

2つの停止時刻をもつ条件付請求権の評価 ～その展望と拡張～

澤木 勝茂

南山大学 数理情報学部

Katsushige SAWAKI

Faculty of Mathematical Sciences and Information Engineering

Nanzan University

要旨:企業が契約解消権をもち、投資家もまた権利行使を有する条件付請求権の評価は、2つの停止時刻をもつ確率制御問題として定式化できる。これを Dynkin [9] による Dynkin ゲームとして Kifer [20] は、ゲーム・オプションの評価に適用した。本論文では、アメリカ・オプションや種々のデリバティブを組み込んだ金融商品の評価をより一般的な枠組の下で定式化、最適な停止境界とその評価関数の定性的性質を分析する。さらに、今後の課題と拡張の方向性についても考察する。

1 はじめに

金融派生商品の評価理論は、古典的なヨーロッパ・オプションの Black and Scholes [3] の評価式を嚆矢として、投資家（買い手）の権利行使時点での利得関数や様々な制約条項に応じて発展してきた。また、発行人（売り手、企業）にも償還条項と呼ばれる契約解消権を付与したオプション等の金融商品も数多く発行されている。イスラエリ・ゲームオプションはそのような条件付請求権の1つであり、償還条項のある転換社債やワラント債はその具体的な金融証券である。そこでの最適政策は、投資家にとっては権利行使境界によって、発行人にとっては契約解消境界によって特徴付けられる。確率制御としては2つの自由境界値をもつ問題であり、2つの停止境界をもつ2人最適停止問題でもある。

本論文では、投資家および発行人の両者が権利行使の権限を有する条件付請求権の評価をより一般的な利得関数の下で2つの停止境界をもつ Dynkin ゲームとして定式化し、その条件付請求権の評価式が Dynkin ゲームの鞍点解であることを示す。さらに、投資家と発行人の最適な停止領域を導出し、それが閉包等の定性的性質をもつための条件を考察する。さらに、発行人および投資家に加えて既存株主等のステークホルダー（第3のプレイヤー）が存在する場合にも拡張したとき、この種の条件付請求権の評価はどのように修正されるべきかについても議論する。

論文の骨格は次のとおりである。次の第2節では、2つの停止領域をもつ条件付請求権の評価モデルを Dynkin [9] または Kifer [20] の精神に従って定式化する。第3節では、この条件付請求権の例題について考察する。第4節では、利得関数を特定化したときの評価式および最適定式境界の解析的性質を分析する。第5節では、発行人および投資家に加えて、第3のプレイヤー（既存の株主）の存在を考慮した評価モデルを提案し、今後の研究課題とその方向性について議論する。第6節では、論文全体のまとめと今後の研究方向について言及する。

2 確率ゲームによる評価モデルの定式化

取引期間は有界な閉区間 $[0, T]$ とし, T を満期と呼ぶ. 永久有価証券を考察する場合は, $T \rightarrow \infty$ として $[0, \infty)$ とする. 危険資産と無危険資産から成る資産市場を想定し, そこでは, 資産価格に関する情報を瞬時に織込んで価格が形成されるスポット市場の存在を仮定する. 無危険資産の時刻 t での価格を $B(t)$ とし, $B(t)$ は

$$dB(t) = r(t)B(t)dt, \quad B(0) > 0, \quad r(t) \geq 0, \quad (2.1)$$

を満たす. ここで $r(t)$ は時刻 t での無危険利子率で, 確定的で既知である. 危険資産の価格 $X(t)$ は, リスク中立測度 \tilde{P} の下で確率微分方程式

$$dX(t) = (r(t) - \delta(t))X(t)dt + \kappa(t)X(t)d\tilde{W}_t \quad (2.2)$$

に従って挙動する. ただし, $\kappa(t)$ は時刻 t でのボラタリティー, $\delta(t)$ は 配当でありそれぞれ確定的で既知である. $r(t)$, $\delta(t)$ および $\kappa(t)$ はウィナー過程 \tilde{W}_t から独立である. ここで, 確率過程 $\{\tilde{W}_t : 0 \leq t \leq T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$ 上で定義された標準ウィナー過程である. 区間 $[t, T]$ で停止時刻の集合を $\mathcal{F}_{t,T}$ とする. 発行人 (企業) をプレーヤー I と呼び, 契約の解消権 (償還権) を有し, 投資家 (買い手) をプレーヤー II と呼び, 条件付請求権に付与された権利を行使することができる. プレーヤー I の停止時刻を σ , プレーヤー II の停止時刻を τ とする. 2人のプレーヤーがそれぞれ時刻 σ と τ で権利を行使したときの利得関数を

$$\begin{aligned} R_t(\sigma, \tau) &= \int_t^{\sigma \wedge \tau} c(s)ds + f(\sigma, X(\sigma))1_{\{\sigma < \tau\}} \\ &+ g(\tau, X(\tau))1_{\{\tau \leq \sigma\}} + h(X(T))1_{\{\sigma \wedge \tau = T\}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

とする.

注 2.1 利得関数が停止時刻ばかりでなく現時刻 t にも依存していることに注意しよう. この点が Kifer [20] や通常のオプションと異なる点である. 第一項は配当, クーポンまたはインストールオプションの支払額に相当する.

仮定 2.1

- 1) 利得はすべてプレーヤー I からプレーヤー II への支払額と, 各 t に対して $f(t, x)$, $g(t, x)$, $h(x)$ は x の単調関数とする.
- 2) 利得関数には次の関数が成立する. 各 t に対して

$$f(t, x) > g(t, x) \geq h(x) \quad \text{for all } x \quad (2.4)$$

注 2.2 もし, この条件付請求権がアメリカン・ゲームコールオプションならば

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= (X(t) - K)^+ + \delta \\ g(t, X(t)) &= (X(t) - K)^+, \quad 0 \leq t \leq T, \\ c(t) &\equiv 0, \quad h(x) \equiv 0 \end{aligned}$$

と見做せばよい.

プレーヤー I は (2.3) 式の利得関数を最小にするように σ を選び, プレーヤー II は最大化すべく停止時刻 τ を選ぶ. プレーヤー I, II のいずれかが停止したとき, または満期 T でこのゲームは終了する.

