数理解析研究所講究録
第 1578 巻 2008 年 57-66

$\beta X\setminus\{p\}$ は non-normal ではないのか？
(Is $\beta X\setminus\{p\}$ not non-normal?)

寺澤 順
Jun Terasawa

防衛大学校総合教育学群
The National Defense Academy, Yokosuka

次の事柄の証明ができたので報告する。

Main Theorem. 空間 X が孤立点を持たない *non-compact* な距離空間であれば $\beta X\setminus\{p\}$ は *normal* でない

ここで p は remainder $\beta X\setminus X$ の任意の点である。

1 背景

これは次の古典的な未解決問題に関連している。

Problem. $\beta\omega\setminus\{p\}$ は *normal* であるか

ここに ω は可算 discrete 空間である。
これは非常に難しく，かつ大きな問題であり,

van Mill: "Open Problems in Topology", 1990

にも第 212 問として掲載されている。
1970 年代初めに次が示された。この Problem に関して今日までこれだけが唯一分かっていると述べても過言ではない。

Theorem 1. CH の下で $\beta\omega\setminus\{p\}$ は *normal* でない

証明には P-points が用いられた。
当時はちょうど連続体仮説の無矛盾性・独立性が示されたばかりで，forcing の理論の整備が始まったばかりであった。まして P-points が連続体仮説の下でだけ有効であることなど到底分かっていなかった。筆者はこの頃院生であり，この

Theorem 1によってProblemが完全に解決したかのように理解したことを覚えている。

最近になってShelahが P-pointsが連続体仮説の下でしか存在を保障されないと示してから情勢が激しく変わった。

P-pointsを用いない証明も提示されるようになったが，それでも連続体仮説はどうしても必要となる。また P-pointsの代替として様々の目的のために，weak P-points, OK-points, ..., などが次々に提案されたがそのどれもProblemの解決には貢献しなかった。

Theorem 1の証明後40年にわたってProblemに対する進展が全くない（部分的解決さえない）ことは我々を驚かせる。

理由の一つとして考えられるのは，CHが簡単に外せないことから次のような見方が一般に広がってしまっているのではないのか：

> non-CHのとき何らかの点 p に対して $\beta\omega \setminus \{p\}$ はnormalなのではないか？

であるから，何か有力な点 p にたいして $\beta\omega \setminus \{p\}$ がnon-normalと示せても発表する必要はない（価値がない），と人々は認識していたのではないか。

本稿のタイトルはこの見方にchallengeする意味合いがある：

> CHが外せないのは，ただ単にProblemが極めて難しいからだけなのではないか

2 筆者の提案

一方で，non-pseudocompact空間 X に対しては，ω が X に C-embeddedとなるので，$\beta\omega$ が βX に埋め込まれ，もし $\beta\omega \setminus \{p\}$ がnon-normalなら，$\beta X \setminus \{p\}$ もnon-normalであることが分かることとなる。何らかの点 p に対して，ということであるが。

筆者はこの情勢を受けて，数年前から，焦点を少しずらし次のような問題を考えることとしてみた。

My Question. *ω でなく，孤立点を持たないnon-compactな距離空間 X に対しては $\beta X \setminus \{p\}$ はnormalとなるのかどうか*

そして2003年に次の結果を得た。

Theorem 2. *次の場合 $\beta X \setminus \{p\}$ はnormalでない。*

- *X がstrongly 0-dimensionalであるか，または*
- *点 p がremote pointである場合*

本稿では，議論を更に進め，この2条件を外し上のMy Questionを全面的に解決し，冒頭に掲げたMain Theoremを示す。

3 必要な概念

3.1 Maximal Disjoint Family

証明に必要な概念は，maximal disjoint family of nonempty open sets である。

ここに "maximal" とはすべての disjoint families の中で集合の包含関係に関して極大なもののことをいう。

そして，孤立点を持たない距離空間 X が，locally finite (in X), maximal disjoint family of nonempty open sets からなる π-base をもつことに注目する。

