1}^{\infty} \log \mu_n \mu_n^s = \frac{d}{ds} \zeta(G, s),$$

となって

$$\det{}_G G = \mathrm{e}^{\zeta'(G,s)}|_{s=0} = \det G, \tag{19}$$

である。ただし det$G$ は G の Ray-Singer 行列式である。一般に $\log T^m = m\log T$ だから

$$\det{}_G T^m = (\det{}_G T)^m,$$

が成立する。従って G が（正値）楕円形作用素 D のグリーン作用素であれば

$$\det{}_G D = \det D, \tag{20}$$

となる。

また　$\mathrm{tr}G^s = \zeta(G,s)$ から

$$\frac{d^n}{ds^n}\mathrm{tr}G^s = \mathrm{tr}\left(\frac{d^n}{ds^n}G^s\right) = \frac{d^n}{ds^n}\zeta(G,s),$$

が得られる。これから解析接続により

$$\frac{d^m}{ds^m}\mathrm{tr}G^s|_{s=0} = \sum_{n=1}^{\infty}(\log\mu_n)^m\mu_n^s|_{s=0} = \zeta^{(m)}(G,0), \tag{21}$$

である。$\mathrm{tr}G^s$ を $\mathrm{tr}G^{s+c}$ に置き換えることにより

補題１。m を０または正の整数、 $c\in\mathbb{C}$　とすれば

$$\frac{d^m}{ds^m}\mathrm{tr}G^{s+c}|_{s=0} = \zeta^{(m)}(G,c), \tag{22}$$

である。

注意。この式は $\zeta(G,s)$ が $s=c$ で正則なとき意味があるが、$s=c$ で極を持っているときは　正則化無限積の非存在を示すのに使える。

$\log G$ は作用素として G とかなり違ったものになるようである。$\dfrac{d}{dx}$ は G（や　その逆）とは同じようには扱えないが　実軸上テーラー展開可能な関数の空間では

$$e^{s\frac{d}{dx}}f(x) = \tau_a f(x),\ \tau_a f(x) = f(x+a)\ \text{だから}\ \log\tau_a = a\frac{d}{dx},$$

となり τ_a と $\log\tau_a$ はかなり違う。

微分の対数についても　分数冪微分（不定積分）の半群 $\{I^a|a\geq 0\}$ の生成作用素 A が 緩増加で $f(0)=0$ となる f に対し

$$Af(x) = \gamma f(x) + \int_0^x \log(x-t)\frac{df(t)}{dt}dt,$$

γ は　オイラーの定数、となることから $\log(\frac{d}{dx}) = -A$ として

$$\begin{aligned}\log(\frac{d}{dx})1 &= -(\log x + \gamma), \\ \log(\frac{d}{dx})x^n &= -x^n \log x + \big((1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \gamma\big)x^n,\end{aligned}$$

と計算される。これらは　多項式の空間を別の関数空間に移すが、$\log x$ の多項式の空間では

$$\begin{aligned}\log(\frac{d}{dx})(\log x)^n &= -\big((\log x)^{n+1} + \gamma(\log x)^n + \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} n! \zeta(n-k+1)}{k!}(\log x)^k\big),\end{aligned}$$

となって　同じ空間に移す。

なお $(\tau_h - I)^a$ を 2 項展開で

$$(\tau_h - I)^a = \tau_{ah}(I + \sum_{N-0}^{\infty} \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}\tau_{-nh}),$$

で定義すれば $f(x) = 0, x \leq 0$ で f が C^∞=級のとき

$$I^a f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(\tau_h - I)^a f(x)}{h^a},$$

と成るが　同様に

$$\log(\tau_h - I) = \log \tau_h + \log(I - \tau_h) = h\frac{d}{dx} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_{-nh}}{n},$$

を用いると $f(x) = 0, x \leq 0$ となる C^∞-級関数にたいしては

$$\log(\frac{d}{dx})f(x) = \lim_{h \downarrow 0}(\log(\tau_h - I) - \log h)f(x),$$

となる。

これらの例は $\log(\frac{d}{dx})$ が微分 $\frac{d}{dx}$ とかなり違うこと　またネーピア数 e が微分で果たす役割と似た働きを　オイラー数 γ が微分の対数で果たすことを示唆している ([5])。