定理 2.1 時刻 t において $X(t) = x$ のとき, それぞれ

$$\bar{V}(t, x) = \operatorname{ess\,inf}_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-\int_t^{\sigma \wedge \tau} r(s) ds} R_t(\sigma, \tau) | X(t) = x] \quad (2.5)$$

$$\underline{V}(t, x) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \operatorname{ess\,inf}_{\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}} \tilde{E}[e^{-\int_t^{\sigma \wedge \tau} r(s) ds} R_t(\sigma, \tau) | X(t) = x] \quad (2.6)$$

を定義する. ここで, \tilde{E} はリスク中立測度に関する期待値である. このゲームは値 $V(t, x)$ をもち,

$$V(t, x) = \bar{V}(t, x) = \underline{V}(t, x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.7)$$

によって与えられ, $V(t, x)$ は次式で与えられる鞍点 $(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t)$ で達成される.

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_t &= \inf\{s \in [t, T] | V(s, X(s)) = f(s, X(s))\} \wedge T, \\ \hat{\tau}_t &= \inf\{s \in [t, T] | V(s, X(s)) = g(s, X(s))\} \wedge T. \end{aligned} \quad (2.8)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} E[e^{-\int_t^{\hat{\sigma}_t \wedge \tau} r(s) ds} R_t(\hat{\sigma}_t, \tau) | X(t) = x] &\leq E[e^{-\int_t^{\hat{\sigma}_t \wedge \hat{\tau}_t} r(s) ds} R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) | X(t) = x] \\ &= V(t, x) \\ &\leq [e^{-\int_t^{\sigma \wedge \hat{\tau}_t} r(s) ds} R_t(\sigma, \hat{\tau}_t) | X(t) = x] \end{aligned} \quad (2.9)$$

(証明) プレーヤー I は σ に関する minimizer であり, プレーヤー II は τ に関する maximizer であるので, (2.9) 式を証明すれば十分である.

1) まず初めに, σ を任意の停止時刻とし, $\tau = \hat{\tau}_t$ と仮定する. もし $\hat{\tau}_t < \sigma$ ならば,

$$\begin{aligned} R_t(\sigma, \hat{\tau}_t) &= \int_t^{\hat{\tau}_t} c(s) ds + g(\hat{\tau}_t, X(\hat{\tau}_t)) \\ &= \int_t^{\hat{\tau}_t} c(s) ds + V(\hat{\tau}_t, X(\hat{\tau}_t)) \\ &\geq \int_t^{\hat{\tau}_t} c(s) ds + V(\sigma, X(\sigma)) \\ &\geq \int_t^{\hat{\tau}_t} c(s) ds + V(\hat{\sigma}_t, X(\hat{\sigma}_t)) = R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) \end{aligned}$$

もし, $\sigma < \hat{\tau}_t$ ならば,

$$\begin{aligned} R_t(\sigma, \hat{\tau}_t) &= \int_t^{\sigma} c(s) ds + h(X(T))1_{\{\sigma=T\}} + f(\sigma, X(\sigma)) \\ &\geq \int_t^{\hat{\tau}_t} c(s) ds + h(X(T))1_{\{\sigma=T\}} + f(\hat{\sigma}_t, X(\hat{\sigma}_t)) \\ &= R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) \end{aligned}$$

いずれの場合も

$$R_t(\sigma, \hat{\tau}_t) \geq R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) \quad (2.10)$$

となる。

2) 次に $\sigma = \hat{\sigma}_t$ とし, τ は任意の停止時刻としよう。もし, $\hat{\sigma}_t < \tau < T$ ならば,

$$\begin{aligned} R_t(\hat{\sigma}_t, \tau) &= \int_t^{\hat{\sigma}_t} c(s) ds + f(\hat{\sigma}_t, X(\hat{\sigma}_t)) \\ &= \int_t^{\hat{\sigma}_t} c(s) ds + V(\hat{\sigma}_t, X(\hat{\sigma}_t)) \\ &\leq \int_t^{\hat{\sigma}_t \wedge \tau} c(s) ds + V(\tau, x) \\ &\leq \int_t^{\hat{\sigma}_t \wedge \tau} c(s) ds + g(\hat{\tau}_t, X(\hat{\tau}_t)) = R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t). \end{aligned}$$

もし, $\tau \leq \hat{\sigma}_t$ ならば,

$$\begin{aligned} R_t(\hat{\sigma}_t, \tau) &= \int_t^{\tau} c(s) ds + g(\tau, X(\tau)) \\ &\leq \int_t^{\hat{\sigma}_t} c(s) ds + g(\hat{\tau}_t, X(\hat{\tau}_t)) \\ &= R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) \end{aligned}$$

いずれの場合も

$$R_t(\hat{\sigma}_t, \tau) \leq R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) \quad (2.11)$$

となる。

それぞれの割引率で割引いて $X(t) = x$ に関して条件付期待値をとれば, (2.10) 式と (2.11) 式より

$$\begin{aligned} & \operatorname{ess\,sup}_{\tau} \tilde{E} \left[e^{-\int_t^{\hat{\sigma}_t \wedge \tau} c(s) ds} R_t(\hat{\sigma}_t, \tau) \mid X(t) = x \right] \\ & \leq \tilde{E} \left[e^{-\int_t^{\hat{\sigma}_t \wedge \hat{\tau}_t} r(s) ds} R_t(\hat{\sigma}_t, \hat{\tau}_t) \mid X(t) = x \right] \\ & \leq \operatorname{ess\,inf}_{\sigma} \tilde{E} \left[e^{-\int_t^{\sigma \wedge \hat{\tau}_t} r(s) ds} R_t(\sigma, \hat{\tau}_t) \mid X(t) = x \right] \end{aligned}$$

となって (2.9) 式を得る。

注 2.3

- 1) 利得関数は時刻 t と資産価格 $X(t)$ のみに依存して, 経路独立型である。
- 2) $R_0(\sigma, \tau)$ には上限, 下限が存在する。 $\tau, \sigma < T$ に対して下限は $\int_0^{\hat{\sigma}_t \wedge \tau} c(s) ds + g(\hat{\sigma}_t, \tau)$ であり, 上限は $\int_0^{\sigma \wedge \hat{\tau}_t} c(s) ds + f(\tau, X(\tau))$ である。
- 3) 満期まで双方が停止しなければ, $R_T(\sigma, \tau) = \int_0^T c(s) ds + h(X(T))$ である。

定理 2.2 (永久条件付請求権)

仮定 2.1 に加えて

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\int_0^t r(s) ds} f(t, x) = 0 \quad \text{for all } x \quad (2.12)$$

が成立するならば, $V(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x)$ が存在し, $V(x)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき定理 2.1 の (2.7) 式を満たす。

証明は, $r(s) = r$ (一定) の場合について Kifer [20] が与えているので, ここでは省略する.

