数理解析研究所講究録
第 1576 巻 2008 年 134-153

$Map(S^3, G)$ の可換拡大の, 4次元多様体上の接続の幾何的準量子化束への作用について

郡　敏昭 (Tosiaki Kori)

早稲田大学理工学部 (Waseda University)

1節から3節の結果は80年代前半から知られていたものを主に Miskelsson の考えに従って一つの筋にまとめたものである (小さな新しい観点もある). この筋道に沿って、0-同境な4次元多様体の連結部分多様体 M で、その3次元境界がいくつかの S^3 の直和となっているもの、に対して (4節の **TABLE** を用いると) 1節から3節の結果を拡張できる. とくに S^3G の可換拡大が M 上の平坦接続の moduli 空間の上の幾何的量子化束に作用することが示せる. S^3G の可換拡大も Mickelsson により 1983 年に導入されたのだが 直後の藤井氏による n 次元への拡張の試み以来 人々の関心が離れているように思える. M 上の平坦接続の moduli 空間への S^3G の infinitesimally pre-symplectic な作用を equivariant に その上の Chern-Simons 準量子化束への作用に持ち上げるためには **Mickelsson の可換拡大が必要である**、ことを示した. これは Mickelsson の可換拡大の役割を示している. このあたりは 4次元 Y-M の場合への conformal block の拡張とまでも云わなくても たとえば S^3G に対する Birkhoff factorization の類似が示せたら しっかりした一分野として関心を引くだろうけれど.

1　loop 群 S^1G の中心拡大

1.1

多様体 Σ から $G = SU(N)$, $N \geq 2$, への C^∞ 写像で、ある点 $p_0 \in \Sigma$ での値を $1 \in G$ に取るものの全体を ΣG と書く:

$$\Sigma G = \{f : \Sigma \longrightarrow G,\ f)p_0) = 1\}$$

3次元 loop 群 S^3G の可換拡大とその幾何的準量子化における役割を解説するために　まず loop 群 S^1G の中心拡大の Mickelsson に由来する説明を述べる.

2次元半球を D とする. $f \in DG$ は境界 $\partial D = S^1$ 上の点 p_0 で値 $1 \in G$ を取るとしておく. $DG \times S^1$ には次のように群の演算が定義される.

$$(g_1,\, z_1) * (g_2,\, z_2) = (\, g_1 g_2,\ z_1 z_2\, c(g_1, g_2)\,), \quad \text{for } g_1,\, g_2 \in DG, \quad z_1,\, z_2 \in S^1, \tag{1}$$

ここに

$$c(g_1, g_2) = \exp \frac{i}{4\pi} \int_D Tr(dg_2 g_2^{-1} g_1^{-1} dg_1). \tag{2}$$

結合則は、

$$\gamma(g_1, g_2) = Tr(dg_2 g_2^{-1} g_1^{-1} dg_1).$$

とおくとき、次の関係が成り立つことから従う：

$$\gamma(g_1, g_2 g_3) + \gamma(g_2, g_3) = \gamma(g_1, g_2) + \gamma(g_1 g_2, g_3).$$

1.2

さて境界 S^1 上でとる値が $1 \in G$ であるような写像のつくる部分群

$$D_0 G = \{ f \in D^2 G : \ f|S^1 = 1 \}$$

を考える．$D_0 G$ が群 $DG \times S^1$ の正規部分群になることを見よう．

• $S^3 G \ni f$ の写像度は

$$\deg\ F = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3} tr(dF\, F^{-1})^3. \tag{3}$$

で定義される．$\pi_3(G) = \mathbf{Z}$ に注意．

$\pi_2(G) = 1$ より $\forall g \in S^2 G$ は S^2 を境界とする 3 次元ボール B^3 へ $\tilde{g} \in B^3 G$ として拡張される． $g \in S^2 G$ の B^3 への任意の延長 $\tilde{g} \in B^3 G$ をとり

$$C_3(g) = \frac{1}{24\pi^2} \int_{B^3} tr(d\tilde{g}\, \tilde{g}^{-1})^3. \tag{4}$$

と定義する．これは B^3 への延長に依存するが、別の延長 $\widehat{g} \in B^{3\prime} G$ をとると B^3 上で $\tilde{g}$, $B^{3\prime}$ 上で $\widehat{g}$ なる写像を $h \in S^3 G$ として、

$$\frac{1}{24\pi^2} \int_{B^3} tr(d\tilde{g}\, \tilde{g}^{-1})^3 - \frac{1}{24\pi^2} \int_{B^{3\prime}} tr(d\widehat{g}\, \widehat{g}^{-1})^3 = \deg h$$

なので $C_3(g)$ は $\mathbf{Z}$ を法として B^3 への延長に依存せず定義される．とくに $\exp 2\pi i C_3(g)$, $g \in S^2 G$, は well defined.

• D' で D とおなじく S^1 を赤道とする南半球 disc をあらわす;$D \cup_{S^1} D' = S^2$.

$f \in DG$ と $f' \in D'G$ が境界上で等しい; $f|S^1 = f'|(-S^1)$, とき f と f' の張り合わせを

$$f \vee f' \in S^2 G$$

と書く．

$f \in D_0 G$ は南半球 D' に $1 \in G$ として延長できる：

$$f \vee 1' \in S^2 G.$$

そこで $D_0 G$ を群 $DG \times S^1$ に写像

$$\phi :\ D_0 G \ni f \longrightarrow (f, \exp 2\pi i\, C_3(f \vee 1')) \in \phi(D_0 G) \tag{5}$$

により埋め込む.

$\phi(D_0G)$ は $DG\times S^1$ の正規部分群である．実際、

$$\begin{array}{rcl}(g,z)*(f,\exp 2\pi i\, C_3(f\vee 1'))*(g,z)^{-1} &=& \\ (gfg^{-1},\exp 2\pi i\, C_3(f\vee 1')\, c(g,f)c(gf,g^{-1}) &=& (gfg^{-1},\exp 2\pi i\, C_3(\,(gfg^{-1})\vee 1'\,)\end{array}$$

最後の式は関係

$$C_3(f\vee 1')+c(g,f)+c(gf,g^{-1})=C_3((gfg^{-1}\vee 1')) \tag{6}$$

から従う.

