

デカルトの円定理に関連して

栃木県立足利高等学校 小曾根 淳 (Jun Ozone)
Tochigi Prefectural Ashikaga Senior High School

1. 始めに

平成 19 年、群馬県和算研究会主催「桐生の算額巡りと研修」開催の折、当研究会が崇禅寺⁽¹⁾に奉納した算額⁽²⁾の解説をすることになった。平成 2 年の算額奉納式では、大山誠氏が「崇禅寺算額縁起とその解説」を、デカルトの円定理とシュタイナーの公式を用いて説明され、新しい不変式を明らかにされた。内容は、円の接触問題と球の接触問題である。

本稿では、まずデカルトの円定理とソディーの 6 球連鎖定理を取り上げ、崇禅寺の算額の解法について検討する。次に、別解を示し、算額における不変式成立の条件を明らかにする。更に、J.B.Wilker 等の先行研究に触れ、その関連を考察する。以上を通じて、円や球の接触問題が古くから関心をもたれ研究されてきた、歴史の一端を明らかにする。

2. デカルトの円定理とソディーの 6 球連鎖定理について

まず、デカルトの円定理について述べる。

(デカルトの円定理) 右のように、互いに外接する 3 つの円がある。それぞれを C_1, C_2, C_3 とし、それらに接する円を C_4 とする。実際、 C_4 としては、それらの 3 円に外接する円とそれらを内接させる円の 2 個がある。これらの半径を r_i 、曲率を e_i ($i = 1, 2, 3, 4$) とする。

すると、 e_4 は、次の式によって与えられる。

$$2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^2$$

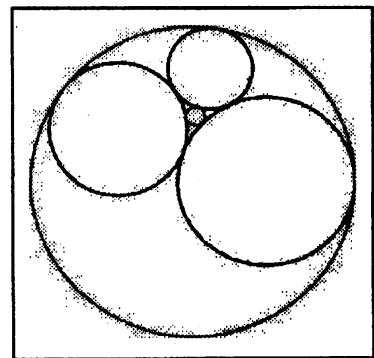


図 1

(注 1) 図 1 は、David Austin: When Kissing Involves Trigonometry, American Mathematical Society Feature Column に依っている。

歴史的には、紀元前 3 世紀にアポロニウスがこの問題を解いている。その後 1643 年、デカルトがボヘミア国王の娘・エリザベス王女宛ての手紙でこの問題を取り上げたことで、デカルトの円定理⁽³⁾として、広く知られるようになった。デカルトは不変式を半径間の関係として表示したが、ダン・ペドローは、曲率を用いた表現をデカルトの円定理と呼んでいる。

更に、1936 年にはノーベル化学賞受賞のフレデリック・ソディーも再発見し、これを球の問題に拡張し、6 球連鎖定理と呼ばれている。

和算では、Descartes の円定理に関して、互いに外接する 3 つの円 C_1, C_2, C_3 に外接する円の半径を求める問題が、1796 年に神楽坂毘沙門堂に掲額された。また、その 3 円 C_1, C_2, C_3 を内接させる円の半径を求める問題は、1811 年長野県・一川谷大元神社に掲額された。⁽⁴⁾

次に、ソディーの 6 球連鎖定理⁽⁵⁾ について述べる。
 (ソディーの 6 球連鎖定理) 右のように 2 個の外接している球を外球に内接させる。その外球と内部の 2 球のいずれにも接し、また次々と外接する球を充填していく。すると、最初の球と 6 番目の球が外接して終了する。

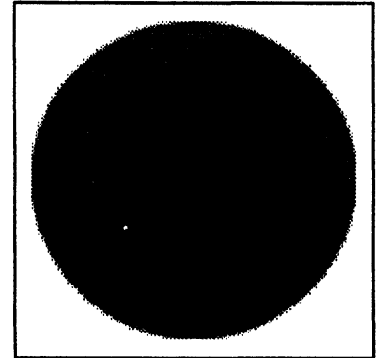


図 2

(注 2) 図 2 は、日経サイエンス HP の「算額の問題に挑戦して見ませんか？」の問題 8 の図に依っている。

我が国では、1822 年神奈川県・寒川神社に掲げられた算額の中で、6 球連鎖の問題が解かれていた。そこでは、何個の球が入るかという個数の問題として扱われた。これが、「和算のなかで最初に 6 球連鎖を論じた問題」であり、これ以後、立体についても多くの和算家が注目することとなった。⁽⁶⁾