注 2.4 定理 2.2 の仮定に対する十分条件は

$$\left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq M_1, \quad \text{for all } x$$

でかつ

$$0 < r(t) \leq M_2, \quad \text{for all } t$$

である.

系 2.1 (2.1) 式において $\delta(t) = 0$ とする. もし, $g(t, x)$ が各 t に関して x の凸関数ならば,

$$V(t, x) = \inf_{\sigma \in \mathcal{T}_t, T} E[e^{-\int_t^\sigma r(s) ds} R_t(\sigma, T) | X(t) = x]$$

となり, $t \geq T$ となってプレーヤー I のみの最適停止問題に退化する.

(証明) $X(t)$ は \hat{P} の下でマーチンゲールであるから凸関数 $g(t, X(t))$ もまたサブマーチンゲールである. 任意抽出定理 (Optional Sampling Theorem) より

$$\sup_{\tau \leq T} g(\tau, X(\tau)) = g(T, X(T))$$

となる. 従って, 定理 2.1 より

$$\begin{aligned} V(t, x) &= \inf_{\sigma} E[e^{-\int_t^\sigma c(s) ds} \{ \int_t^\sigma r(s) ds + f(\sigma, X(\sigma)) 1_{\{\sigma < T\}} \\ &\quad + g(T, X(T)) + h(X(T)) 1_{\{\sigma = T\}} \} | X(t) = x] \\ &= \inf_{\sigma} E[e^{-\int_t^\sigma r(s) ds} R_t(\sigma, T) | X(t) = x] \end{aligned}$$

を得る.

3 いくつかの例題

この節では, 前節で考察した 2 つの停止境界をもつ条件付請求権の具体的な例を紹介する. プレーヤー I は発行人 (売り手), プレーヤー II は投資家 (買い手) と解釈して議論する. 発行人の権利は契約解消権であり, 投資家の権利は権利の行使権である.

A ヨーロピアン・コールオプション

$$\begin{aligned} c(t) &\equiv \delta, \quad f(t, x) \equiv 0, \quad g(T, x) = h(x) = \max\{K - x, 0\} \\ V(t, x) &= x e^{\delta(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ d_1 &= \log(x/K) / \sigma \sqrt{T-t} + (r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma} \\ d_2 &= d_1 - \sigma \sqrt{T-t} \end{aligned}$$

下限: $\max\{x - K, 0\} \leq V(t, x)$

B アメリカン・プットオプション

$$\begin{aligned} c(t) &= 0, f(t, x) \equiv 0 & h(X(T)) &= \max\{K - X(T), 0\} \\ g(t, x) &= \max\{K - x, 0\} \end{aligned}$$

上下限: $\max\{K - x, 0\} \leq V(t, x) \leq K$

C アメリカン・ゲームプットオプション (瀬古・鈴木・澤木 [34])

$$\begin{aligned} c(t) = 0 \quad f(t, x) &= \max\{K - x, 0\} + \delta \\ g(t, x) &= \max\{K - x, 0\} < f(t, x) \\ V(t, x) &= \sup_{\tau} \inf_{\sigma} E[e^{-r(\sigma \wedge \tau - t)} R(\sigma, \tau) | X(t) = x] \\ &= \inf_{\tau} \sup_{\sigma} E[e^{-r(\sigma \wedge \tau - t)} R(\sigma, t) | X(t) = x] \end{aligned}$$

上下限:

$$(K - x)^+ \leq V(t, x) \leq (K - x)^+ + \delta$$

最適停止境界:

$$t^* \equiv \sup\{t \geq 0 | \delta \leq V^a(t, K)\}$$

発行人:

$$S_t^I = \begin{cases} \{K\}, & t \in [0, t^*] \\ \phi & \in (t^*, T] \end{cases}$$

もし $\delta > V^a(t, K)$ ならば, $t^* = 0$. すなわち $S_t^I = \phi$.

投資家:

$$S_t^{II} = [0, x_t^{II}]$$

$x_t^a \leq x_t^{II} \leq K$ かつ $\lim_{t \rightarrow T} x_t^{II} = K$

定理 3.1 (価格の分解)

$V^e(t, x)$ をヨーロッパン・プットオプションの価格とすれば, $V(t, x)$ は次のように分解される.

$$V(t, x) = V^e(t, x) + e(t, x) - d(t, x).$$

ここで,

$$\begin{aligned} e(t, x) &= \bar{E}\left[\int_t^T e^{-r(s-t)} r K 1_{\{X(s) \leq x_t^{II}\}} ds | X(t) = x\right] \geq 0, \\ d(t, x) &= \bar{E}\left[\int_t^{t^*} e^{-r(s-t)} \left(\frac{\partial V}{\partial x}(K^+, s) - \frac{\partial V}{\partial x}(K^-, s)\right) dL_s^x(K)\right] \geq 0 \end{aligned}$$

である.