• $\pi_1(G)=1$ より $S^1G\ni f$ はその内部 D に smooth に延長される．したがって

$$S^1G=DG/D_0G. \tag{7}$$

一方 S^1 は $DG\times S^1$ に中心 $(g,e^{i\theta})$, $g\in DG$, として入っている．したがって群 $DG\times S^1$ の正規部分群 D_0G による商群は 群 S^1G の S^1 による中心拡大：

$$1\longrightarrow S^1\longrightarrow DG\times S^1/D_0G\xrightarrow{\pi}S^1G\longrightarrow 1$$

になる.

• リー環 $Lie\,S^1G=Map(S^1,\,Lie\,G)$ の中心拡大.

リー群 S^1G の中心拡大 $\widehat{S^1G}=DG\times S^1/D_0G$ の cocycle $c(f,g)$ の形より $Lie\,\widehat{S^1G}$ は cocycle

$$c(\xi,\eta)=\frac{i}{2\pi}\int_D Tr(d\xi\,d\eta)=\frac{i}{2\pi}\int_{S^1}Tr(\xi\,d\eta) \tag{8}$$

により得られる.

$$[\,(\xi,a),\,(\eta,b)\,]=(\,[\xi,\eta],\,b\xi-a\eta+c(\xi,\eta)\,].$$

1.3

loop 群 S^1G の中心拡大を

$$\widehat{S^1G}=DG\times S^1/D_0G \tag{9}$$

と書く．第一成分 $f\in DG$ の境界への制限を

$$\pi:\ \widehat{S^1G}\ni[f,z]\ \longrightarrow\pi([f,z])=f|S^1\in S^1G$$

として、$\widehat{S^1G}\xrightarrow{\pi}S^1G$ は S^1 主束となることを見ておこう：

$$\widehat{S^1G}=DG\times S^1/\sim \tag{10}$$

と書ける．　ここに $\sim$ は次で定義される同値関係

$$(g_1,z_1)\sim(g_2,z_2)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} g_2 &= hg_1 \quad \text{for a } h\in D_0G\\ z_2 &= z_1\exp\,2\pi i\left(\frac{1}{8\pi^2}\int_D\gamma(g_1,h)+C_3(h\vee 1')\right)\end{array}\right.$$

すなわち $\widehat{S^1G}$ は transition function を

$$\chi_D(g_1, g_2) = \exp\, 2\pi i \left(\frac{1}{8\pi^2} \int_D \gamma(g_1,\, g_2 g_1^{-1}) + C_3((g_2 g_1^{-1}) \vee 1') \right) \tag{11}$$

とする S^1 主束である.

S^1 主束 $\widehat{S^1G} \xrightarrow{\pi} S^1G$ の接続が

$$\theta_f(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_D Tr(df f^{-1} d\xi) \tag{12}$$

で定義される. 曲率は

$$\omega_g(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_D Tr(d\xi\, d\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} Tr(\xi\, d\eta) \tag{13}$$

リー環 $Lie\, S^1G$ の中心拡大の cocycle $c(\xi, \eta)$ は $i\omega(\xi, \eta)$ であることがわかる.

1.4 dual

• S^2G は一点 p_0 で pointed $(f(p_0) = 1)$ な G 値写像全体であった. $S^2G \times S^1$ に積

$$\begin{aligned} (g_1,\, z_1) * (g_2,\, z_2) &= (\, g_1 g_2,\, z_1 z_2\, c_0(g_1, g_2)\,), \quad \text{for } g_1,\, g_2 \in S^2G, \quad z_1,\, z_2 \in S^1, \\ c_0(g_1, g_2) &= \exp\, \frac{i}{4\pi} \int_{S^2} Tr(dg_2 g_2^{-1} g_1^{-1} dg_1). \end{aligned} \tag{14}$$

を定義すると $S^2G \times S^1$ は群になる.

$$\left\{ (g, \exp\, 2\pi i C_3(g)) \in S^2G \times S^1;\; g \in S^2G \right\}.$$

は正規部分群となる. (6) 式と同じ関係

$$c_0(f, g) + c_0(fg, f^{-1}) + C_3(g) = C_3(fgf^{-1}). \tag{15}$$

この正規部分群での商を考えるのだが、今度は何の中心拡大 (何の上の S^1 主束) になっているかを見よう. D は一個の S^1 を境界としているが、S^2 は 0 個の S^1 を境界とすると思う. こう思うと境界で identity となる $f \in S^2G$ 全体 : S^2_0G は S^2G と一致している : $\phi G = S^2G/S^2G =$ 一点集合.

$\widehat{\phi G} = S^2G \times S^1/S^2G$ は ϕG 上の S^1 主束で次のように得られる. $g_1, g_2 \in S^2G$, $z_1, z_2 \in S^1$ に対して、

$$(g_1, z_1) \sim (g_2, z_2) \Longleftrightarrow z_2 = z_1\, \exp\, 2\pi i \left(\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \gamma(g_1,\, g_2 g_1^{-1}) + C_3(g_2 g_1^{-1}) \right) \tag{16}$$

すなわち

$$\chi_{S^2}(g_1, g_2) = \exp\, 2\pi i \left(\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \gamma(g_1,\, g_2 g_1^{-1}\,) + C_3(g_2 g_1^{-1}) \right)$$

が transition function ((10) 式参照). 実際には 次の写像で群同型：

$$\widehat{\phi G} \simeq S^1.$$

$$\widehat{\phi G} \ni\ [g, z] \longrightarrow z\ \exp\ 2\pi i C_3(g) \in S^1. \tag{17}$$

これは (15) 式からわかる.

• 1.1 と同様に $D'G \times S^1$ に積

$$(g_1,\, z_1) * (g_2,\, z_2) = (\, g_1 g_2,\, z_1 z_2\, c'(g_1, g_2)\,), \quad \text{for } g_1,\, g_2 \in D'G, \quad z_1,\, z_2 \in S^1, \tag{18}$$

を定義する. ここに

$$c'(g_1, g_2) = \exp\, \frac{i}{4\pi} \int_{D'} Tr(dg_2 g_2^{-1}\, g_1^{-1} dg_1). \tag{19}$$

$f' \in D_0'G$ は $1 \in DG$ により北半球に拡張しておく.

$$1 \vee f' \in S^2 G.$$

そして $D_0'G$ を $D'G \times S^1$ に写像

$$\phi' :\ D_0'G \ni f' \longrightarrow (f',\, \exp 2\pi i\, C_3(1 \vee f')\,) \in \phi'(D_0'G) \tag{20}$$

により正規部分群として埋め込む.