6 $\zeta(G,s)$ の高階導関数による正則化無限積の計算

補題1により $\zeta(G,s)$ の高階導関数を用いて

$$\begin{aligned} e^{t\zeta^{(k)}(G,m+s)}|_{s=0} &= e^{t\frac{d^k}{ds^k}\mathrm{tr}G^{m+s}}|_{s=0} = e^{t\mathrm{tr}(\frac{d^k}{ds^k}G^{m+s})}|_{s=0} \\ &= e^{t\mathrm{tr}((\log G)^k G^{m+s})}|_{s=0} = \det_G e^{t(\log G)^k G^m}, \end{aligned}$$

となる。従って

定理1。$\zeta(G,s)$ が $s=c$ で正則の時

$$\det_G e^{t(\log G)^k G^c} = e^{t\zeta^{(k)}(G,c)}, \tag{23}$$

である。

$\exp(\log G)=G$ だから $k\geq 1$ のとき　この式は

$$\mathrm{dt}_G G^{t(\log G)^{k-1}G^c} = e^{t\zeta^{(k)}(G,c)}, \tag{24}$$

とも書きなおせる。なお $a\in\mathbb{R}$ とすれば

$$\det_G G^{a+t(\log G)^{k-1}G^c} = (\det G)^a e^{t\zeta^{(k)}(G,c)}, \tag{25}$$

となる。なお (23) で $k=0$, $c=0$ とすると

$$\det_G e^t = e^{t\zeta(G,0)} = (e^t)^\nu,$$

となり $\det_G C = C^\nu$ が従う。

G が楕円形作用素 D のグリーン作用素の時 D^m の熱核 $\exp(-tD^m)=\exp(-tG^{-m})$ の正則化行列式は

$$\det_G e^{-tG^{-m}} = e^{-t\zeta(G,-m)},$$

だから $zeta(G,-m)=0$ であれば $\det_G e^{-tG^{-m}}$ は t に関係せず　常に値が 1 である。例えば H を $[0,1]$ の境界条件 $f(0)=f(1)=0$ を満たす C^2-級関数の空間の完備化とし G を $D=-d^2/dx^2$ のグリーン作用素とすれば

$$\zeta(G,s) = \frac{1}{\pi^2}\zeta(2s),$$

$\zeta(s)$ はリーマンの ζ-関数、だから $\zeta(G,-m)=0$, $m\in\mathbb{N}$ となり　この場合の熱核の正則化行列式は時間 t に無関係に 1 となる。

補題2。$T_1=e^{S_1}$, $T_2=e^{S_2}$ が正則化行列式を持ち T_1^s, T_2^s について Campbell-Haussdorff の公式が成り立ち $G^sS_2=S_2G^s$ であれば

$$\det_G T_1T_2 = \det_G T_1 \det_G T_2,$$

である。

証明。仮定から $\mathrm{tr}G^sS_2H = \mathrm{tr}S_2G^sH = \mathrm{tr}G^sHS_2$ が任意の H について成立する。従って $\mathrm{tr}G^s[S_2, H] = 0$ である。他方 Campbell-Haussdorff の公式 ([9]) から $|t|$ が小さいとき

$$T_1^tT_2^t = \mathrm{e}^{tS_1}\mathrm{e}^{tS_2} = \mathrm{e}^{t(S_1+S_2)+[S_2,f(t,S_1,S_2)]},$$

である。従って

$$\begin{aligned}\det{}_G(T_1^tT_2^t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s\log(T_1T_2))}|_{s=0} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s(t(S_1+S_2)+[S_2,f(t,S_1,S_2)]))}|_{s=0}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^s(t(S_1+S_2))}|_{s=0} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^stS_1)}|_{s=0}\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(G^stS_2)}|_{s=0},\end{aligned}$$

となり解析接続で補題が成立する。

補題2　により　微分方程式

$$\frac{d}{dt}U_t + G^mU_t = 0,$$

の一般の解 $U_t = \exp(-tG^m)C$ については　正則化行列式について C が G^s と可換であれば

$$\det{}_G(\mathrm{e}^{-tG^m}C) = \det{}_G\mathrm{e}^{-tG^m}\cdot \mathrm{dt}_GC,$$

がなりたつ。

定理1から

定理2。$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty$ の時 $k \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{C}$ とすれば $\zeta(G,s)$ が $s = c$ で正則であれば

$$:\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n^{t(\log\mu_n)^{k-1}\mu_n^c}(1+x_n):_G = \mathrm{e}^{t\zeta^{(k)}(G,c)}\prod_{n=1}^{\infty}(1+x_n), \tag{26}$$