系 3.1 $e^a(t, x)$ をアメリカン・プットオプションの早期行使プレミアムとすれば

$$\begin{aligned} e(t, x) &> e^a(t, x), \quad t \in [0, t^*] \\ e(t, x) &= e^a(t, x), \quad t \in [t^*, T] \end{aligned}$$

系 3.2 (永久ゲームプットオプション (鈴木・澤木 [30] [33], Kyprianou [23]))

もし $\delta \geq \delta^*$ ならば, $V_\infty(x) = V_\infty^{a(x)} = rK \tilde{E}[\int_0^\infty e^{-rt} 1_{\{X(t) \leq x\}} | X(0) = x]$

もし $\delta < \delta^*$ ならば, $V_\infty(x) = V_\infty^{a(x)} - (\frac{dV_\infty}{dx}(K^+) - \frac{dV_\infty}{dx}(K^-)) \tilde{E}[\int_0^\infty e^{-rt} dL_t^x(K)]$

ここで $\delta^* = V_\infty^a(K)$ である.

D 償還条項付の転換社債 (八木・澤木 [31] [32])

$$c(t) = c$$

$$f(t, x) = \max\{zx, F\}, \quad z = \text{希薄化率 (dilution rate)}$$

$$g(t, x) = zx$$

$$h(X(T)) = \min\{X(T), \max(zX(T), F)\}$$

上下限:

$$zx \leq V(t, x) \leq \max(zx, C), \quad C: \text{コール価格}$$

最適停止領域:

発行人:

$$S^I = \{(t, x) | V(t, x) = \max(zx, C)\}$$

$$x_t^I = \inf\{x | x \in S_t^I\}$$

$$S_t^I = [x_t^I, \infty)$$

投資家:

$$S^{II} = \{(t, x) | V(t, x) = zx\}$$

$$x_t^{II} = \inf\{x | x \in S_t^{II}\}$$

$$S_t^{II} = [x_t^{II}, \infty)$$

$x_t^* \equiv \min(x_t^I, x_t^{II})$ とすれば

継続領域は,

$$C_t = [0, x_t^*]$$

となる.

定理 3.2 (価格の分解)

$$V(t, x) = B(t, x) + \hat{c}(t, x) + p(t, x) - d(t, x)$$

ここで, $B(t, x)$ は割引債の価格で, $\hat{c}(t, x)$ はヨーロッパアン・コールオプションの価格, $p(t, x)$ は早期転換プレミアム, $d(t, x)$ は償還割引額である.

E インストールメント・アメリカンオプション (Ben-Ameur [2])

$$c(t) = -q, \quad f(t, x) = 0, \quad g(t, x) = (S(t) - K)^+$$

$$h(X(T)) = (S(T) - K)^+$$

$$R_t(\tau_e, \tau_s) = (S(\tau_e) - K)^+ 1_{\{\tau_e < \tau_s < T\}} + (S(T) - K) 1_{\{\tau_e \wedge \tau_s \geq T\}}$$

$$V(t, x : q) = \text{ess sup}_{\tau_e, \tau_s} \mathbf{E} \left[e^{-r(\tau_e \wedge \tau_s - t)} R_t(\tau_e, \tau_s) | X(t) = x \right] - \int_t^{\tau_e \wedge \tau_s} q e^{-rs} ds$$

最適停止領域：

$$\begin{aligned} S &= \{(t, x) | V(t, x : q) = 0\} \\ \mathcal{E} &= \{(t, x) | V(t, x : q) = (x - K)^+\} \end{aligned}$$

特に、満期 T での

最適停止境界： $\underline{S}(T) = K$

最適行使境界： $\bar{S}(T) = \max\{\frac{rK - q}{\delta}, K\}$

定理 3.3 (価格の分解)

$$\begin{aligned} V(t, x : q) &= c(t, x) - q \int_t^T e^{-r(u-t)} \Phi(d_-(x, \underline{S}(u); u-t)) du \\ &+ \int_t^T \{ \delta x e^{-\delta(u-t)} \Phi(d_+(x, \bar{S}(u), u-t)) \\ &- (rK - q) e^{-r(u-t)} \Phi(d_-(x, \bar{S}(u), u-t)) \} du \end{aligned}$$

ここで、 $c(t, x)$ はヨーロピアン・コールオプションの価格であり、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布を表す。

F ダブルバリア型エクイティリンク債 (ヨーロッパ型)

$$\begin{aligned} c(t) &= 0, \quad f(t, x) = 0, \quad g(t, x) = 0 \\ \hat{X}(T) &= \max_{0 \leq t \leq T} X(t), \quad \check{X}(T) = \min_{0 \leq t \leq T} X(t) \\ h(\hat{X}(T), \check{X}(T)) &= F 1_{\{\hat{X}(T) \geq U\}} + F 1_{\{\hat{X}(T) < U, \check{X}(T) \geq L\}} \\ &+ \min\{F, \frac{X(T)}{X(0)} F\} 1_{\{\hat{X}(T) < U, \check{X}(T) < L\}} \\ V(t, x) &= \tilde{E}[e^{-r(T-t)} \{F - \frac{F}{X(0)} \max\{X(0) - X(T), 0\} 1_{\{\hat{X}(T) < U\}} \\ &+ \frac{F}{X(0)} \max\{X(0) - X(T), 0\} 1_{\{\hat{X}(T) < U, \check{X}(T) \geq L\}} | X(t) = x\}] \\ &= e^{-r(T-t)} \{F - \frac{F}{X(0)} \hat{V}(t, x) + \frac{F}{X(0)} \check{V}(t, x)\} \end{aligned}$$

ここで、 \hat{V} は権利行使価格が $X(0)$ であるヨーロピアン・アップアンドアウトプットオプションの価格であり、 \check{V} はヨーロピアン・ダブルロックアウトプットオプションの価格である。

G 不動産の売却・購入モデル (中野・後藤・大野 [35])

プレーヤー I を不動産を現に保有している売り手とし、不動産からの利得を最大にするために何時売却するかを考えている、プレーヤー II を不動産の購入を検討している買い手と想定しよう。この買い手は、不動産購入の費用を最小にしたいと考えている。それぞれの売却時刻および購入時刻をそれぞれ σ と τ で表す。ここでは、不動産を住居用不動産と見做すことにしよう。