群 $D'G \times S^1$ の正規部分群 $D_0'G$ による商群は 群 S^1G の S^1 による中心拡大：

$$1 \longrightarrow S^1 \longrightarrow D'G \times S^1/D_0'G \xrightarrow{\ \pi\ } S^1G \longrightarrow 1$$

であることがわかる.

この中心拡大を

$$\widehat{S^1G}' = D'G \times S^1/D_0'@ \tag{21}$$

と書く. S^1 主束 $\widehat{S^1G}' \xrightarrow{\ \pi\ } S^1G$ が得られ、その接続、曲率も前と同じように定義される.

• $\widehat{S^1G}$ と $\widehat{S^1G}'$ の duality は次で与えられる：

$$\widehat{S^1G} \times \widehat{S^1G}' \quad \longrightarrow \quad \widehat{\phi G} \quad \simeq \quad S^1 \tag{22}$$

$$([f, z],\, [f', z']) \longrightarrow ([f \vee f', zz' \exp\, 2\pi i C_3(f \vee f')\,]) \longrightarrow zz' \exp\, 2\pi i C_3(f \vee f')$$

この duality relation が積と可換であることも確かめられる.

2 準量子化—— Atiyah-Bott ほか

2.1

$\mathcal{A}$ で主束 $D^2 \times G$ 上の既約接続全体の空間とする.（より一般に いくつかの S^1 を境界として持つ曲面 Σ 上の G 主束 $P \xrightarrow{\pi} \Sigma$ の上で考えられる.）

$\mathcal{A}$ に作用するゲージ変換群は DG であるが、境界 S^1 に制限すると恒等変換となる部分ゲージ変換群 D_0G の作用も考える.

$$f \cdot A = f^{-1}Af + f^{-1}df, \quad f \in DG.$$

接続の moduli space は $\mathcal{C} = \mathcal{A}/DG$ と $\mathcal{B} = \mathcal{A}/D_0G$ と二つ考えられる.

$\mathcal{A} \times \mathrm{C}$ への、境界 S^1 に制限すると恒等変換となるゲージ変換群 D_0G の作用を

$$f \cdot (A, z) = (f \cdot A,\ z\Theta(f, A))$$

$$\Theta(f, A) = \exp 2\pi i \left(\frac{1}{8\pi^2} \int_D tr(df f^{-1}A) + C_3(F) \right)$$

で定めると cocycle condition

$$\Theta(g, A)\,\Theta(f,\ g \cdot A) = \Theta(gf, A)$$

が満たされるので、line bundle（準量子化束）

$$\mathcal{L} = \mathcal{A} \times \mathrm{C}/D_0G \longrightarrow \mathcal{A}/D_0G = \mathcal{B} \tag{23}$$

が得られる.

- 1.1 節の $c(f, g)$, $g \in D_0G$, $f \in DG$, は

$$c(f, g) = \Theta(g,\ f^{-1}df), \quad f^{-1}df \in \mathcal{A}$$

と対応しているので S^1 主束 $\widehat{S^1G}$ に随伴した line bundle は $\mathcal{L}$ を pure-gauge の部分空間に制限したものになっている.

$\mathcal{L}(\Sigma)$ 上の接続は式

$$\theta_A(a) = \frac{i}{4\pi} \int_D tr\, A\, a, \quad \forall a \in T_A\mathcal{A}.$$

曲率は

$$\omega_A(a, b) = (\widetilde{d}\theta)_A(a, b) = \frac{i}{2\pi} \int_D Tr\, a\, b, \quad a, b \in T_A\mathcal{A} \tag{24}$$

で与えられる.

また

$$\left(\mathcal{A}\,,\ \omega(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_D Tr\, a\, b \right)$$

は symplectic space である.

2.2

D_0G は symplectic space $(\mathcal{A},\omega)$ に symplectic に作用している：

$$f^*\omega = \omega.$$

また $Lie\, D_0G = \{\xi : D \longrightarrow LieG,\ \xi|S^1 = 0\} = D_0Lie\, G$.
この作用は,

$$\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow (\, D_0Lie\, G\,)^*$$

$$\Phi^\xi(A) = \frac{1}{2\pi}\int_D Tr(F_A\xi)$$

をモーメント写像とするハミルトニアン作用になる：

$$(\widetilde{d}\,\Phi^\xi)_A(a) = \omega_A(a, d_A\xi).$$

$$\Phi^{-1}(0) = \{A \in \mathcal{A};\ F_A = 0\} = \mathcal{A}^\flat;\ \text{ space of flat connections.} \qquad (25)$$

だから、モーメント写像 Φ による symplectic reduction は平坦接続の moduli 空間

$$\mathcal{M}^\flat = \mathcal{A}^\flat / D_0G$$

になる.

3 S^1G の中心拡大は準量子化束に作用する

DG は symplectic space $(\mathcal{A},\omega)$ に symplectic に作用しているから, loop 群 $S^1G = DG/D_0G$ は moduli 空間 $\mathcal{B} = \mathcal{A}/D_0G$ に symplectic に作用する.

（ とくに平坦接続の moduli 空間 $\mathcal{M}^\flat = \mathcal{A}^\flat/D_0G$ に symplectic に作用する. 後に述べる 4 次元多様体（3 次元境界）の上の理論では $\mathcal{B}$ への S^3G の作用は symplectic でなく、$\mathcal{M}^\flat$ への作用が無限少 symplectic になるにすぎない.)

S^1G の $\mathcal{B}$ への作用は line bundle $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}$ に持ち上がらない. 中心拡大 $\widehat{S^1G}$ が line bundle $\mathcal{L}$ に作用する. それを述べよう.

$DG \times \mathrm{C}$ の $\mathcal{A}\times \mathrm{C}$ への作用を

$$(g,z)\cdot(A,c) = \left(g\cdot A,\ \exp\left(\pi i\int_D tr[g^{-1}dg\, A]\right) zc\right) \qquad (26)$$

で定義する. この作用は well defined で $\mathcal{L} = \mathcal{A}\times \mathrm{C}/D_0G$ への商作用に降下 (descend) する. 実際 $(f, \exp 2\pi i C_3(f\vee 1')) \in \phi(D_0G)$ に対して

$$\begin{aligned}(\,f,\, \exp 2\pi i C_3(f\vee 1')\,)\cdot(\,A,c\,) \;&=\; \left(\,f\cdot A,\ c\exp(\,2\pi i\int_D tr[f^{-1}df\, A] + C_3(f\vee 1'))\right)\\ &=\; (\,f\cdot A,\ c\Theta(f,A)\,) \sim (A,c).\end{aligned}$$

こうして $\widehat{S^1G} \longrightarrow S^1G$ の $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}$ への equivariant な作用が定まった. すなわち S^1G の $\mathcal{B}$ への symplectic 作用が中心拡大 $\widehat{S^1G}$ で $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{B}$ への作用に持ち上がる.

