

# Finite gap theory of the Clifford torus

～ - Taimanov の論文から - ～

北里大学・一般教育部 谷口 哲也 (Tetsuya Taniguchi)

College of General Education

Kitasato University

## 1 はじめに

本稿の 1 節から 3 節までは Taimanov の Clifford torus に関する仕事 ([4]) の概説 (サーベイ) である. 4 節に筆者による若干の考察を記した. 氏の結果を紹介するために, 最初にワイエルシュトラスの表現公式と Bloch-Floquet 理論について説明する.

$M = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\gamma_1 \oplus \mathbb{Z}\gamma_2)$  を 2 次元トーラスとし,  $f$  を  $M$  から  $\mathbb{R}^3$  への共形はめ込みとする. このとき  $f$  は次の大域的なワイエルシュトラスの表現公式をもつ.

$$\begin{aligned} f(z) &= (\chi^1(z), \chi^2(z), \chi^3(z)), \quad k = 1, 2, 3, \\ \chi^k(z) &= \chi^k(z_0) + \int_{z_0}^z (\chi_z^k(z) dz + \overline{\chi_z^k(z)} d\bar{z}), \\ \chi_z^1(z) &= \frac{i}{2} (\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad \chi_z^2(z) = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad \chi_z^3(z) = \psi_1 \bar{\psi}_2, \end{aligned}$$

ここで  $z = x + \sqrt{-1}y$  は  $M$  の等温座標で

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

はスピノール束の大域的な切断で, つぎで定義されるポテンシャル  $U$  付きの Dirac 作用素の核となっている:

$$D_U = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}.$$

ちなみに, 曲面の計量を  $g = e^{2\alpha} dz d\bar{z}$ ,  $H$  を平均曲率とすると,  $U = He^\alpha/2$  となる.

$D_U$  と  $U$  をそれぞれ  $\mathbb{C}$  上の周期的な微分作用素と周期的なポテンシャルとみなすと, それから Bloch 多様体  $X$  がつぎのようにして構成される.

$$X = \{(\mu_1, \mu_2, \lambda) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \mid T_1\psi = \mu_1\psi, T_2\psi = \mu_2\psi, D_U\psi = \lambda\psi, \psi \neq 0\}.$$

ただし  $T_1\psi(z) = \psi(z + \gamma_1)$ ,  $T_2\psi(z) = \psi(z + \gamma_2)$ . このとき, スペクトル曲線  $\Gamma$  が Bloch 多様体のエネルギーが 0 になる部分として, 定義される. すなわち

$$\Gamma = \{(\mu_1, \mu_2, \lambda) \in X \mid \lambda = 0\}.$$

スペクトル曲線がある性質をもつときは今までのプロセスを逆にたどることができる. つぎにこれを説明する (詳しくは 2 節で説明する).  $R$  を 2 点  $\infty_+, \infty_-$  が指定された, ある性質をもつリーマン面とする.  $R$  からこの 2 点  $\infty_{\pm}$  を取り除いたものを  $R^*$  とおく. このとき, つぎの性質をもつ Baker-Akhiezer 関数  $\psi(z, \bar{z}, p)$  が構成できる (ここで,  $p$  と  $z$  はそれぞれ  $R$  と  $M$  の普遍被覆  $\widetilde{M} \cong \mathbb{C}$  のパラメータ). それぞれの  $\widetilde{M}$  の点  $z = z_0$  に対して,  $\psi(z_0, \bar{z}_0, p)$  は  $\Gamma^*$  上の有理型関数で 2 点  $\infty_+, \infty_-$  においてある特異性をもつ. このとき  $\Gamma$  に対して,  $\widetilde{M}$  上のつぎの性質をもつポテンシャル  $U$  を構成できる.

1.  $D_U$  に対応するスペクトル曲線  $\Gamma$  の正規化のコンパクト化が  $R$  と一致する.
2.  $D_U\psi = 0$ .

つぎに,  $R$  上のある点  $p_0$  を選び,  $\psi(z, \bar{z}) = \psi(z, \bar{z}, p_0)$  とおく. このとき,  $\psi$  をワイエルシュトラスの表現公式に適用することにより,  $\widetilde{M}$  から  $\mathbb{R}^3$  への共形はめ込み  $f$  を得る.