である。また $\zeta(G,s)$ が $s = c$ で極をもてば $:\prod_{n=1}^{\infty}\mu_n^{t(\log\mu_n)^{k-1}\mu_n^c}(1+x_n):$ は発散する。

$x \in H^\sharp$ の座標を $(x_1, x_2, \ldots)$, $x = \sum_n x_ne_n$ とし $:\prod_n x_n :=: \sigma_\infty x:$ を $H^\sharp$ の中で定義された関数と思えば　この例は H の中でもかなり多くの元 $x \in H$ で $:\prod_n x_n:$ が定義されることを示している。例えば $c = 0$ で $t > 0$, k が1でない奇数　または $t < 0$ で k が偶数の時　あるいは $\mathrm{Re}c < 0$ の時 $t > 0$ で k が奇数　または $t < 0$ で k が偶数のときは $x \in H$ となる。従って $:\sigma_\infty x:$ は H の稠密な部分集合の上でも定義できる。

ただし $\nu = \zeta(G,0)$ が整数でなければ　この関数は一価でない。

また $a > d/2$ の時 $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^a e^{\mu_n^d} e_n \in H^\sharp$ だが

$$: \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n^a e^{\mu_n^{d+\epsilon}} := (\det G)^a e^{\zeta(d+\epsilon)},$$

だから領域 $\mathcal{D}_{0,\mu^a]\mu^d} = \{\sum_n x_n e_n \in H^\sharp | 0 \le x_n \le \mu_n^d\}$ (H の部分集合になる）は正則化体積を持たない。

注意。$\ell^1 = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n | \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ とすれば（集合として）$\ell^1 \subset W^{-d/2,\sharp}$ である。$e_{\infty,d/2} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n$ だから $e_{\infty,-d/2} + \ell^1 \subset W^{-d/2,\sharp}$ であり $y \in e_{\infty,-d/2} + \ell^1$ であれば

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + x_n) e_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty,$$

である。集合としては $\ell^1 \subset H$ だから

$$G^k(e_{\infty,-d/2} + \ell^1) \subset H^\sharp, \text{ if } k \ge d/2,$$

である。また $e^{t(\log G)^k G^c}$ については

$$e^{t(\log G)^k G^c}(e_{\infty,-d/2} + \ell^1) \subset H^\sharp, \text{ if } G^{-d/2} e^{t(\log G)^k G^c} \text{ is bounded},$$

が成り立つ。これらの場合　それによる $e_{\infty,-d/2} + \ell^1$ の像 (H の部分集合）の上では $: \sigma_\infty x :$ が存在する。従って H の稠密な部分集合の上で $: \sigma_\infty x :$ が　存在する。

$x = \sum_n x_n e_n$, $y = \sum_n y_n e_n$ とするとき $x \cdot y = \sum_n x_n y_n e_n$, また I_x を $I_x e_n = x_n e_n$ で定義されるスケーリング作用素とすれば

$$I_x I_y = I_{x \cdot y}, \quad G I_x = I_x G,$$

である。特に $x, y \in \ell^1$ なら $x \cdot y \in \ell^1$ である。また $I_{e_{\infty,-d/2}+x} = I + I_x$ だから $u, v \in e_{\infty,-d/2} + \ell^1$ であれば $u \cdot v \in e_{\infty,-d/2} + \ell^1$ となり $\{I_u | u \in e_{\infty,-d/2} + \ell^1\}$ は作用素の積で半群になる。特に I_u が逆をもてば $\det_G I_u$ は存在し

$$\det{}_G I_u = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n), \quad u = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + x_n) e_n,$$

である。また $x \in \ell^1$ であれば $y_i = \sum_n y_{i,n} e_n$, $i = 1, 2, \ldots$ が弱収束すれば $\|y_i\| < C$ だから　$\epsilon > 0$ にたいし　$\sum_{n>N} x_n^2 < (\epsilon/4C)^2$ となる N を

固定し $|y_{i,n} - y_{j,n}|^2 < \epsilon/4\|x\|^2, n = 1, \ldots, N$ が $i, j > k$ なら成立するような k を撰べば

$$\|x \cdot (y_i - y_j)\| < \frac{\epsilon\|x\|}{2\|x\|} + \frac{\epsilon 2C}{4C} = \epsilon, \quad i, j > k,$$