4　4次元への拡張：　計算の根拠

1節から3節の筋道に沿って、0-同境な4次元多様体の連結部分多様体 M で、いくつかの S^3 の直和を3次元境界としてもつもの、に対して平行な結果を示す. とくに S^3G の可換拡大が M 上の平坦接続の moduli 空間の上の幾何的量子化束に作用することが示せる.

ここで　1～3節の議論が $S^1 = U(1)$ による拡大としては成り立たず

$$Map(\mathcal{A}_3, U(1)) \tag{27}$$

による可換拡大であるべきだと云うのが1983年の J. Mickelsson の発見（主張）である.

たとえば、曲面上のベクトル束の接続の空間の symplentic 構造は2.1で見たごとく大変簡単だったが境界付き4次元多様体上のベクトル束の接続の空間でどんな symplentic form が良いかは かなり洞察が必要であろう. このようにいくつも新しい観点から考えねばならないが結果として1節から3節で述べたことは次の TABLE により諸量を置き換えて拡張される.

また諸関係が平行に拡張される根拠は Wess-Zumino の descent 方程式と、それを下から支える Terasima descent 方程式にある.　1節から3節もそこに計算の基礎を置いているが、簡単な式であったため直接に扱っていた. TABLE の前に Wess-Zumino-Terashima descent equation を書いておく.

4.1　descent equations 1

Ω^q を P 上の q 次微分形式、

V^q を, Ω^q に値を取る $A \in \mathcal{A}$ とその曲率 F_A の多項式 全体のつくる線形空間 .

ゲージ変換群 $\mathcal{G}$ は V^q に $(g \cdot \Phi)(A) = \Phi(g^{-1} \cdot A)$ により作用.

chain degree p と differential form degree q の double complex

$$C^{p,q} = C^p(\mathcal{G}, V^{q+2}),$$

を考える. coboundary operator $\delta : C^p \longrightarrow C^{p+1}$ を

$$(\delta c^p)(g_1, g_2, \cdots, g_{p+1}) = g_1 \cdot c^p(g_2, \cdots, g_{p+1}) + (-1)^{p+1} c^p(g_1, g_2, \cdots, g_p)$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^k c^p(g_1, \cdots, g_{k-1}, g_k g_{k+1}, g_{k+2}, \cdots, g_{p+1}).$$

で定義すると differential complex になる.

1節から3節の計算の根拠

$c^{0,2} = TrF^2 \in C^{0,2}$, から出発する次の Zumino's descent equation of cochains $c^{p,q} \in C^{p,q}$, $0 \le p, q \le 2$ がある:

$$\begin{aligned} dc^{0,1} = c^{0,2}, \quad \delta c^{1,0} &= c^{2,0}, \\ dc^{1,0} + \delta c^{0,1} &= -c^{1,1}, \\ dc^{2,0} - \delta c^{1,1} &= 0, \end{aligned}$$

$$c^{p,q} = 0, \qquad \text{if}\, p + q \ne 2, 1.$$

この各項は次のようになっている：

$$
\begin{aligned}
c^{0,1}(A) &= Tr\,(AF - \frac{1}{3}A^3), \\
c^{1,0}(A;g) &= Tr(dg\,g^{-1}\,A), \\
c^{1,1}(g) &= \frac{1}{3}Tr(dg\,g^{-1})^3, \\
c^{2,0}(g_1,g_2) &= c^{1,0}(g_1^{-1}dg_1;\,g_2).
\end{aligned}
$$

関係 $dc^{2,0} - \delta c^{1,1} = 0$ を Polyakov-Wiegmann formula という [?], 関係 $\delta c^{2,0} = 0$ は loop group LG の中心拡大の cocycle condition である.

4.2 descent equations 2

4 次元への拡張の計算の根拠

今度は chain degree p と differential form degree q の double complex

$$C^{p,q} = C^p(\mathcal{G}, V^{q+3}),$$

を考える.

$c^{0,3} = TrF^3 \in C^{0,3}$, から出発する次の Zumino's descent equation of cochains $c^{p,q} \in C^{p,q}$, $0 \leq p,q \leq 3$ がある:

$$
\begin{aligned}
dc^{p,3-p} + (-1)^p \delta c^{p-1,3-p+1} &= 0 && (28) \\
dc^{p,2-p} + (-1)^{p-1} \delta c^{p-1,3-p} &= c^{p,3-p} && (29) \\
c^{p,q} = 0, \qquad \mathrm{if}\, p+q &\neq 2,3
\end{aligned}
$$

この各項は次のようになっている：

$$
\begin{aligned}
c^{0,2}(A) &= Tr\,(AF^2 - \frac{1}{2}A^3F + \frac{1}{10}A^5), \\
c^{1,2}(g) &= \frac{1}{10}Tr(dg\cdot g^{-1})^5, \\
c^{1,1}(g;A) &= Tr[-\frac{1}{2}V(AF+FA-A^3) + \frac{1}{4}(VA)^2 + \frac{1}{2}V^3A], \\
& \qquad \text{where } V = dg\,g^{-1}, \\
c^{2,1}(g_1,g_2) &= c^{1,1}(g_2;\,g_1^{-1}dg_1\,), \\
c^{2,0}(g_1,g_2;A) &= -Tr[\frac{1}{2}(dg_2g_2^{-1})(g_1^{-1}dg_1)(g_1^{-1}Ag_1) - \frac{1}{2}(dg_2g_2^{-1})(g_1^{-1}Ag_1)(g_1^{-1}dg_1)].
\end{aligned}
$$

TABLE

以下は
[　曲面の場合の諸量 ($ 1 3) $\Longrightarrow$ その４次元の場合の対応量　]
と読む：

★

$$S^1 = U(1) \Longrightarrow Map(\mathcal{A}_3,\, U(1)\,).$$

$\mathcal{A}_3$ は S^3 上の既約接続の空間

★

$$\widehat{S^1G} = DG \times U(1)/D_0G \Longrightarrow \widehat{S^3G} = DG \times Map(\mathcal{A}_3,\, U(1)\,)/D_0G$$

★ $S^2 \Longrightarrow S^4$,

★ $D = D^2$: 2-disc $\Longrightarrow D = D^4$: 4-disc

★

$$G = SU(N),\ N \geq 2 \Longrightarrow G = SU(N),\ N \geq 3$$

★

$$\text{Use } \pi_2(G) = 1,\ \pi_3(G) = \mathbf{Z} \Longrightarrow \text{ Use } \pi_4(G) = 1,\ \pi_5(G) = \mathbf{Z}$$

★

$$S^2G, \quad \Longrightarrow \quad S^4G$$

★

$$DG = D^2G \quad \Longrightarrow \quad DG = D^4G$$

★

$$D^2G/D_0^2G \simeq S^1G \Longrightarrow D^4G/D_0^4G \simeq \{g \in S^3G;\ \deg g = 0\}$$

Note that $\pi_1(G) = 1$ but $\pi_3(G) = \mathbf{Z}$.