すなわち，次のような性質の π-base $\mathscr{B} = \bigcup \mathscr{B}_n$ である：

- 各 $\mathscr{B}_n$ は locally finite (in X), maximal disjoint family of nonempty open sets である
- $\mathscr{B}_{n+1}$ は $\mathscr{B}_n$ を細分する ($i.e., \forall B \subset \exists B'$)
- $\forall B \in \mathscr{B}_n, \exists B^{(i)} \in \mathscr{B}_{n+1}$, $i = 0, 1, 2$:
  $\mathrm{Cl}_X\, B^{(i)} \subset B$ and $\mathrm{Cl}_X\, B^{(i)} \cap \mathrm{Cl}_X\, B^{(j)} = \emptyset$ for $i \neq j$
- X の任意の open cover は，locally finite (in X), maximal disjoint subfamily of $\mathscr{B}$ で細分される。

これらの条件が満たされれば $B, C \in \mathscr{B}$ に対して次が成り立つことに注意する：

- either $B \cap C = \emptyset$, $B \subset C$ or $B \supset C$
- $C \subsetneq B \implies$ either $\exists i : C \subset B^{(i)}$ or $\forall i : C \cap B^{(i)} = \emptyset$

3.2 Arhangel'skii's regular base

$\mathscr{B}$ の構成には二つの事柄が必要となる。

一つは Arhangel'skii の regular base である。

regular base とは

> 任意の点 $x \in X$ とその近傍 U に対して x の近傍 $V \subset U$ が取れ V,
> $X \setminus U$ の双方に交わる basic open sets が有限個しかない

という性質の base である。

Arhangel'skii によれば，空間が距離空間であるためには regular base を持つことが必要十分である。本稿では十分条件は不要。

regular base の一つの例は，$1/(n+1)$-open nbds からなる cover の locally finite refinement を $\mathscr{G}_n$ とするときの $\mathscr{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{G}_n$ である。

本稿では，regular base $\mathscr{G}$ の次の性質に注目する（Engelking, Lemma 5.4.3 の証明, pp.331–332, を modify する）。

> X の cover $\subset \mathscr{G}$ は locally finite subcover をもつ。

3.3 もうひとつの Lemma

regular base から我々の π-base $\mathscr{B}$ を構成するためには次が必要である：

Lemma.

$\forall\mathscr{U}$ *locally finite (in* X*) family of nonempty open sets,*
$\exists\mathscr{V}$ *locally finite (in* X*) family of nonempty open sets:*

- $U \in \mathscr{U}$, $V \in \mathscr{V}$ $\Longrightarrow$ *either* $U \supset V$ *or* $U \cap V = \emptyset$
- $\forall U \in \mathscr{U}$: $\mathscr{V} \upharpoonright U$ *is a maximal disjoint family of nonempty open sets in* U

これの証明のためには，$\mathscr{V}$ として，各有限集合 $\varphi \subset \mathscr{U}$ に対して

$$K_\varphi = \left(\bigcap \varphi\right) \setminus \mathrm{Cl}_X \left(\bigcup (\mathscr{U} \setminus \varphi)\right)$$

と定められる集合のうち，空でないものすべてを集める。

この $\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ に対応して一意に定まるわけではないが，各 $\mathscr{U}$ に対して任意に一つずつ選ぶこととして，以下では

$$\mathscr{V} = \kappa(\mathscr{U})$$

と表すこととする。

3.4 $\mathscr{B}$ の構成

まず，任意に X の regular base $\mathscr{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathscr{G}_n$ を 3.2 のように定め，$\mathscr{B}_1 = \kappa(\mathscr{G}_0)$ とする。

X が孤立点を含まないので，各 $B \in \mathscr{B}_1$ に対して 3 つの nonempty open sets $\gamma^{(0)}(B), \gamma^{(1)}(B), \gamma^{(2)}(B)$ を

$$(*) \qquad \begin{array}{l} B \supset \mathrm{Cl}_X[\gamma^{(i)}(B)] \ \text{ for each } \ i < 3 \\ \mathrm{Cl}_X[\gamma^{(i)}(B)] \cap \mathrm{Cl}_X[\gamma^{(i)}(B)] = \emptyset \ \text{ for } \ i \neq j \end{array}$$