だから I_x はコンパクトになる ($x \in H$ でも正しい)。従って $I_u, u \in e_{\infty,-d/2} + \ell^1$ が逆を持てば I_u は $I + K$, K はコンパクトで逆を持つ作用素になる。

7 正則化行列式の対称性

3 節に書いたように 一般には $\det_G PTP^{-1} = \det_G T$ は成り立たない。これが成立するような P としては $I + K$, K はコンパクト作用素の形（この形の逆をもつ作用素の群を $\mathcal{K}$) か $PG = GP$ となるもの (このような作用素の群を $\mathcal{C} = G$) がある。$P = I + K$ で K が H^- のコンパクト作用素に拡張されれば P は $H^\sharp$ に拡張できる（$Pe_\infty \in H^\sharp$ となる)。このような P の作る $\mathcal{K}$ の部分群を $\mathcal{K}^\natural$ とする。 $PG = GP$ となる P は必ずしも $H^\sharp$ の作用素には拡張できず 正則化無限次元積分の計算に使えない。G の固有値に縮退がなければ $H^\sharp$ を固定する $\mathcal{C}_G$ の元で $\mathcal{K}$ に属しないものは cI の形である。またこのとき $P = cI + K, K$ はコンパクト となるので、正則化行列式の対称性の群は ($H^\sharp$ の自己同型にかぎれば) $\mathcal{K}^\natural$ を $\mathbb{K}^\times I$ で拡大した群 $\mathrm{Sym}(H^\sharp)$ になる。

しかし 非有界の G^k, $k < 0$, や $\log G$ と ともに $G^{(\log G)^k}$ などの元は Gauss 型経路積分の計算のようにいろいろ使えるので、

$$\mathrm{Sym}(H^\sharp) = \mathcal{K}^\natural \cdot \{cI | c \neq 0\},$$

に G^k や $G^{(\log G)^k}$ を添加した群を 正則化行列式の対称性の群として扱うのは意味がある。

$f(G)$ を G の関数とすれば $[G, e^{f(G)}] = 0$ である。ただし $e^{f(G)}$ は

$$e^{f(G)} e_n = e^{f(\mu_n)} e_n,$$

で定義される。$e^{f(G)}$ は有界とはかぎらない（W^k や W^∞ で定義されるともかぎらない)。しかし $f(G)$ が $\log G$ と $G^{c_1}, \ldots, G^{c_m}$ の冪級数であれば $\det_G e^{f(G)}$ は定理２から計算できる。具体的には

$$f(G) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_m t_{k,m} (\log G)^k G^{c_{k,m}}, \tag{27}$$

$t_{k,m} \in \mathbb{K}$、m は 0 または正の整数、$c_{k,m} \in \mathbb{K}$ で $\zeta(G,s)$ は $c_{k,m}$ で正則、の形とする。従って

$$\mathrm{e}^{f(G)} = \mathrm{e}^{\sum_m G^{c_{0,m}}} \prod_{k=1}^{\infty} G^{(\log G)^{k-1}} \mathrm{e}^{\sum_m t_{k,m} G^{c_{k,m}}}, \tag{28}$$

である。このとき

$$\det{}_G \mathrm{e}^{f(G)} = \mathrm{e}^{\sum_{k=0}^{\infty} \sum_m t_{k,m} \zeta^{(k)}(G, c_{k,m})}, \tag{29}$$

となる。ただし和 $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_m t_{k,m} \zeta^{(k)}(G, c_{k,m})$ は収束するものとする。

(27) の形の関数で　有限和となるものの全体は

$$\mathfrak{S} = (\mathbb{N} \cup \{0\}) \times (\mathbb{K} \setminus \mathrm{Sing}(\zeta(G,s))),$$

$\mathrm{Sing}(\zeta(G,s))$ は $\zeta(G,s)$ の特異点の集合、の元を基底とする $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 $\mathbb{K}^{\mathfrak{S}}$ である。従って (27) の形で　意味のある作用素全体は　何らかの意味で $\mathbb{K}^{\mathfrak{S}}$ の完備化になるが　例えば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\log G)^m G^c = G^{c+1},$$

といった関係があるので、この完備化を記述するのは難しい。また (27) の形で意味のある作用素といっても　定義域が　必ずしも確定しないので　意味を正確に述べるのも困難である。しかし $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_m t_{k,m} \zeta^{(k)}(G, c_{k,m})$ が収束する　という条件は確定する。