★

$$\begin{aligned} c(f,g) &= \exp \frac{i}{4\pi}\int_D tr(dgg^{-1}\,f^{-1}df) \Longrightarrow \\ c(f,g;A) &= \exp \frac{i}{24\pi^2}\Big(\int_{S^3} tr[dgg^{-1}\,f^{-1}df\,f^{-1}Af - dgg^{-1}\,f^{-1}Af\,f^{-1}df\,] \\ &\quad + \int_D tr\,[(dgg^{-1}(f^{-1}df)^3 + \frac{1}{2}(dgg^{-1}\,f^{-1}df)^2 + (dgg^{-1})^3 f^{-1}df]\,\Big) \end{aligned}$$

★

$$\deg f = \frac{1}{24\pi^2}\int_{S^3} tr(df\,f^{-1})^3 \quad f \in S^3G \Longrightarrow \deg f = \frac{1}{240\pi^3}\int_{S^5} tr(df\,f^{-1})^5 \quad f \in S^5G$$

⋆

$$C_3(g) = \frac{1}{24\pi^2}\int_{B^3} tr(dg\,g^{-1})^3, \ \text{for } g \in S^2G \ \text{extended to } B^3G$$

$$\Longrightarrow C_5(g) = \frac{1}{240\pi^3}\int_{B^5} tr(dg\,g^{-1})^5\,, \ \text{for } g \in S^4G \ \text{extended to } B^5G$$

⋆

$$\Theta(f,A) = \exp\, 2\pi i\left(\frac{1}{8\pi^2}\int_D tr(df\,f^{-1}A) + C_3(F)\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\Theta(g,A) = \exp 2\pi i\left(\frac{i}{24\pi^3}\int_{S^3} tr[-\frac{1}{2}V(AF+FA-A^3)+\frac{1}{4}(VA)^2+\frac{1}{2}V^3A]+C_5(g)\right)$$

ここに $V = dg\,g^{-1}$.

⋆

$$\theta_A(a) = \frac{i}{4\pi}\int_D tr\,A\,a, \quad \Longrightarrow \quad \theta_A(a) = \frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,(AF{+}FA{-}\frac{1}{2}A^3)\,a\,]$$

⋆

$$\omega_A(a,b) = \frac{i}{2\pi}\int_D Tr\,a\,b, \quad \Longrightarrow \quad \omega_A^{(0)}(a,b) = \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr[(ab-ba)F_A]$$

⋆ Moment map

$$\Phi^\xi(A) = \frac{1}{2\pi}\int_D Tr(F_A\xi) \quad \Longrightarrow \Phi^\xi(A) = \frac{1}{4\pi^2}\int_D Tr(F_A^2\,\xi)$$

⋆

$$(g,z)\cdot(A,c) = \left(g\cdot A,\ cz\,\exp\left(\pi i\int_D tr[g^{-1}dg\,A]\right)\right) \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned}(f,\lambda)\bullet(A,c) = \Big(f\cdot A,\ c\lambda(A|S^3)\exp\Big(\frac{i}{24\pi^2}\int_D tr\,[-dgg^{-1}(AF+FA-A^3)\\ +\frac{1}{2}(dgg^{-1}A)^2+(dgg^{-1})^3A]\Big)\Big).\end{aligned}$$

5 4次元多様体上のChern-Simons 準量子化

5.1 境界のない場合

M を cobord な compact 4-manifold すなわち M を境界とする 5-manifold N があるとする. $\partial N^5 = M^4$.

$G = SU(n)$, $n \geq 3$, とする. このとき $\pi_4(G) = 0$, $\pi_5(G) = \mathrm{Z}$.

P を G 主束、$\mathcal{A}(M)$ を P 上の irreducible な接続全体とする.

$\mathcal{A}(M) \times \mathcal{G}(M)$ 上の $U(1)$ 値関数

$$
\begin{aligned}
\Theta(g, A) &= \exp 2\pi i\, \Gamma(g, A) \\
\Gamma(g; A) &= \frac{i}{24\pi^3} \int_N \left(dc^{1,1}(g; A) + c^{1,2}(g) \right), \\
&= \frac{i}{24\pi^3} \int_M c^{1,1}(g; A) + C_5(g) \\
C_5(g) &= \frac{i}{24\pi^3} \int_N c^{1,2}(g) \\
&= \frac{i}{240\pi^3} \int_N Tr(dg \cdot g^{-1})^5
\end{aligned}
$$

を考える. ここで $c^{1,1}$ などは TABLE を参照.

$\pi_4(G) = 0$ なることより $g \in \mathcal{G}(M)$ は N へと延長できる. また $\pi_5(G) = \mathrm{Z}$ より $\Gamma(g, A)$ の第2項 $C_5(g)$ は mod.Z で well defined . したがって Θ は延長に無関係に well defined.

$\delta c^{0,2} = dc^{1,1} + c^{1,2}$. より $\delta(dc^{1,1} + c^{1,2}) = 0$,. これを N 上で積分して

$$\Gamma(fg, A) = \Gamma(g, f \cdot A) + \Gamma(f, A), \qquad \forall f, g \in \mathcal{G}(M)$$

ゆえに cocycle condition :

$$\Theta(g, A)\Theta(f, g \cdot A) = \Theta(gf, A).$$

$\mathcal{G}(M)$ の $\mathcal{A}(M) \times \mathrm{C}$ への作用を

$$g \cdot (A, c) = (g \cdot A, \Theta(g, A)\, c).$$

と定めれば,

モジュライ空間 $\mathcal{B}(M) = \mathcal{A}(M)/\mathcal{G}(M)$ を底空間とし、張り合わせ関数 $\Theta(g, A)$ の hermitian line bundle

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{A}(M) \times \mathrm{C}/\mathcal{G}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M)$$

が得られる.