Taimanov はこの論文で, この逆構成においてつぎの Clifford トーラスが得られるような, スペクトル曲線  $R$  を構成した:

$$\left( \frac{\cos x}{\sqrt{2} - \sin y}, \frac{\sin x}{\sqrt{2} - \sin y}, \frac{\cos y}{\sqrt{2} - \sin y} \right) \quad (0 \leq x, y \leq 2\pi).$$

ちなみに, この場合,  $R$  はリーマン球で, ポテンシャル  $U$  は

$$U = \frac{\sin y}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sin y)}$$

で与えられる.

## 2 Baker-Akhiezer 関数と Dirac 作用素

種数が  $g$  の 2 点  $\infty_+, \infty_-$  付コンパクトリーマン面  $R$  と 2 点  $\infty_+$  と  $\infty_-$  のそれぞれに対して, その点の周りの座標  $k_+^{-1}$  と  $k_-^{-1}$  を考える. ただし, 条件  $k_{\pm}^{-1}(\infty_{\pm}) = 0$  (複合同順) をみたすものとする.

つぎの条件 (1) と (2) を満たす 2 次元平面  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  のパラメータ  $z = x + \sqrt{-1}y$  に依存した  $R$  上の  $\mathbb{C}^2$  に値を取る Baker-Akhiezer 関数と呼ばれる  $\psi(z, \bar{z}, p)$  を考える.

- (1)  $R^*$  上の因子  $E = P_1 + \dots + P_{g+1}$  が存在し,  $\psi(z, \bar{z}, \cdot)$  を複素直線束  $\mathcal{O}(E)$  の切断とみなしたとき,  $R^*$  上で正則になっている. ただし,  $R^*$  は  $R$  から 2 点  $\infty_+$  と  $\infty_-$  を除いたものとする.
- (2)  $\psi$  は 2 点  $\infty_+, \infty_-$  において次の漸近展開 (A) をもつ.

$$\exp(-k_+ z)\psi = \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1^+ \\ \xi_2^+ \end{pmatrix} k_+^{-1} + O(k_+^{-2}) \right] \quad \text{at } \infty_+,$$

$$\exp(-k_- \bar{z})\psi = \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1^- \\ \xi_2^- \end{pmatrix} k_-^{-1} + O(k_-^{-2}) \right] \quad \text{at } \infty_-.$$

ある因子  $P_1 + \dots + P_{g+1}$  に対しては, Baker-Akhiezer 関数の理論 ([Be], [D-K-N]) より,  $\infty_+$  と  $\infty_-$  における漸近展開の定数項が  ${}^t(1, 0)$ ,  ${}^t(0, 1)$  になる関数  $\psi$  は一意的に存在することに注意する.

Baker-Akhiezer 関数  $\psi$  に対して, ポテンシャル  $U$  と  $V$  を, つぎで定義する.

$$U = -\xi_2^+, \quad V = \xi_1^-.$$

また, ここで構成した  $U$  と  $V$  をポテンシャルにもつ Dirac 作用素  $\mathcal{D} = D_{U,V}$  を

$$\mathcal{D} = D_{U,V} = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

で定義する.

つぎに, Dirac 作用素  $D_{U,V}$  と Baker-Akhiezer 関数  $\psi$  の間の関係について考察する.

**定理 2.1**  $U$  と  $V$  をポテンシャルにもつ Dirac 作用素を  $D_{U,V}$  とする. このとき, 先で定義された Baker-Akhiezer 関数  $\psi$  は Dirac 方程式  $D_{U,V}\psi = 0$  を満たす.

**証明**  $D\psi = {}^t(\phi_1, \phi_2)$  とおき,  $\psi$  の漸近展開が (A) で与えられることを用いて,  $\phi_1$  の点  $\infty_+$  における漸近展開を計算すると,

$$\phi_1 = \exp(k_+ z)O(k_+^{-1}) \quad \text{at } \infty_+,$$

同様に  $\phi_1$  の点  $\infty_-$  における漸近展開を計算すると,

$$\phi_1 = \exp(k_- \bar{z})O(k_-^{-1}) \quad \text{at } \infty_-.$$

また,  $\phi_2$  も  $\phi_1$  と同様な漸近展開をもつことがわかる. したがって,  $\phi_1$  と  $\phi_2$  は, 因子  $E = P_1 + P_2 + \dots + P_g$  に対応する  $R$  上の複素直線束  $\mathcal{L} = \mathcal{O}(E)$  と, 変換関数として,