定義 4。$\mathbb{K}^{\mathfrak{S}}$ の拡大 $\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ を

$$\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*} = \{\mathrm{e}^{f(G)} | \sum_{k=0}^{\infty} \sum_m t_{k,m} \zeta^{(k)}(G, c_{k,m}) \text{ converges}\}, \tag{30}$$

で定義する。

$T \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ であれば $\det_G T$ が存在する。また (28) により

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_0^{\mathfrak{S},*} &= \{\mathrm{e}^{\sum_m t_{0,m} G^{c_{0,m}}} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}\}, \\ \mathbb{K}_k^{\mathfrak{S},*} &= \{G^{(\log G)^{k-1}} \mathrm{e}^{\sum_m t_{k,m} G^{c_{k,m}}} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}\}, \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

とすれば $\mathbb{K}_0^{\mathfrak{S},*}$ は $\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ の部分群であり、$\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ は

$$\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*} = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{K}_k^{\mathfrak{S},*}, \tag{31}$$

と分解される。

$e^G \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ だが G は H^- でのコンパクト作用素だから $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}G^n$ も H^- でのコンパクト作用素になる。よって $\mathcal{K}^\natural \cap \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*} \neq \{I\}$ である。更に $\mathcal{K}^\natural \cap \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ は $\mathbb{K}_0^{\mathfrak{S},*}$ を含むが　$e^{t(\log G)^{k-1}}$ も $t > 0$, k が偶数　または $t < 0$, k が奇数ならコンパクトになるので、$\mathbb{K}_k^{\mathfrak{S},*}$, $k \geq 1$ の元でも $\mathcal{K}^\natural$ に属するものがある。しかし $k \geq 1$ であれば $\mathbb{K}_k^{\mathfrak{S},*}$ の中には $\mathcal{K}^\natural$ に含まれない元がある（含まれる元もある)。従って $\mathcal{K}^\natural \cap \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ の決定は難しそうである。

$\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ は（ベクトル空間として）無限次元で　これによる $\mathrm{Sym}(H^\sharp)$ の拡大を $\overline{\mathrm{Sym}}(H^\sharp)$ とする。$\mathbb{K}^\times I \subset \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ だから $\overline{\mathrm{Sym}}(H^\sharp)$ は $\mathcal{K}^\natural$ と $\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ から生成された群:

$$\overline{\mathrm{Sym}}(H^\sharp) = (\mathcal{K}^\natural, \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}), \tag{32}$$

である。$\mathcal{K}^\natural \cap \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ の決定ができないので、$\overline{\mathrm{Sym}}(H^\sharp)/N(\mathcal{K}^\natural)$; $N(\mathcal{K}^\natural)$ は $\mathcal{K}^\natural$ の正規化、も決定できないが、

$$\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}/(\mathcal{K}^\natural \cap \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}) \subset \overline{\mathrm{Sym}}(H^\sharp)/N(\mathcal{K}^\natural), \tag{33}$$

だから　無限次元である。なお $N(\mathcal{K}^\natural)$ は　どれかの $e^{f(G)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*}$ の定義域でコンパクトになる作用素 $(+I)$ の形の逆を持つ作用素の全体として特徴付けられるが詳細は省略する。

(33) から　$H^\sharp$ の自己同型という制約をはずせば　共役変換が正則化行列式を保存するような写像（必ずしも有界作用素でない）の作る群は $\mathcal{K}^\natural$ や $\mathrm{Sym}(H^\sharp)$ より　かなり大きい群になる。

8　G が正でない場合

この節では　G が（非退化な）ディラック作用素 $\not{D}$ のグリーン作用素など正負とも無限の固有値を持つ場合を考える。

仮定から G の固有値は $\mu_{\pm,1} \geq \mu_{\pm,2} \geq \ldots > 0; Ge_{\pm,n} = \pm\mu_n \quad e_{\pm,n}$ となる。H の $\{e_{\pm,1}, e_{\pm,2}, \ldots\}$ で張られる部分空間を $H_\pm$, $G|H_\pm = G_\pm$ とする。また $|G_\pm| = \pm G_\pm$ とすれば $|G| = |G_+| + |G_-|$ である。$P_\pm = G|G|^{-1}|H_\pm$ とおく。これらは H から $H_\pm$ への射影である。