$\mathcal{L}(M)$ 上の接続：

$$\theta_A(a) = \frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,(AF + FA - \frac{1}{2}A^3)\,a\,],$$

ここに $a \in T_{[A]}\mathcal{B}(M)$, $d_A^* a = 0$.
証明. $V = dgg^{-1}$ と置く.

$$\widetilde{d}\Gamma(g,A) = \widetilde{d}\left(\frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,-\frac{1}{2}V(AF + FA - A^3) + \frac{1}{4}(VA)^2 + \frac{1}{2}V^3A\,]\right)$$

$$= \frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,-\frac{1}{2}V(aF + A\,d_A a + d_A a\,A + Fa$$

$$- aA^2 - AaAaA^2a) + \frac{1}{4}(VaVA + VAVa) + \cdots$$

$$= \frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[-V(aF + Fa)$$

$$+ \frac{1}{2}(A^2V + AVA + VA^2 + V^2A + AV^2 + V^3)a\,],$$

ここで

$$d\,Tr[(VAa - VaA)] = Tr[V(Ad_A a + d_A aA) - V(aF + Fa)$$

$$+ (V^2A + 2AVA + AV^2)a\,].$$

を使った. 他方

$$(\delta\theta_A(a))\,(g) = g\cdot\theta_A(a) - \theta_A(a)$$

$$= -\frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[VFa + FVa - \frac{1}{2}((A+V)^3a - A^3a)],$$

$$(\delta\,\theta_A(a))(g) = \widetilde{d}\Gamma(g,A)(a) = \frac{1}{2\pi i}(\widetilde{d}\log\Theta(g,A))(a).$$

曲率:

$$\begin{aligned}(\widetilde{d}\theta)_A(a,b) &= \langle(\partial_A\theta)a, b\rangle - \langle(\partial_A\theta)b, a\rangle \\ &= \widetilde{d}\left(\frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,(AF + FA - \frac{1}{2}A^3)\,b\,]\right)(a) - (a \leftrightarrow b), \\ &= \frac{-i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,2(ab - ba)F - (ab - ba)A^2 \\ &\qquad - (bd_A a + d_A ab - d_A ba - ad_A b)A\,].\end{aligned}$$

一方

$$
\begin{aligned}
dTr[(ab-ba)A] &= Tr[(b\,d_A a + d_A a\,b - d_A b\,a - a\,d_A b)A] \\
&\quad + Tr[(ab-ba)(F+A^2)],
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$(\widetilde{d}\theta)_A(a,b) = \frac{-i}{8\pi^3}\int_M Tr[(ab-ba)F].$$

$$\omega_A^{(0)}(a,b) = \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr[(ab-ba)F]$$

と置くと

接続 θ_A の曲率は $-i\omega_A^{(0)}$.

とくに、平坦接続の空間 $\mathcal{A}^\flat(M)$ の上に制限した $\mathcal{L}(M)|\mathcal{A}^\flat(M)$ は平坦な line bundle

5.2 境界のある場合

5-manifold N の境界の 4-manifold を $\widehat{M}$ 、

$\widehat{M}$ の部分多様体 M が $\widehat{M}$ の中で 3 次元境界 ∂M を持つ.

M 上の $SU(n)$ 主束 P は $\widehat{M}$ に、$\widehat{M}\setminus M$ では自明束として延長.

$$\mathcal{G}_0(M) = \{g \in \mathcal{G}(M);\ g|\partial M = 1\}$$

ここに 1 は $P|\partial M$ の 恒等写像.

任意の $g \in \mathcal{G}_0(M)$ を $\widehat{M}\setminus M$ に 1 ($1'$ と書く) , として延長して $\widehat{M}$ 上のゲージ変換 $g \vee 1'$ と考える..

$\mathcal{A}(\Sigma)\times\mathcal{G}(\Sigma)$ 上の $U(1)$ 値関数

$$
\begin{aligned}
\Gamma_M(g;A) &= \frac{i}{24\pi^3}\int_M c^{1,1}(g;A) + C_5(g\vee 1'),. \\
\Theta_M(g;A) &= \exp 2\pi i\,\Gamma_M(g;A).
\end{aligned}
$$

ここに $\tilde{g}$ は $g\vee 1'$ を $\widehat{M}$ から N に延長したものである.

$C_5(g\vee 1')$ や Θ は延長に依らず well defined .

$f,\, g \in \mathcal{G}_0(\Sigma)$ に対して cocycle condition :

$$\Theta(g,\,A)\Theta(f,\,g\cdot A) = \Theta(gf,\,A).$$

が成り立つ.

$\mathcal{G}_0(M)$ の $\mathcal{A}(M)\times\mathrm{C}$ への作用を

$$(g,(A,c)) \longrightarrow (g\cdot A\,,\,\Theta_M(g,A)\,c)\,,$$

モジュライ空間 $\mathcal{B}(M)=\mathcal{A}(M)/\mathcal{G}_0(M)$ を底空間とし、張り合わせ関数 Θ の、hermitian line bundle

$$\mathcal{L}(M)=\mathcal{A}(M)\times \mathrm{C}/\mathcal{G}_0(M).$$

が得られる.

この line bundle は式 (12) と同じ式で定義される接続を持つ:

$$\theta_A(a)=\frac{i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,(AF+FA-\frac{1}{2}A^3)\,a\,],$$

曲率は境界の影響が出て次のようになる.

$$\begin{aligned}(\widetilde{d}\theta)_A(a,b) &= \langle(\partial_A\theta)a,b\rangle-\langle(\partial_A\theta)b,a\rangle\\ &= \frac{-i}{24\pi^3}\int_M Tr[\,2(ab-ba)F-(ab-ba)A^2\\ &\qquad -(bd_Aa+d_Aab-d_Aba-ad_Ab)A\,].\end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}dTr[(ab-ba)A] &= Tr[(b\,d_Aa+d_Aa\,b-d_Ab\,a-a\,d_Ab)A]\\ &\quad +Tr[(ab-ba)(F+A^2)],\end{aligned}$$

ゆえに

$$(\widetilde{d}\theta)_A(a,b)=\frac{-i}{8\pi^3}\int_M Tr[(ab-ba)F]-\frac{-i}{24\pi^3}\int_{\partial M} Tr[(ab-ba)A].$$

$$\begin{aligned}\omega_A(a,b) &= \omega_A^0(a,b)+\omega_A'(a,b),\\ \omega_A^0(a,b) &= \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr[\,(a\wedge b-b\wedge a)\wedge F_A\,],\\ \omega_A'(a,b) &= -\frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial M} Tr[\,(a\wedge b-b\wedge a)\wedge A\,],\end{aligned}$$

と置くと　接続 θ_A の曲率は $-i\omega_A$ となる.