となるように取ることができる。すべての $\gamma^{(i)}(B)$ の全体を $\mathscr{C}_1$ と表すと，$\mathscr{C}_1$ は locally finite in X である。

$\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{G}_1$ が locally finite であるから，$\mathscr{B}_2 = \kappa(\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{G}_1)$ とおく。各 $B \in \mathscr{B}_1$ に対して $B^{(i)} \in \mathscr{B}_2 \upharpoonright \gamma^{(i)}(B)$ を任意に定める。

次に，上と全く同様に，条件 $(*)$ を満たすように各 $B \in \mathscr{B}_2$ に対して 3 つの nonempty open sets $\gamma^{(0)}(B), \gamma^{(1)}(B), \gamma^{(2)}(B)$ を定め，$\gamma^{(i)}(B)$ の全体を $\mathscr{C}_2$ として，$\mathscr{B}_3 = \kappa(\mathscr{B}_2 \cup \mathscr{C}_2 \cup \mathscr{G}_2)$ とする。

以下同様に論ずれば，結局集合族 $\mathscr{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{B}_n$ が取れ，これは X の π-base となる。

X の任意の open cover が locally finite, maximal disjoint subfamily of $\mathscr{B}$ で細分されることを見るためには，まず，各点 $x \in X$ に対して $x \in G(x) \in \mathscr{G}$ とする。3.2 に見た regular base の基本性質から，$\{G(x) : x \in X\}$ は locally finite subcover π をもつ。各 $G \in \pi$ に対して，operation κ の性質から，$\sigma(G) \subset \mathscr{B}$ が取れ，$\sigma(G)$ は locally finite in X でかつ，maximal disjoint in G である。$\bigcup\{\sigma(G) : G\}$ の極大元を集めてくれば，これが $\{G(x) : x \in X\}$ の求める細分になる。$B, C \in \mathscr{B}$ に対して

$$\text{either } B \cap C = \emptyset,\ B \subset C \text{ or } B \supset C$$

となっているからである。 □

4 証明

4.1 第1部

定理の証明に入る。

Ξ を locally finite and maximal disjoint subfamily of $\mathscr{B}$ の全体とし，任意の仕方で予め well-order しておくものとする。

そして帰納的に $\xi_\lambda \in \Xi$ と，その上の ultrafilter φ_λ を順序数 $\lambda < \theta$ に対して定めてゆく。(θ は後で定める)

ξ_λ は集合 X の部分集合の族であり hyper set である。

φ_λ は，ξ_λ の部分集合の族であり，結局 X の hyper hyper set となる。

簡単に述べると ξ_λ は，X の disjoint open sets への分解であり，λ が大きくなれば，一定の基準で細かくなる。しかも議論に必要なこの種の分解をすべて網羅している。また φ_λ は ξ_λ の subfamilies からなる ultrafilter で，これも大雑把な言い方をすれば，λ が大きくなれば細かくなる。

この波線部を数式で表現するのは極めて複雑である。

すなわち，次の 4 つの条件である：

(a) $\forall \mathscr{U} \in \varphi_\lambda$: $p \in \mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{U}\right]$,

(b) $\lambda < \mu \implies \exists \mathscr{U} \in \varphi_\lambda$: $\begin{cases} U \cap V \neq \emptyset,\ U \in \mathscr{U},\ V \in \xi_\mu \\ \implies V \subset U, \end{cases}$

(c) $\forall \lambda < \mu, \forall \mathscr{U} \in \varphi_\lambda : \{V \in \xi_\mu : V \subset \exists U \in \mathscr{U}\} \in \varphi_\mu$,

(d) $\xi \in \Xi \setminus \{\xi_\lambda : \lambda < \theta\} \implies \exists \lambda < \theta$: どの $\mathscr{U} \in \varphi_\lambda$ も (b) を ξ に対して満たさない。

ここで (b), (c) が，それぞれ ξ_λ，φ_λ が λ の増加と共に細かくなることを意味し，(d) が ξ_λ が Ξ に属する分解を条件 (b) について「網羅」することを意味する。