X_t を時刻 t での入居世帯数としたとき、 X_t は確率微分方程式

$$dX_t = u_1 dq_1 - u_0 dq_2$$

を満たすと仮定する。 Y_t を時刻 t での不動産価格とすれば、 Y_t は確率微分方程式

$$dY_t = dY_t dt + \sigma dW_t$$

を満たす。 プレーヤー I (売り手) の利得関数 (賃貸収入) を $f(t, X_t)$ とし、 プレーヤー II (買い手) の利得関数を $g(t, Y_t)$ とする。 $V_I(t, x, y)$ を $X_t = x, Y_t = y$ のときのプレーヤー I の期待収益の最大値とし、 $V_{II}(t, x, y)$ をプレーヤー II の期待費用の最小値とすれば、 $V_I(\cdot, \cdot, \cdot)$ と $V_{II}(\cdot, \cdot, \cdot)$ は動的計画法の最適性の原理より次式を満たす。

$$\begin{aligned} V_I(t, x, y) &= \sup_{\sigma} E[e^{-r(\sigma-t)} \{ \int_t^{\sigma} f(s, X_s) ds + e^{-r(\sigma-t)} g(\sigma, Y_{\sigma}) + V_{II}(\sigma, X_{\sigma}, Y_{\sigma}) \} | X_t = x, Y_t = y] \\ V_{II}(t, x, y) &= \inf_{\tau} E[e^{-r(\tau-t)} g(\tau, X_{\tau}) + e^{-r(\tau-t)} V_I(\tau, X_{\tau}, Y_{\tau}) | X_t = x, Y_t = y] \end{aligned}$$

例えば、 $f(t, X_t) = f(X_t) - C$, $g(t, Y_t) = Y_t$ と仮定すれば、 利得関数は中野・後藤・大野 [35] に退化する。

$V_I(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_I(t, x, y)$ とすれば、 $V_I(x, y)$ は入居者数が x で不動産価格が y のとき一度売却すれば、 それ以降永久に保有しないときの売り手の期待利得となる: $V_{II}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} V_{II}(t, x, y)$ とすれば、 $V_{II}(x, y)$ は不動産を一度購入すれば永久に保有する買い手の期待費用となり、 永久モデルとなる。

上記のモデルは、 不動産の購入と売却を交互に繰返すモデルとなっている。 従って、 常微分方程式をそれぞれ別個に解く永久モデルではなく、 動的計画法の関数方程式が交互に入組んだ式になっていることに注目しよう。

さらに、 本モデルの利得 (費用) 関数を条件付請求権の評価モデルとして定式化することによって、 不動産の証券化も可能である。 例えば、

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= \max\{f(X_t), K_1\} = K_1 + \max\{f(X_t) - K, 0\} \\ g(t, Y_t) &= \max\{Y_t - K_2, 0\} \end{aligned}$$

とすれば、 不動産の売却・購入モデルをオプション評価モデルとして定式化したことになる。

- H 寡占企業間の参入・退出モデル (Goto, M., Takashima, R., Tajimura, M. and Ohno, T. [12])
プレーヤー I を既に参入している企業、 プレーヤー II を今後参入予定の企業とすれば、 σ はプレーヤー I の産業からの退出時刻を、 τ はプレーヤー II の参入時刻を表す。 この産業の時刻 t での需要を X_t とすれば、 X_t は確率微分方程式

$$dX_t = \mu X_t dt + \alpha X_t dW_t$$

で与えられるとする。 C_t を時刻 t での退出費用とし、 $f(t, X_t)$ をプレーヤー I の利得関数、 $g(t, X_t)$ をプレーヤー II の参入費用としよう。 $V_I(t, x)$ をプレーヤー I の期待利得の最大値、 $V_{II}(t, x)$ をプレーヤー II の期待費用の最小値とすれば、 $V_I(\cdot, \cdot), V_{II}(\cdot, \cdot)$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned} V_I(t, x) &= \sup_{\sigma} E[e^{-r(\sigma-t)} \{-C_{\sigma} + \int_t^{\sigma} f(s, X_s) ds + V_{II}(\sigma, X_{\sigma})\} | X_t = x] \\ V_{II}(t, x) &= \inf_{\tau} E[e^{-r(\tau-t)} \{g(\tau, X_{\tau}) + V_I(\tau, X_{\tau}, Y_{\tau})\} | X_t = x] \end{aligned}$$

Goto, M., Takashima, R., Tajimura, M. and Ohno, T. [12] では

$$\begin{aligned} C(t) &= -C_t \\ f(t, X_t) &= D(1)X_t \\ g(t, X_t) &= D(0)X_t + E_t \end{aligned}$$

と仮定し、ひとたび参入または退出すれば、その状態を維持する永久参入・退出モデルを分析している。

4 いくつかの解析的性質

この節では、アメリカン・プットオプションやゲームオプションでよく知られている定性的な性質が、本論文におけるより一般的な利得関数をもつ条件付請求権においても成立するか否かを検証する。特に、プレーヤー I (発行人) が解消権をもつ証券に対してその解消権の最適な権利行使領域や時間について解析的性質を明らかにしたい。これらの性質を導出するために発行人および投資家の利得関数に対して次の仮定を設ける。

仮定 4.1 $f(t, x), g(t, x)$ および $h(x)$ は t に関して連続な非増加関数で、 x に関して単調かつ凸関数である。プレーヤー I (発行人), II (投資家) の停止領域および継続領域を S^I, S^{II}, C として、次のように定義する。

$$\begin{aligned} S^I &= \{(t, x) | V(t, x) = f(t, x)\} \\ S^{II} &= \{(t, x) | V(t, x) = g(t, x)\} \\ C &= \{(t, x) | g(t, x) < V(t, x) < f(t, x)\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

S_t^I, S_t^{II} は、それぞれ S^I, S^{II} の時刻 t でのトランケーションである。

補助定理 4.1

- 1) $V(t, x)$ は各 x に対して t の連続な非増加関数である。
- 2) $V(t, x)$ は各 t に対して x の単調な凸関数である。
- 3) もし $(t, x) \in C$ ならば $\mathcal{L}V = 0$ である。ただし、 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\kappa^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (r - \delta)x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} - r$