前頁の $\mathcal{A}(M)$ 上の 2-form $\omega = \omega_A(a,b)$ は $\mathcal{G}_0(M)$-不変である：

$$g^*\omega = \omega.$$

(境界のある場合 $\mathcal{G}(M)$-不変にならない．)

定理 1 $(\mathcal{A},\omega)$ は *pre-symplectic space,* すなわち, ω は $\mathcal{A}$ 上の *closed 2-form* である．

なぜなら、

$$(\widetilde{d}\omega^0)_A(a,b,c) = \partial_A(\omega^0(a,b))(c) + \partial_A(\omega^0(b,c))(a) + \partial_A(\omega^0(c,a))(b),$$

for $a,b,c \in T_A\mathcal{A}$. 定義より

$$\partial_A(\omega^0(a,b))(c) = \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr[(ab-ba)d_Ac],$$

ゆえ

$$\begin{aligned}(\widetilde{d}\omega^0)_A(a,b,c) &= \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr[\,(ab-ba)d_Ac + (bc-cb)d_Aa \\ &\qquad + (ca-ac)d_Ab].\end{aligned}$$

また

$$d(Tr(ab-ba)c) = Tr\,[(ab-ba)d_Ac + (bc-cb)d_Aa + (ca-ac)d_Ab\,],$$

だから

$$(\widetilde{d}\omega^0)_A(a,b,c) = \frac{1}{8\pi^3}\int_M dTr[\,(ab-ba)c\,] = \frac{1}{8\pi^3}\int_{\partial M} Tr[(ab-ba)c].$$

一方

$$(\widetilde{d}\omega')_A(a,b,c) = 3\partial_A(\omega'(a,b))(c) = -\frac{1}{8\pi^3}\int_{\partial M} Tr[(ab-ba)c].$$

以上より $\widetilde{d}\omega = 0$.

moment map

$\mathcal{G}_0(M)$ **の** $\mathcal{A}(M)$ **への Hamiltonian action**

$\xi \in Lie(\mathcal{G}(M)) = \Omega^0(M, Lie\,G)$ に対して

$$\Phi^\xi(A) == \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr(F_A^2\xi).$$

$$\begin{aligned}(\partial\Phi^\xi)_A a &- \omega_A^0(a, d_A\xi) = \frac{1}{8\pi^3}\int_M Tr[(d_Aa\wedge F_A + F_A\wedge d_Aa)\xi \\ &- (F_Aa + aF_A)d_A\xi] = \frac{1}{8\pi^3}\int_M dTr[(aF_A + F_Aa)\xi] \\ &= \frac{1}{8\pi^3}\int_{\partial M} Tr[(aF_A + F_Aa)\xi] = 0,\end{aligned}$$

ここで ∂M 上で $\xi = 0$ に注意．また ∂M 上では

$$\begin{aligned} dTr[(Aa - aA)\xi] &= Tr[(F_A a + aF_A - Ad_A a - d_A aA + A^2 a + aA^2)\xi] \\ &\qquad + Tr[(Aa - aA)d_A\xi] \\ &= Tr[(ad_A\xi - d_A\xi a)A]. \end{aligned}$$

$$\omega'(a, d_A\xi) = -\frac{1}{24\pi^3}\int_{\partial M} dTr[(Aa - aA)\xi] = 0.$$

ゆえに

$$(\partial\Phi^{\xi})_A a = \omega_A(a, d_A\xi).$$

$\mathcal{G}_0(M)$ の $\mathcal{A}(M)$ への作用は Hamiltonian action で、その moment map は

$$\Phi : \mathcal{A}(\Sigma) \longrightarrow (\, Lie(\mathcal{G}_0(\Sigma))\,)^*$$

5.3 平坦接続への制限＝準幾何的量子化

line bundle with connection

$$\mathcal{L}(M) \longrightarrow \mathcal{B}(M)$$

を moduli space $\mathcal{M}^\flat(M)$ に制限して line bundle with connection

$$\mathcal{L}^\flat(M) = \mathcal{A}^\flat(M) \times \mathrm{C}/\mathcal{G}_0(M) \longrightarrow \mathcal{M}^\flat(M).$$

が得られる．この接続は

$$\theta_A(a) = \frac{i}{48\pi^3}\int_M Tr[A^3\, a\,],$$

となる．ここに $\mathcal{M}^\flat(M)$ への接ベクトルは $d_A^* a = d_A a = 0$ を満たすことを使った．

以上より次の定理を得る．

定理 2

1. $\mathcal{L}^\flat(\widehat{M}) \longrightarrow \mathcal{M}^\flat(\widehat{M})$ は 平坦である．

2. $\widehat{M}$ の真の部分多様体 M に対して，*moduli space* $\left(\mathcal{M}^\flat(M), \omega^\flat\right)$ の準量子化が存在する、すなわち、*hermitian line bundle* $\mathcal{L}^\flat(M) \longrightarrow \mathcal{M}^\flat(M)$ で、*symplectic form* $-i\,\omega^\flat$ を曲率とする $U(1)$-接続をもつものがある．

$\mathcal{L}^\flat(M)$ を M 上の *pre-quantum line bundle* という．

6 $\Omega_0^3 G$ の可換拡大と　その量子化束への作用

6.1 $\Omega_0^3 G$ の可換拡大

$G = SU(n)$, $n \geq 3$ に対して

$$\Omega^3 G = \{f \in Map(S^3, G);\ f(p_0) = 1\}$$

と置く.

$\Omega^3 G$ は degree　により加算個の連結成分にわかれる.

$$\Omega_0^3 G = \{g \in \Omega^3 G;\ \deg\ g = 0\}$$

とする.

J. Mickelsson は $\Omega_0^3 G$ の abelian group $Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$　によるアーベル拡大を作った, ここに $\mathcal{A}(S^3)$ は S^3 上の接続の全体 である.