4.2 第２部：説明

詳しく説明すると，(a) は，点 p の任意の近傍 O に対して

$$\xi_\lambda(O) = \{U \in \xi_\lambda : U \cap O \neq \emptyset\}$$

と定めれば，$\varphi_\lambda \ni \xi_\lambda(O)$ を意味する。

(b) は，φ_λ に属するどれかの $\mathscr{U}$ について，すべての $U \in \mathscr{U}$ が，その主要部分について ξ_μ の集合に細かに分割されることを意味する。ξ_μ が maximal disjoint family だからである。すなわち，nowhere dense set $A \subset U$ が取れ，$U \setminus A$ が ξ_μ の集合の和で表されるのである。

本稿では，これを整数論の用語に習い，modulo nowhere dense set という条件下で成り立つ，と考える。すなわち：

(each member of) $\mathscr{U}$ is partitioned by ξ_μ *modulo nowhere dense set*

この場合，明らかに各 $\mathscr{S} \in \varphi_\lambda$ に対して $\mathscr{S} \cap \mathscr{U} \in \varphi_\lambda$ は partitioned by ξ_μ modulo nowhere dense set である。つまり，φ_λ は filter base φ_λ^μ をもち，φ_λ^μ の要素がすべて partitioned by ξ_μ modulo nowhere dense set となる。

4.3 第３部：帰納法

帰納法の方法は，ξ_μ を条件 (b) を満たすようにまず定め，その上で (a), (c) を満たすように φ_μ を定めるのである。ξ_μ，φ_μ を同時に定めるのではない。

$\lambda < \mu$ に対して $\xi_\lambda, \varphi_\lambda$ が定義されたとする。

どの $\xi \in \Xi \setminus \{\xi_\lambda : \lambda < \mu\}$ に対しても (b) が成立しないとき，すなわち

$$\forall \xi \in \Xi \setminus \{\xi_\lambda : \lambda < \mu\},\ \exists \lambda < \mu,\ \forall \mathscr{U} \in \varphi_\lambda : \exists U \in \mathscr{U} \text{ is not partitioned by } \xi$$

のときは，この段階で「網羅」されているので，$\theta = \mu$ とおいて帰納法を終結させる。

そうでないときは，

$$\forall \lambda < \mu,\ \exists \mathscr{U} \in \varphi_\lambda : \forall U \in \mathscr{U} \text{ is partitioned by } \xi$$

となる $\xi \in \Xi$ の最初の要素を ξ_μ とする。

そして，ultrafilter φ_μ on ξ_μ を (a), (c) を満たすように定める。

それには条件 (c) を参照して，$\mathscr{U} \in \varphi_\lambda$ に対応して

$$\xi_\mu(\mathscr{U}) = \{V \in \xi_\mu : V \subset \exists U \in \mathscr{U}\}$$

と表すこととして

- $\forall O$ nbd of $p, \forall\lambda, \forall\mathscr{U} \in \varphi_\lambda : \xi_\mu(\mathscr{U}) \cap \xi_\mu(O) \neq \emptyset$
- $\xi_\mu(\mathscr{U})$ の全体が finite intersection property を持つ

を check する。その上で，すべての $\xi_\mu(\mathscr{U})$ を含む ultrafilter on ξ_μ として φ_μ を定義することとなる。(この check は大変であるが，お膳立ては済んでいる)

4.4 第4部

本論に入る。
まず各 $\lambda < \theta$ に対して

$$H_\lambda = \bigcap \left\{ \mathrm{Cl}_{\beta X} \left[\bigcup \mathscr{U} \right] : \mathscr{U} \in \varphi_\lambda \right\}$$

とおく。
条件 (a) から，$p \in H_\lambda$ である。また (c) から $\{H_\lambda\}_\lambda$ は単調減少列である。
そして「網羅」の性質から次が示される：

$$\forall O \text{ nbd of } p,\ \exists\lambda < \theta : H_\lambda \subset O$$

4.5 第5部

我々の議論に最も critical な事柄は：

任意の $\lambda < \theta$ と $i = 0, 1, 2$ に対して，点 $r_{\lambda,i} \in H_\lambda$ が取れ $\mu > \lambda$ のとき次を満たす：

$$r_{\lambda,i} \in \mathrm{Cl}_{\beta X} \left[\bigcup \{U^{(i)} : U \in \xi_\mu\} \right]$$