$\infty_+$  において  $\exp(k_+z)$ ,  $\infty_-$  において  $\exp(k_-\bar{z})$  をもつ  $Y$  上の複素直線束  $L$  のテンソル積  $\mathcal{L} \otimes L$  の正則切断になっており, さらに2点  $\infty_+$  と  $\infty_-$  で消えることがわかる. 一方, リーマンロッホの公式より

$$\begin{aligned} & \dim H^0(Y, \mathcal{L} \otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) - \dim H^1(Y, \mathcal{L} \otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) \\ &= \deg(\mathcal{L} \otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) + 1 - g \\ &= \{(g+1) + 0 - 2\} + 1 - g \\ &= 0. \end{aligned}$$

ここで,  $\deg L = 0$  であることと, 一般的な因子  $E$  に対しては  $\dim H^1(Y, \mathcal{L} \otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) = 0$  が従うことを用いると,  $\dim H^0(Y, \mathcal{L} \otimes L(-\infty_+ - \infty_-)) = 0$  となる. よって  $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0$  である. 以上より  $\psi$  は Dirac 方程式  $D_{U,V}\psi = 0$  の解であることが示された.  $\square$

さて,  $R^*$  上の  $n$  個の因子  $D_k = a_{k1}Q_{k1} + \dots + a_{km_k}Q_{km_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) を考える.  $D_k$  の次数を  $d_k$  とし  $d = \sum_{i=1}^n d_k$  とおく.

**定義 2.2**  $R$  上の次の条件 (B) を満たす有理型関数  $\phi$  全体に Serre の意味で対応する曲線を  $R_{D_1, \dots, D_n}$  と表すことにする:

$$\begin{aligned} & \phi(Q_{k1}) = \dots = \phi(Q_{km_k}), \quad \partial^r \phi(Q_{kl}) = 0, \\ & k = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, m_k, \quad r = 1, \dots, (a_{kl} - 1) \quad (\text{条件 B}). \end{aligned}$$

またこれらの有理型関数を  $R_{D_1, \dots, D_n}$  上の有理型関数と呼ぶことにする.

この特異曲線  $R_{D_1, \dots, D_n}$  は大雑把にいえば, それぞれの因子  $D_k = a_{k1}Q_{k1} + \dots + a_{km_k}Q_{km_k}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) に現れる  $R$  上の  $m_k$  個の点  $Q_{k1}, \dots, Q_{km_k}$  を重複度  $a_{k1}, \dots, a_{km_k}$  を考慮しつつ, 張り合わせて1つの特異点  $S_k$  にすることにより得られるものである ([3]).

**定理 2.3** 先の因子  $E = P_1 + \dots + P_{g+1}$  の次数を  $d - n$  個増やし,  $E = P_1 + \dots + P_{g+1} + \dots + P_{g+1+d-n}$  とすれば,  $\psi$  は条件 (1) と (2) のほかに, さらに次の条件 (3) を満たす  $\psi$  が一意的に存在する.

(3)  $\psi = {}^t(\psi_1, \psi_2)$  とおくと,  $\psi_1, \psi_2$  は定義の条件 (B) を満たす.

この関数  $\psi$  を  $R_{D_1, \dots, D_n}$  上の Baker-Akhiezer 関数と呼ぶことにする.

すなわちスペクトルデータと呼ばれる次の組  $(R_{D_1, \dots, D_n}, E = P_1 + \dots + P_{g+1+d-n}, \infty_+, \infty_-, k_+, k_-)$  に対して,  $R_{D_1, \dots, D_n}$  上の Baker-Akhiezer  $\psi$  関数が一意的に定まる.

**定理 2.4** 定理 2.3 で得られた  $R_{D_1, \dots, D_n}$  上の Baker-Akhiezer 関数  $\psi$  に対するポテンシャルを  $U, V$  とすると, 定理 2.1 と同様に  $D_{U, V}\psi = 0$  が成り立つ.

**証明** 定理 2.1 と同様に証明できる. □

**定理 2.5**  $\sigma$  を条件

$$\sigma(\infty_{\pm}) = \infty_{\pm}, \quad \sigma(k_{\pm}) = -k_{\pm} \quad (\text{複合同順})$$

を満たす  $R$  上の正則対合とし, 条件

$$\sigma(D_k) = D_k \quad (k = 1, \dots, f), \quad \sigma(D_k) \neq D_k \quad (k = f+1, \dots, n)$$

を満たすとする. さらに  $R$  上の次を満たす有理型微分  $\omega$  が存在するとする.