G は ζ-関数 $\zeta(G,s)$ のほかに η-関数

$$\eta(G,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{+,n}^s - \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{-,n}^s,$$

が定義できる。また $\zeta(|G|,s) = \zeta(G^2, s/2)$ である。これらは $s = 0$ で正

則と仮定する ([8] 参照)。これらを用いて

$$\zeta(G_\pm) = \frac{\zeta(|G|, s) \pm \eta(G, s)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{\pm,n}^s, \tag{34}$$

とおく。定義と仮定から $\zeta(G_\pm, s)$ も全平面に有利型に解析接続され $s = 0$ で正則である。$\nu_\pm = \zeta(G_\pm, 0)$ と置く。このとき

$$\det{}_{|G|}G = \det G = (-1)^{\nu_-}\det|G|,$$

となるから ν_- が整数で　なければ $\det G$ は一意ではない。とくに G が対称;$\mu_{+,n} = \mu_{-,n}, n = 1, 2, \ldots$ であれば $\nu_+ = \nu_- = \nu/2$ だから nu が偶数の時に限り $\det G$ は一意的にさだまる。

$\{H_\pm, G_\pm\}$ には 2 節の議論を適用するには

$$\{H, G\} = \{H_+, G_+\} \oplus \{H_-, G_-\},$$

と考えたほうがよい。このとき (H が実係数として)

$$H^{\sharp,2} = H_+^\sharp \oplus H_-^\sharp = H \oplus (\mathbb{R}e_{+,\infty} \oplus \mathbb{R}e_{-,\infty}), \tag{35}$$

$e_{\pm,\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{\pm,n}^{d/2} e_{\pm,\infty}$ とする。$e_\infty = e_{+,\infty} + e_{-,\infty}$ だから $H^\sharp \subset H^{\sharp,2}$ である。従って $H^\sharp$ の正則化体積要素 $: d^\infty x :$ と $H_\pm^s harp$ の体積要素 $: d^\infty x_\pm :$ の積は異なっていて $: d^\infty x_+ :: d^\infty x_- :$ は $H^{\sharp,2}$ の正則化体積要素 $: d^{\infty,2} x :$ である。微分形式として扱うときは G が対称であれば

$$: d^{\infty,2}x := (-1)^{\nu(\nu-2)/8} : d^\infty x_+ : \wedge : d^\infty x_- :,$$

となって ν が偶数になる必要がある。対称でない場合は　このような式は得られない。

また G が対称であれば

$$\begin{aligned} Je_{+,n} &= e_{-,n},\ Je_{-,n} = -e_{+,n},\ n = 1, 2, \ldots, \\ Je_{+,\infty} &= e_{-,\infty},\ Je_{-,\infty} = -e_{+,\infty}, \end{aligned}$$

と置いて $H^{\sharp,2}$ に $\sqrt{-1}$-作用素 J を定義できる。これから $H^{\sharp,2}$ を複素空間として取り扱えるが現在の所　それについて特別の結果は得ていない。

正則化無限積については　$x = x_+ + x_-$, $x \in H^{\sharp,2}$,$x_\pm \in H_\pm^\sharp$ であれば

$$: \sigma_\infty x :_{|G|} =: \sigma_\infty x_+ :_{G_+}: \sigma_\infty x_- :_{G_-}, \tag{36}$$

である。また $T_\pm$ が $H_\pm$ の稠密な部分空間で定義された作用素で $\log T_\pm = S_\pm$ が存在するとき　$T = T_+ \dot{+} T_-$ は H の稠密な部分空間で定義され

$$\log T = \log T_+ \dot{+} \log T_- = S_+ \dot{+} S_-,$$

だから

$$\det_{|G|}T = \det_{G_+}T_+\det_{G_-}T_-, \tag{37}$$

となる。ただし $T_+\dot{+}T_-$ は T_+ と T_- のホイットニー和;

$$T_+\dot{+}T_-(x_+ + x_-) = T_+x_+ + T_-x_-,$$

である。 これから

$$\begin{aligned}
&\det_{|G|}e^{(t_+P_+(\log G_+)^m + G_+^{c_+})\dot{+}(t_-P_-(\log G_-)^m - G_-^{c_-})} \\
= \;& e^{(t_+\zeta^{(m_+)}(G_+,c_+)) + (t_-\zeta^{(m_-)}(G_-,c_-)}, \qquad (38)
\end{aligned}$$