である。いま

$$\mathscr{L}_{\mu,i} = \{U^{(i)} : U \in \xi_\mu\}$$

とおくと，これは次のように表される：

$$r_{\lambda,i} \in H_\lambda \cap \bigcap_{\lambda<\mu} \mathrm{Cl}_{\beta X} \left[\bigcup \mathscr{L}_{\mu,i} \right]$$

これの証明には combinatorial な議論が必要となる。
H_λ は単調減少列 $\bigcup \mathscr{U}$ の交わりであるが $\bigcup \mathscr{L}_{\mu,i}$ は μ に応じて単調減少しない。

4.6 第6部

第5部の事柄の証明は unconventional であるので，以下に与えておく。

H_λ の定義を参照すれば，次の集合族が finite intersection property をもつことを示せばよい：

$$\bigcup \mathscr{U},\ \mathscr{U} \in \varphi_\lambda,\ \text{and}\ \bigcup \mathscr{L}_{\mu,i},\ \mu > \lambda$$

すなわち，$\mathscr{U} \in \varphi_\lambda$ および $\mu_0, \dots, \mu_{n-1} > \lambda$ に対して

$$\left(\bigcup \mathscr{U}\right) \cap \bigcap_{j<n} \left(\bigcup \mathscr{L}_{\mu_j,i}\right) \neq \emptyset.$$

を示す。ここで，$\mu_0 \geq \cdots \geq \mu_{n-1} > \lambda$ のような順序関係を考えても以下の証明は全く楽にならないことを指摘しておく。

第2部で指摘したように，$\mathscr{U}$ は各 $j < n$ に対して $\mathscr{U}_j \in \varphi_\lambda^{\mu_j}$ を含み，$\mathscr{U}_j$ は partitioned by ξ_{μ_j} modulo nowhere dense set である。

まず任意に $U_0 \in \bigcap_{j<n} \mathscr{U}_j$ を取ろう。

もし $U_0 \in \xi_{\mu_j}$ for all $j < n$ ならこれで終わりである。なぜなら

$$U_0^{(i)} \subset \left(\bigcup \mathscr{U}\right) \cap \bigcap_{j<n} \left(\bigcup \mathscr{L}_{\mu_j,i}\right)$$

だから。

そうでないとき，$J_1 = \{j : U_0 \notin \xi_{\mu_j}\}$ を考える。各 $j \in J_1$ に対して $U_0 \in \mathscr{U}_j$ であり，$U_0^{(i)} \subset U_0$ であるので，或る $S \in \xi_{\mu_j}$ に対して $U_0^{(i)} \cap S \neq \emptyset$ かつ $S \subset U_0$ である。3.1 の $\mathscr{B}$ の条件から，j runs over J_1 のとき，このような S のうち，集合の包含関係に関して極大のもの U_1 を取り出すことができる。すると $U_1 \subset U_0^{(i)}$ である。$U_1 \in \mathscr{B}$ である。

もしも $U_1 \in \xi_{\mu_j}$ for all $j \in J_1$ ならこれで終わりである。なぜなら

$$U_1^{(i)} \subset \left(\bigcup \mathscr{U}\right) \cap \bigcap_{j<n} \left(\bigcup \mathscr{L}_{\mu_j,i}\right)$$

となるから。

そうでないとき，$J_2 = \{j \in J_1 : U_1 \notin \xi_{\mu_j}\}$ を考える。$U_1^{(i)} \subset U_1 \subset U_0^{(i)} \subset U_0$ であるので，上と同様に各 $j \in J_2$ に対して或る $S \in \xi_{\mu_j}$ が見つかり $U_1^{(i)} \cap S \neq \emptyset$ かつ $S \subset U_0$ である。上の U_1 の極大性から $S \subset U_1$ が出る（$U_1 \in \mathscr{U}_j$ とは限らないので，ここで初めから $S \subset U_1$ とすることはできない）。したがって，j runs over J_2 のとき，このような S のうち極大のもの U_2 を取り出すと $U_2 \subset U_1^{(i)}$ である。