(証明) 証明は Kühn and Kyprianou [21] と同様にして可能であるので、ここでは省略する。

補助定理 4.2

もし $f(t, x)$ および $g(t, x)$ が各 t に対して x の単調な凸関数ならば S_t^I と S_t^{II} は閉包である。即ち、各停止領域は飛び地をもたない。

(証明) 停止領域 S^I が閉包でないと仮定する。 t を固定し、 $x_1, x_2 \in S_t^I$, $x_1 \neq x_2$, となる x_1 と x_2 を選ぶ。 $0 < \alpha < 1$ となる α に対して $y = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in C$ となる y が継続領域に存在して、このとき継続領域の定義から、

$$V(t, y) < f(t, y) \quad (4.2)$$

が成立する。補助定理 4.1 より $V(t, x)$ は x の凸関数であり $x_1, x_2 \in S_t^I$ より、

$$\begin{aligned} V(t, y) = V(t, \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\geq \alpha V(t, x_1) + (1 - \alpha)V(t, x_2) \\ &= \alpha f(t, x_1) + (1 - \alpha)f(t, x_2) \\ &\geq f(t, \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \\ &= f(t, y) \end{aligned}$$

となつて、(4.2) 式に矛盾する。

補助定理 4.3 もし発行人が契約解消権をもたない（通常のアメリ칸タイプ）ときの条件付請求権の価格を $V^a(t, x)$ とし、満期が無限大のときのその価格を $V_\infty^a(t, x)$ とすれば、次のことが成立する。

- 1) $V(t, x) \leq V^a(t, x) \leq V_\infty^a(t, x)$.
- 2) $S_t^{II} \supseteq S_t^a \supseteq S_\infty^a$.

(証明)

- 1) minimizer としての契約解消権をもたないならば、maximizer としての投資家の最適停止問題となつて (2.9) 式より $V(t, x) \leq V^a(t, x)$ が成立する。Karatzas and Shreves [18] [19] より $V^a(t, x) \leq V_\infty^a(t, x)$ が成立する。
- 2) 固定した t に対して $g(t, x)$ が非増加ならば、補助定理 4.1 より $V(t, x)$ も非増加な凸関数である。(4.1) 式より $S_t^{II} \supseteq S_t^a \supseteq S_\infty^a$ を得る。

定理 4.1 差 $\delta_t \equiv f(t, x) - g(t, x)$ とし、 δ_t は t の非増加関数とし、 $K_t \equiv \arg \min_x f(t, x)$ とする。さらに、

$$t^* = \begin{cases} \sup\{t \geq 0 \mid \delta_t \leq V^a(t, K_t)\} \\ \infty \quad \text{空集合のとき} \end{cases}$$

を定義する。

- 1) 発行人の最適な解消領域は、もし $t \in [0, t^*]$ ならば、 $S_t^I = \{K_t\}$ 、もし $t \in (t^*, T]$ ならば、 $S_t^I = \phi$ となる。
- 2) 投資家の最適な停止領域は、 $S_t^{II} = [0, x_t^B]$ である。ただし、 x_t^B は t の非減少関数で $\lim_{t \rightarrow T} x_t^B = h(K) = g(T, K)$ 。

(証明) もし $\delta_t > v^a(t, K_t)$ ならば、発行人は解消権が付与されていないアメリ칸タイプのときの価格よりも大きいペナルティーを解消権の行使に当って支払うことを意味する。従つて、この場合は発行人は満期まで解消権を行使しないこの場合を考えよう。

残された課題

- 1) $V(t, x)$ は既知の資産価格に分解できるか。
- 2) $f(t, x)$ が x の非減少でかつ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(t, x) = \infty$ ならば、 $V(t, x) \rightarrow \infty$ となる。
- 3) $f(t, x)$ が x の非増加でかつ $\lim_{x \rightarrow 0} f(t, x) = 0$ ならば、 $V(t, x) \rightarrow 0$ となるか。

5 第3のプレーヤーがいる場合への拡張

プレーヤー I(発行人) とプレーヤー II (投資家) に加えて、既存株主等のステークホルダーとして第3のプレーヤーの存在を仮定しよう。M & A で散見されるように経営権をめぐる厳しい競争の下でのプレー

ヤーは発行人たる企業（経営者）と投資家だけではない。新株予約権をめぐる企業と投資家のゲームを想定したとき、既存株主の支持がそのゲームの勝敗を決める重要な要因となる可能性がある。

この節では、第3のプレーヤーである既存株主等のステークホルダーが存在したときの発行人と投資家の最適な戦略を考察する枠組を提示したい。すなわち、投資家、発行人に加えて第3のプレーヤー（ステークホルダー）が存在して、3者間で結託（提携）が形成される状況を想定する。しかし、条件付請求権をめぐってその権利を解消できるのは発行人であり、その権利の行使権は投資家が有していると仮定する。第3のプレーヤーであるステークホルダーが発行人と投資家のどちらと結託するかによって、発行人と投資家の利得関数が増減するのである。すなわち、プレーヤーの間では有利な結託の形成を追求して、発行人と投資家はステークホルダーをめぐるゲームが演じられるとする。この節では、3人のプレーヤーをそれぞれPI, PII, PIIIとしてPIIIがPI, PIIのいずれかと結託する協力ゲームを最適停止問題として定式化する。結託の組み合わせとしては $\{\{PI\}, \{PII\}, \{PIII\}, \{PI, PIII\}, \{PII, PIII\}, \{PI, PII\}, \{PI, PII, PIII\}\}$ の7通りが考えられるが、ここでは $\{\{PI, PIII\}, \{PII\}\}$ と $\{\{PI\}, \{PII, PIII\}\}$ の2つの結託に限定する。PIIIの利得関数を $h(t, x)$ と、PIとPIIが結託すればPIの利得関数は $f'(t, x)$ に、PIIとPIIIが結託すれば $g'(t, x)$ にそれぞれの利得関数は変換される。ただし、 $f(t, x) \geq f'(t, x), g(t, x) \leq g'(t, x)$ と仮定する。結託後の変換された利得関数に対する1つの解釈は

$$\begin{aligned} f'(t, x) &= f(t, x) - h(t, x), \\ g'(t, x) &= g(t, x) + h(t, x) \end{aligned} \quad (5.1)$$