S^3 を境界とする oriented disc を D.

$$DG = Map(D, G) = \{f;\ D \text{ から } G \text{ への smooth mapping } f(p_0) = 1\}$$

とする.

$f \in DG$ の S^3 への制限は $\deg f = 0$ を満たす; $f|S^3 \in \Omega_0^3 G$、ことに注意しよう.

$D_0 G = \{f \in DG;\ f|S^3 = 1\}$　として、$h \in D_0 G$ の $DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ への作用を, $(f, \lambda) \in DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ に対して

$$h \cdot (f, \lambda) = (fh,\ \lambda(\cdot)\Theta_D(h,\ f^{-1}df)),$$

として定義する.

$$\widehat{\Omega G} = DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))/D_0 G.$$

(f, λ) の同値類を $[f, \lambda]$ と書く. また projection $\pi : \widehat{\Omega G} \longrightarrow \Omega_0^3 G$ は、$\pi([f, \lambda]) = f|S^3$ で定義する.

$\widehat{\Omega G}$ は $\Omega_0^3 G$ を底とし structure group $Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ の主束である.

$\widehat{\Omega G}$ 上の群構造は 次の Mickelsson の 2-cocycle で定義される：

$$\begin{aligned}\gamma_D(f, g; A) &= \frac{i}{24\pi^3}\int_D (\delta c^{1,1})(f, g; A) \\ &= \frac{i}{24\pi^3}\int_{S^3} c^{2,0}(f, g; A) + \frac{i}{24\pi^3}\int_D c^{2,1}(f, g).\end{aligned}$$

すなわち、 $DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ での積を

$$(f, \lambda) \bullet (g, \mu) = (fg,\ \lambda(\cdot)\,\mu_f(\cdot)\exp 2\pi i\,\gamma_D(f, g; \cdot)),$$

で定義する. ここに

$$\mu_f(A) = \mu\left((f|S^3) \cdot A\right).$$

これにより $DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ は群となる．associative law は

$$\delta\, dc^{2,0} = dc^{3,0} = 0, \qquad \delta\, c^{2,1} = 0.$$

よりわかる．

$$\{(h,\, \exp 2\pi i\, C_5(h \vee 1')) \quad h \in D_0G\}$$

は $DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ の normal subgroup となり商 $\widehat{\Omega G} = DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))/D_0G$ も群となる．$Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ は $\widehat{\Omega G}$ の normal subgroup だから $\widehat{\Omega G}$ は $\Omega_0^3 G$ のアーベル群 $Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ による拡大であることがわかった．

7 $\Omega_0^3 G$ の可換拡大は準量子化束に作用する

$P = D \times G$: を D 上の自明 G-束とする．ゲージ変換群 $\mathcal{G}(D)$ の $\mathcal{A}(D)$ への作用は モジュライ空間 $\mathcal{B}(D) = \mathcal{A}(D)/\mathcal{G}_0(D)$ への作用に落ちるが、$\mathcal{G}(D) = DG$, $\mathcal{G}_0(D) = D_0G$, $DG/D_0G \simeq \Omega_0^3 G$ なので $\Omega_0^3 G$ が $\mathcal{B}(D)$ に作用する．

しかし $\Omega_0^3 G$ の $\mathcal{B}(D)$ への作用は line bundle $\mathcal{L}(D)$ への作用に持ち上がらない．そのためには可換拡大 $\widehat{\Omega G}$ の作用 を考える必要がある．(３節と同じ考え方)

$A \in \mathcal{A}(D)$ と $f \in DG$ に対して

$$\beta_D(f, A) = \frac{i}{24\pi^3} \int_D c^{1,1}(f,\, A).$$

と置く．

群 $DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ の $\mathcal{A}(D) \times \mathrm{C}$ への作用を

$$(\, f,\, \lambda\,) \bullet (A, c) = \big(\, f \cdot A\,,\, c\lambda(A|S^3) \exp 2\pi i\, \beta_D(f\,,\, A)\,\big)\,.$$

で定義する．

関係 $\gamma_D = \delta\beta_D$ より，(f, λ), $(g, \mu) \in DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))$ と $(A, c) \in \mathcal{A}(D) \times \mathrm{C}$ に対して

$$(g, \mu) \bullet (\,(f, \lambda) \bullet (A, c)) = ((f, \lambda) \bullet (g, \mu)) \bullet (A, c),$$

が成り立つから この作用は well defined.

$h \in D_0G$ にたいしては

$$(\, h,\, \exp 2\pi i\, C_5(h \vee 1')\,) \bullet (A, c) \;=\; (\, h \cdot A\,,\, c\,\Theta_D(h\,,\, A)\,)\,.$$

が成り立つ、すなわち D_0G は自明に作用している．したがって $\widehat{\Omega G} = DG \times Map(\mathcal{A}(S^3), U(1))/D_0G$ の作用は $\mathcal{L}(D) = \mathcal{A}(D) \times \mathrm{C}/D_0G$ への作用を誘導する．

定理 3 可換拡大 $\widehat{\Omega G}$ は *line bundle* $\mathcal{L}(D)$ に、$\Omega_0^3 G$ の底空間 $\mathcal{B}(D)$ への作用と同変に作用する．

flat connections のモジュライ空間に制限して次の定理を得る：

定理 4 $\widehat{\Omega G}$ は *line bundle* $\mathcal{L}^\flat(D)$ に、底空間 $\mathcal{M}^\flat(D)$ への $\Omega_0^3 G$ の無限小シンプレクティク作用と同変に作用する．

References

[1] Atiyah, M. F. and Bott, R., *Yang-Mills equations over Riemann surfaces* , Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 308(1982), 523-615.

[2] Kori, T.,*Four-dimensional Wess-Zumino-Witten actions*, J. Geometry and Physics 47 (2003), 235-258.

[3] Chern-Simons prequantization over four-manifolds, arXiv:0706;3571 [math.SG]

[4] Mickelsson, J., *Kac-Moody Groups, Topology of the Dirac Determinant Bundle and Fermionization*, Commun. Math. Phys. 110(1987),175-183.

[5] Ramadas, T. R., Singer, I. M. and Weitsman, J., *Some comments on Chern-Simons gauge theory*, Commun. Math. Phys. 126 (1989), 409-420.

[6] Zumino, B., *Chiral anomalies and differential geometry*, Les Houches Proc.ed. B. S. Dewit and R. Stora (1983),1291-1332.