次に U_2 を考え同様に推論する。j が有限個しかないので，この操作は必ず終結する。 □

4.7 第７部

第５部の事柄が示せれば，すでに示したことと合わせて

$$\forall O \text{ nbd of } p,\ \exists\lambda,\ \forall\mu > \lambda : r_{\mu,i} \in H_\mu \subset H_\lambda \subset O$$

となる。すなわち，$\{r_{\lambda,i}\}_\lambda$ は点 p に収束する単純な点列となる。

そこで，

$$K_i = \{r_{\lambda,i} : \lambda < \theta\}$$

とおくと，$p \in \mathrm{Cl}_{\beta X} K_i$ であり，任意の $\lambda < \theta$ を固定すると

$$K_i = \{r_{\mu,i} : \mu \geq \lambda\} \cup \{r_{\mu,i} : \mu < \lambda\} \subset H_\lambda \cup \mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{L}_{\lambda,i}\right]$$

である。

ここで ξ_λ が locally finite であったから $\mathscr{B}$ の構成から（3.1 参照）

$$\mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{L}_{\lambda,i}\right] \cap \mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{L}_{\lambda,j}\right] = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

なので，結局 $i \neq j$ に対して次を得る：

$$p \in \mathrm{Cl}_{\beta X} K_i \cap \mathrm{Cl}_{\beta X} K_j \subset \bigcap_\lambda H_\lambda = \{p\}$$

4.8 第８部

すると，

$$(\mathrm{Cl}_{\beta X} K_i) \setminus \{p\} = \mathrm{Cl}_{\beta X\setminus\{p\}}[K_i \setminus \{p\}], \quad i = 0, 1, 2$$

が $\beta X \setminus \{p\}$ の disjoint closed sets を形成することとなる。

$i = 0, 1, 2$ に対して

$$p \in \mathrm{Cl}_{\beta X}\,[K_i \setminus \{p\}] = \mathrm{Cl}_{\beta X}\,[(\mathrm{Cl}_{\beta X} K_i) \setminus \{p\}]$$

となっていれば，$\beta X \setminus \{p\} \supset X$ が βX で C^*-embedded であることを用いて，$\beta X \setminus \{p\}$ の non-normality が導かれる。２つの disjoint closed sets が連続写像で分離されない，とする Urysohn's Lemma を適用する。

本稿で閉集合を３つ作るわけは，実はこの最後の条件にある。

実は構成から，十分大きい λ に対して

$$r_{\lambda,i} = p$$

となってしまう可能性があり，

$$p \notin \mathrm{Cl}_{\beta X}[K_i \setminus \{p\}]$$

となるかも知れないのである。

しかし，幸いなことに（第5部参照）

$$r_{\lambda,i} \in \mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{L}_{\lambda+1,i}\right]$$

であり，かつ

$$\mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{L}_{\lambda+1,i}\right] \cap \mathrm{Cl}_{\beta X}\left[\bigcup \mathscr{L}_{\lambda+1,j}\right] = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

であるので，どの λ に対しても

$$r_{\lambda,i} \neq r_{\lambda,j} \text{ for every } i \neq j$$

となり，

$$r_{\lambda,i} = p \text{ for sufficiently large } \lambda$$

となる i は高々一つしかない。

だから，3つの i に対して作業をしておけば安心である。

5 Remarks

5.1

上記の議論は，距離空間でなくても，3.1 に述べた π-base $\mathscr{B}$ をもつ non-compact, normal space に対して通用する。

したがって例えば，non-compact, normal space X が，孤立点を持たない距離空間を dense に含むなら（例：Double arrow space $\mathbb{Q} \times \{0\} \cup \mathbb{P} \times \{1\}$），任意の点 $p \in \beta X \setminus X$ に対して $\beta X \setminus \{p\}$ は non-normal である。

5.2

最初に述べたように，次の問題が残る：

すべての点 $p \in \beta\omega \setminus \omega$ に対して $\beta\omega \setminus \{p\}$ は non-normal なのか？

discrete 空間の場合が難しいわけである。