である。あるいは、

$$\begin{aligned} f'(t, x) &< f(t, x), \\ g'(t, x) &> g(t, x) \end{aligned} \quad (5.2)$$

の仮定は、PI, PIIに対してともに結託のインセンティブを与える。PIがPIIIと結託したときの停止時刻を σ' , PIIがPIIIと結託したときの停止時刻を τ' とすれば、それぞれの停止時刻の組の下での利得関数は

$$\begin{aligned} R_t(\sigma', \tau) &= \int_t^{\sigma' \wedge \tau} c(s) ds + f'(\sigma', \tau) 1_{\{\sigma' < \tau\}} \\ &+ g(\sigma, \tau) 1_{\{\tau < \sigma'\}} + h(X(T)) 1_{\{\sigma' \wedge \tau = T\}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} R_t(\sigma, \tau') &= \int_t^{\sigma \wedge \tau'} c(s) ds + f(\sigma, \tau') 1_{\{\sigma < \tau'\}} \\ &+ g(\sigma, \tau') 1_{\{\tau' < \sigma\}} + h(X(T)) 1_{\{\sigma \wedge \tau' = T\}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

となり、それぞれの戦略の下での条件付請求権の価格は次の定理で与えられる。

定理 5.1 (5.1) 式において各 t に対して $f'(t, x) > g'(t, x)$, for all x が成立すると仮定する。

1) 各々の結託において

$$\underline{V}^I(t, x) = \sup_{\tau} \inf_{\sigma'} E[e^{-\int_t^{\sigma' \wedge \tau} r(s) ds} R_t(\sigma', \tau) | X(t) = x], \quad (5.5)$$

$$\overline{V}^I(t, x) = \inf_{\sigma'} \sup_{\tau} E[e^{-\int_t^{\sigma' \wedge \tau} r(s) ds} R_t(\sigma', \tau) | X(t) = x] \quad (5.6)$$

とすれば $\underline{V}^I(t, x) = \overline{V}^I(t, x)$ が成立する。

$$\underline{V}^{II}(t, x) = \sup_{\tau'} \inf_{\sigma} E[e^{-\int_t^{\sigma \wedge \tau'} r(s) ds} R_t(\sigma, \tau') | X(t) = x], \quad (5.7)$$

$$\bar{V}^{II}(t, x) = \inf_{\sigma} \sup_{\tau'} E[e^{-\int_t^{\sigma \wedge \tau'} r(s) ds} R_t(\sigma, \tau') | X(t) = x] \quad (5.8)$$

とすれば $\bar{V}^{II}(t, x) = \underline{V}^{II}(t, x)$ が成立する.

2) もし $\bar{V}^I(t, x) > \bar{V}^{II}(t, x)$ ならば, PI と PIII の結託が優先する.

もし $\bar{V}^{II}(t, x) > \bar{V}^I(t, x)$ ならば, PII と PIII の結託が優先する.

3) $D^I(t, x) = V^I(t, x) - \bar{V}^{II}(t, x)$, $D^{II}(t, x) = \bar{V}^{II}(t, x) - \bar{V}^I(t, x)$ としたとき, $D^I(t, x)$ と $D^{II}(t, x)$ の大小関係は事前に決められた配分ルールに依存する.

(証明)

1) 定理の仮定の下で仮定 2.1 の 2) が成立する. 利得関数 $R_t(\sigma', \tau)$ および $R_t(\sigma, \tau')$ の下での 2つの 2人停止問題を考えよう. 利得関数 $R_t(\sigma', \tau)$ と利得関数 $R_t(\sigma, \tau')$ に対するゲームの値を $V^I(t, x)$ および $V^{II}(t, x)$ とすれば, 定理 2.1 より

$$V^I(t, x) = \underline{V}^I(t, x) = \bar{V}^I(t, x)$$

および

$$V^{II}(t, x) = \underline{V}^{II}(t, x) = \bar{V}^{II}(t, x)$$

が成立する. ここで $V^I(t, x)$ はプレーヤー III がプレーヤー I と結託したときの 2人ゲームの値であり, $V^{II}(t, x)$ はプレーヤー III がプレーヤー II と結託したときのゲームの値である.

2) $V^I(t, x)$ と $V^{II}(t, x)$ の大小関係は不明であるので, その大小関係がどのプレーヤーとの結託が優位であるかを規定する.

3) プレーヤー I と III およびプレーヤー II と III の結託がそれぞれゲームの値をもつためには, プレーヤー間において結託による利得関数 f' および g' について情報の対象性が保証され, f' と g' を確保したときの配分ルールが事前に決められている. このとき, 情報の対象性の下での 2人ゼロ和ゲームであるから, このゲームは均衡解をもつ.

6 まとめと今後の研究方向

本論文では, 発行人 (プレーヤー I) と投資家 (プレーヤー II) がそれぞれ権利行使可能な条件付請求権の評価モデルの定式化を行なった. このような問題は, 2人最適停止問題として定式化できることを示し, その条件付請求権の価値は, 2人停止ゲームの鞍点解となることを証明した. コーラブルなアメリカンやゲーム・オプションおよび償還条項付転換社債ばかりでなく, 種々の仕組債やリアル・オプションの問題もこの枠組みの下で定式化されることを論証した.

さらに, 既存株主等のステークホルダーを第3のプレーヤーと見做すことで, 従来の投資家と発行人 (企業) の 2人ゲームを 3人のプレーヤーがいる資本市場でのリスク・ゲームへと拡張した. そこでは, プレーヤー間の提携・結託が発生することを論じた. このような拡張は, 新株予約権の発行による M&A の分析にも応用できる. 株主保護か投資家保護かをめぐる政策判断を議論するとき, 既存株主等のステークホルダーに対してどちらの側がより大きな企業価値 $V^I(t, x)$ および $V^{II}(t, x)$ を主成することになるかの論理的枠組みを考察することの可能性およびその重要性を指摘した.