等が得られる。

G が対称のとき $|G|P = P|G|$ となる P は (2,2)-行列の直和 $P = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, $P_n \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ である。従って共役変換で 正則化行列式を不変にする有界作用素の群 $\mathrm{Sym}(H^{\natural,2})$ は $\mathcal{K}^{\natural}$ を $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ で拡大したものになる。

(38) から $f_\pm(G_\pm) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_m t_{\pm,k,m}(\log G_\pm)^k G_\pm^{c_{\pm,k,m}}$ と置けば

$$\begin{aligned}
&\det_{|G|}e^{f_+(G_+)\dot{+}f_-(G_-)} \\
= \;& e^{\sum_k\sum_m t_{+,k,m}\zeta^{(k)}(G_+,c_{+,k,m})}e^{\sum_k\sum_m t_{-,k,m}\zeta^{(k)}(G_-,c_{-,k,m})},
\end{aligned}$$

である。

前節と同様に 群 $\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*,\pm}$ を定義し

$$\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*,2} = \{e^{f_+(G_+)}\dot{+}e^{f_-(G_-)} | e^{f_\pm(G_\pm)} \in \mathbb{K}^{\mathfrak{S},*,\pm}\},$$

とすれば $\mathrm{Sym}(H^{\natural,2})$ と $\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*,2}$ から生成された群が この場合の正則化行列式の対称性の群 $\overline{\mathrm{Sym}}(H^{\natural,2})$ になる。なお

$$e^{f_+(G_+)\dot{+}f_-(G_-)}e_{\pm,n} = e^{f_\pm(\mu_{\pm,n})}e_{\pm,n},$$

だから $GL(2,\mathbb{R})$ による $\mathcal{K}^{\natural}$ の拡大は $\mathbb{K}^{\mathfrak{S},*,2}$ で拡大しても得られない。

写像空間等に今までの議論を適用するときは $D\otimes I_n$, I_n は n-次単位行列のグリーン作用素を使うが このときも同様にできる ([2])。H は n-次元空間を添加して拡大されるから この時は $\mathcal{K}^{\natural}$ を $GL(n,\mathbb{R})$ で拡大することになる。

参考文献

[1] Amit,D.J. Martín-Mayor,V.: Field Theory, Renormalization Group and Critical Phenomena, 3-rd Ed., World Sci. 2005.

[2] Asada,A.: Regularaized Calculus: An application of zeta regularization to infinite dimensional geometry and analysis, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., 1(2004), 107-157, Regularized calculus and its applications, to appear.

[3] Asada,A.: Regularized volume form of the sphere of Hilbert space with the determinat bundle, Differential Geometry and Its Applications, eds. Bureš,J. Kowalski,O. Krupka,D. Slovak,J., 397-409. matfyzpress, Prague 2004.

[4] Asada,A.: Zeta regularized integral and Fourier expansion of functions on an infinite diemnsional torus, to appear, Regularized integral and Fourier expansion of functions on infinite dimensional torus, preprint.

[5] Asada,A.: Note on fractional calculus, preprint, Fractional calculus 入門 preprint.

[6] Cardona,A. Ducourtioux,C. Paycha,S.: From tracial anomaly to anomalies in quantum field theory, Commun. Math. Phys., 242(2002), 31-65.

[7] Cuntz,J.: Cyclic Theory, Bivariant K-theory and the Bivariant Chern-Connes Character, EMS121, Cyclic Homology in Non-Commutative Geometry, eds. Cuntz et al. 1-71, Springer, 2001.

[8] Merlose,R.B.: The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem, ISBN 1568810024, Free online textbook.

内山康一訳。境界付き多様体のディラック作用素ー Atiyah-Patodi-Singer の指数定理、 スプリンガーフェアラーグ東京、2004.

[9] Okikiolu,K.: The Campbell-Haussdorff theorem for elliptic operators and a related trace formula, The multiplicative anomaly for determiant of elliptic operaotrs, Duke Math. J., 79(1995), 682-722, 723-750.

[10] Paycha,S.: Renormalized traces as a looking glass into infinite dimensional geometry, Infin. Dimens. Anal. Quantum Prob. Relat. Top., 4(2001), 221-266.

[11] Simon,B.: Trace Ideals and Their Applications, Cambridge, 1979.