(1)  $\omega$  は 2 点  $\infty_{\pm}$  で主要部が次で与えられる極をもつ:

$$\pm k_{\pm}^2 (1 + O(k_{\pm}^{-1})) dk_{\pm}^{-1} \quad (\text{複合同順}).$$

(2)  $\omega$  から定まる因子を  $(\omega)$  とし,  $(\omega)$  の  $R^*$  上への制限を  $(\omega)_*$  とおくと,  $(\omega)_* + 2D_1 + \dots + 2D_f + D_{f+1} + \dots + D_n \geq 0$ . さらに  $(\omega)_*$  の零因子の部分が  $E + \sigma(E)$  となる.

(3) 任意の  $R_{D_1, \dots, D_n}$  上の有理型関数  $\phi$  に対して,  $\sum_{i=1}^{m_k} \text{Res } \phi \omega(Q_{ki}) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$ .

このとき  $U$  と  $V$  は一致する.

**証明**  $\psi_1(P)\psi_2(\sigma(P))\omega(P)$  の留数を計算とすると,  $-2\pi\sqrt{-1}(\xi_2^+ + \xi_1^-) = -2\pi\sqrt{-1}(-U + V)$  となり, これが 0 であることより  $U = V$ . □

**定理 2.6**  $\tau$  を条件

$$\tau(\infty_{\pm}) = \infty_{\mp}, \quad \tau(k_{\pm}) = -\overline{k_{\pm}} \quad (\text{複合同順})$$

を満たす  $R$  上の反正則対合とし, 条件

$$\tau(D'_k) = D'_k \quad (k = 1, \dots, s), \quad \tau(D'_k) \neq D'_k \quad (k = s+1, \dots, n)$$

を満たすとする. ただし  $(D'_1, \dots, D'_n)$  は  $(D_1, \dots, D_n)$  にある置換を施したものとする. さらに  $R$  上の次を満たす有理型微分  $\omega'$  が存在すると仮定する.

(1)  $\omega'$  は 2 点  $\infty_{\pm}$  で主要部が次で与えられる極をもつ:

$$\pm k_{\pm}^2 (1 + O(k_{\pm}^{-1})) dk_{\pm}^{-1} \quad (\text{複合同順}).$$

(2)  $\omega'$  から定まる因子を  $(\omega')$  とし,  $(\omega')$  の  $R^*$  上への制限を  $(\omega')_*$  とおくと,  $(\omega')_* + 2D'_1 + \dots + 2D'_f + D'_{f+1} + \dots + D'_n \geq 0$ .

(3)  $R_{D'_1, \dots, D'_n}$  任意の  $R$  上の有理型関数  $\phi$  に対して,  $\sum_{i=1}^{m_k} \text{Res } \phi \omega'(Q_{ki}) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

このとき  $U = \bar{U}$  かつ  $V = \bar{V}$  である.

**証明**  $\psi_1(P)\overline{\psi_1(\tau(P))}\omega'(P)$  と  $\psi_2(P)\overline{\psi_2(\tau(P))}\omega'(P)$  のそれぞれの留数を計算とすると,  $2\pi\sqrt{-1}(\xi_1^- - \bar{\xi}_1^-) = 2\pi\sqrt{-1}(V - \bar{V})$ ,  $2\pi\sqrt{-1}(\xi_2^+ - \bar{\xi}_2^+) = 2\pi\sqrt{-1}(-U + \bar{U})$  となり, これらが 0 であることより  $U = \bar{U}$ ,  $V = \bar{V}$ .  $\square$

### 3 Baker-Akhiezer 関数と Dirac 作用素

$R$  として リーマン球面  $R = \{\lambda \in \mathbb{C}\} \cup \infty$  をとり, さらに  $\infty_+ = \infty$ ,  $\infty_- = 0$ ,  $k_+ = \lambda$ ,  $k_- = |u|^2/\lambda$ ,  $D_1 = (u) + (-\bar{u})$ ,  $D_2 = (-u) + \bar{u}$ ,  $E = P_1 + P_2 + P_3$  とおく. ただし

$$u = \frac{1+i}{4}, P_1 = \frac{-1+i+\sqrt{-2i-4}}{4\sqrt{2}}, P_2 = \frac{-1+i-\sqrt{-2i-4}}{4\sqrt{2}}, P_3 = 1/\sqrt{8}.$$