今後は, さらにこの枠組みをより精密化したり, 特定の金融商品に特化することによって利得関数を具体化したとき各プレーヤーの行動分析にも応用できるであろう. 行動ファイナンスの研究方向とも将来結び

付けることも可能であり、企業（プレーヤー I）の M & A に対する防御策の分析にも応用できる可能性を内在している。

参考文献

- [1] Barraquand, J. and Pudet, T., " Pricing of American Path-dependent Contingent Claims, " *Mathematical Finance*, 6, 17-51, 1996.
- [2] Ben-Ameur, H., M. Breton and P. François, " Pricing installment options with an application to ASX installment warrants, " Working Paper G-2002-59, GERAD, 2002.
- [3] Black, F. and Scholes, M., " The Pricing of Options and Corporate Liabilities, " *Journal of Political Economy*, 81, 637-659, 1973.
- [4] Brennan, M. J. and Schwartz, E. S., " The Valuation of American Put Options, " *Journal of Finance*, 32, 449-462, 1976.
- [5] Carr, P., Jarrow, R. and Myneni, R., " Alternative Characterizations of American Put Options, " *Mathematical Finance*, 2, 87-106, 1992.
- [6] Cox, J. C., Ross, S. A. and Rubinstein, M., " Option Pricing: A Simplified Approach, " *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263, 1979.
- [7] Cvitanic, J. and Karatzas, I., " Backward Stochastic Differential Equations with Reflection and Dynkin Games, " *Annals of Probability*, 24, 2024-2056, 1996.
- [8] Duffie, D. and Epstein, L., " Stochastic differential utility, " *Econometrica*, 60, 353-394, 1992.
- [9] Dynkin, E. B., " Game Variant of a Problem on Optimal Stopping, " *Soviet Mathematics Doklady*, 10, 270-274, 1969.
- [10] Geman, H. and Yor, M., " The Valuation of Double-barrier Options: A Probabilistic Approach " , *Mathematical Finance*, 6, 365-378, 1996.
- [11] Geske, R. and Johnson, H. E., " The American Put Option Valued Analytically, " *Journal of Finance*, 39, 1511-1524, 1984.
- [12] Goto, M., Takashima, R., Tajimura, M. and Ohno, T., " Entry and Exit Descisions under Uncertainty in a Symmetric Duopoly, " 2007 研究発表大会余予稿集, 日本リアルオプション学会, 7-10, 2007.
- [13] Ingersoll, J. E., " A Contingent-Claims Valuation of Convertible Securities, " *Journal of Financial Economics*, 4, 289-322, 1977.
- [14] Jacka, S., " Optimal Stopping and the American Put, " *Mathematical Finance*, 1, 1-14, 1991.
- [15] Jalliet, D., Lamberton, D. and Lapeyre, B., " Variational Inequalities and the Pricing of American Options, " *Acta Applicandae Mathematicae*, 21, 263-289, 1990.
- [16] Karatzas, I., " On the Pricing of American Options, " *Applied Mathematics and Optimization*, 60, 37-60, 1988.

- [17] Karatzas, I., *Lectures on the Mathematics of Finance*, CRM Monograph Series, American Mathematical Society, 1997.
- [18] Karatzas, I. and Shreve, S. E., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, New York, 1991.
- [19] Karatzas, I. and Shreve, S. E., *Methods of Mathematical Finance*, Springer, 1998.
- [20] Kifer, Y., " Game Options, " *Finance and Stochastics*, 4, 443-463, 2000.
- [21] Kühn, C. and Kyprianou, A. E., " Israeli Options as Composite Exotic Options, " Preprint, 2004.
- [22] Kunita, H. and Seko, S., " Game call options and their exercise regions, " *Technical Report of the Nanzan Academic Society Mathematical Sciences and Information Engineering*, NANZAN-TR-2004-6, 2004.
- [23] Kyprianou, A. E., " Some Calculations for Israeli Options, " *Finance and Stochastics*, 8, 73-86, 2004.
- [24] McConnell, J. and Schwartz, E. S., " LYON Taming, " *Journal of Finance*, 41, 561-576, 1986.
- [25] McKean, H. P., " Appendix: A Free Boundary Problem for the Heat Equation Arising from a Problem in Mathematical Economics, " *Industrial Management Review*, 6, 32-39, 1965.
- [26] Merton, R.C., " Theory of Rational Option Pricing, " *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183, 1973.
- [27] Myneni, R., " The Pricing of the American Option, " *The Annals of Applied Probability*, 2, 1-23, 1992.
- [28] Pardoux, E. and Peng, S., " Adapted solution of a backward stochastic differential equation, " *Systems Control Lett.*, 14, 55-61, 1990.
- [29] Sawaki, K., " Optimal Exercise Policies for Call Options and Their Valuation, " *Computers and Mathematics with Applications*, 24, 1992.
- [30] Suzuki, A. and Sawaki, K., " The Pricing of Perpetual Game Put Options and Optimal Boundaries, " *Recent Advances in Stochastic Operations Research*, World Scientific, Singapore, 175-188, 2007.
- [31] Yagi, K. and Sawaki, K., " The Valuation and Optimal Strategies of Callable Convertible Bonds, " *Pacific Journal of Optimization*, Yokohama Publishers, 12, 375-386, 2005.
- [32] Yagi, K. and Sawaki, K., " On the Valuation and Optimal Boundaries of Convertible Bonds with Call Notice Periods, " *Recent Advances in Stochastic Operations Research*, World Scientific, Singapore, 189-202, 2007.
- [33] 鈴木淳生, 澤木勝茂, " 償還条項付き永久アメリカンオプションの価格について, " *Transactions of the Operations Research Society of Japan*, 49, 19-31, 2006.
- [34] 瀬古進, 鈴木淳生, 澤木勝茂, " 償還条項付きアメリカンオプションの評価について, " 現代ファイナンス, 日本ファイナンス学会, 17, 83-96, 2005.
- [35] 中野淳, 後藤允, 大野高裕, " 買い手評価の不確実性を考慮した不動産の売却意思決定モデル, " 2006 研究発表大会余予稿集, 日本リアルオプション学会, 21-24, 2006.