Iskander A. Taimnov はスペクトルデータとして  $(R_{D_1, D_2}, E, \infty_+, \infty_-, k_+, k_-)$  を選び. さらに定理 2.3 を用い, このスペクトルデータに対応する  $R_{D_1, D_2}$  上の Baker-Akhiezer 関数  $\psi(z, \bar{z}, p)$  を構成し,  $p$  に  $\bar{u}$  を代入したものを  $\psi(z, \bar{z}, u) = {}^t(\psi_1, \psi_2)$  として, それらを計算し, 次を得た.

$$\psi_1 = \frac{1+i}{4} e^{-(ix/2)} \frac{2e^{iy/2} + \sqrt{2}(1-i)e^{-(iy/2)}}{\sin y - \sqrt{2}},$$

$$\psi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{-(ix/2)} \frac{2e^{iy/2} - \sqrt{2}(1+i)e^{-(iy/2)}}{\sin y - \sqrt{2}}.$$

また  $R$  上の正則対合  $\sigma$  と反正則対合  $\tau$  をそれぞれ  $\sigma(\lambda) = -\lambda$ ,  $\tau(\lambda) = |u|^2/\bar{\lambda}$  で定義し,  $f = 0$ ,  $s = 0$ ,  $n = 2$ ,  $D_1 = D'_1 = (u) + (-\bar{u})$ ,  $D_2 = D'_2 = (-u) + \bar{u}$  として定理 2.5 と定理 2.6 を用いると  $U = V$  で  $U = \bar{U}$ ,  $V = \bar{V}$  となる. すなわち  $U$  と  $V$  は一致し, 実数となる.  $U$  を計算すると

$$U = \frac{\sin y}{2\sqrt{2}(\sin y - \sqrt{2})}$$

となり, 1 節の  $U$  とは符号が違うが,  $\Psi = \psi/\sqrt{2}$  とし, この  $\Psi$  にワイエルシュトラスの表現公式を適用して得られたはめ込みを  $(A, B, C): M = \mathbb{C}/2\pi(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{-1}) \rightarrow \mathbb{R}^3$  とし, さらに,

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & -0 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

とおくと,  $(X, Y, Z)$  はクリフォードトーラスとなることがわかる. この  $(X, Y, Z)$  に対し,  $U$  を計算すると, 1 節で与えられたものと一致する.

## 4 McIntosh のスペクトルデータによるクリフォードトーラスの構成

最後に McIntosh によるスペクトルデータを用いても, クリーフォードトーラスが得られることを説明する. McIntosh によるスペクトルデータは次の三つ組  $(X, \pi, \mathcal{L})$  で与えられる. ここで  $X$  は反正則対号  $\rho$  をもつ代数曲線,  $\pi$  は  $X$  上の有理型関数,  $\mathcal{L}$  は  $X$  上の複素直線束で, ある性質を満たすものである (cf. [1], [2]).

$R$  を 3 節におけるリーマン球面とし,  $X = R$ ,  $\pi(\lambda) = \lambda^4$ ,  $\mathcal{L}$  は次数 3 の複素直線束とすると, 3 次元の複素射影空間への写像が得られるが, このとき,  $\rho(\lambda) = 1/\bar{\lambda}$  の他に  $\rho$  と可換な反正則対合  $\nu(\lambda) = -1/\bar{\lambda}$  を考えることができ, この写像は 3 次元の実射影空間への写像となる. これを 3 次元球面へもちあげ, これを立体射影するとクリフォードトーラスが得られる.

## 参考文献

- [1] I. MCINTOSH, *A construction of all non-isotropic harmonic tori in complex projective space*, Internat. J. Math. 6 (1995), 831-879.
- [2] I. MCINTOSH, *Two remarks on the construction of harmonic tori in  $CP^n$* , Internat. J. Math. 7 (1996), 515-520.
- [3] J-P. SERRE, *Algebraic Groups and Class of Fields*, Graduate Texts in Math. 117, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1988.
- [4] I. A. TAIMANOV, *Finite-Gap Theory of the Clifford torus*, International Mathematics Research Notices, (2005) 103-120.