その内容は、Descartes の円定理を 3 次元に拡張した不変式、

$$3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5)^2$$

を順次計算し、 $r_7 = r_1$ を導き、6 球連鎖を示した。⁽⁷⁾

3. デカルトの円定理と Steiner の公式について

デカルトの円定理を適用する場合、2 次方程式を解き不適な解を捨てる。一方、Steiner の公式を用いると手間が省ける反面、他の文字に置き換えて利用する場合、式の対称性に注意する必要がある。

予備定理 1 (デカルトの円定理) 互いに外接する 3 つの円 C_1, C_2, C_3 に接する円を C_4 とし、それらの半径を r_i , 曲率を ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) とする。

すると、次式が成立する。 $2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)^2 \dots \dots \dots$ 1-1

ここで 3 円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に内接するときは、 ε_4 を $-\varepsilon_4$ に置き換える。

予備定理 2 (Steiner の公式)⁽⁸⁾ 互いに外接する 3 つの円 C_1, C_2, C_3 に接する円を C_4 とし、それらの半径を r_i , 曲率を ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) とする。

3 円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に内接するときの円 C_4 の半径を r_4 , 曲率を ε_4 とし、外接するときの半径を r_4' , 曲率を ε_4' とすると、次式が成立する。

$$e_4 = -(e_1 + e_2 + e_3) + 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{2-1}$$

$$e_4' = (e_1 + e_2 + e_3) + 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{2-2}$$

ここで、予備定理 1 と予備定理 2 の関係について考察する。

- (1) まず、3 円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に内接するとき、中心を結んで出来る 3 角形で、余弦定理を用いて、

$$e_4 = -(e_1 + e_2 + e_3) \pm 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{1-2}$$

を導き、復号で+の方を採り、

$$e_4 = -(e_1 + e_2 + e_3) + 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{2-1}$$

を得る。

同様に、3 円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に外接するときは、

$$e_4' = (e_1 + e_2 + e_3) \pm 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{1-3}$$

となり、

$$e_4' = (e_1 + e_2 + e_3) + 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{2-2}$$

が得られる。

- (2) ここで、予備定理 1 の内容について検討する。予備定理 1 は、 $\boxed{1-3}$ と同値である。 $\boxed{1-3}$ で e_4' を $-e_4$ で置き換えると $\boxed{1-2}$ となる。しかし、 $\boxed{2-2}$ で e_4' を $-e_4$ で置き換えても $\boxed{2-1}$ にならない。これが混乱を招いている。
- (3) 予備定理 2 は予備定理 1 の e_4 を直接与えたものであり、 e_4 を求める際には便利であるので、例えば e_3 を求めたいときはどうするのか、が次の問題である。

- (i) 3 円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に外接するとき、

$$e_4' = (e_1 + e_2 + e_3) + 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1}$$

を導いた元の式は、

$$2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^2 \dots \dots \dots \boxed{1-1}$$

であり、それぞれの文字について対称であるから、 e_3 と e_4' を入れ換えることができる。

- (ii) 3 円 C_1, C_2, C_3 が円 C_4 に内接するときは、

$$e_4 = -(e_1 + e_2 + e_3) + 2\sqrt{e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1} \dots \dots \dots \boxed{2-1}$$

を導いた元の式は、

$$2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = (e_1 + e_2 + e_3 - e_4)^2 \dots \dots \dots \boxed{1-4}$$

であり、 $\boxed{1-4}$ 式の右辺の $e_1 + e_2 + e_3 - e_4$ に -1 をかけた式

$$2(e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 + e_3^2) = (-e_1 - e_2 + e_4 + e_3)^2 \dots \dots \dots \boxed{1-5}$$

から e_3 を求めることを考えると、 $\boxed{1-5}$ は $\boxed{1-4}$ において、 e_1 を $-e_1$ に、 e_2 を $-e_2$ に置き換え、 e_3 と e_4 を入れ換えれば良い。従って、 $\boxed{2-1}$ 式の (e_1, e_2, e_3, e_4) を $(-e_1, -e_2, e_4, e_3)$ に変換すれば良い。

即ち、

$$e_3 = (e_1 + e_2 - e_4) + 2\sqrt{e_1 e_2 - e_2 e_4 - e_4 e_1} \dots \dots \dots \boxed{2.3}$$

以上をまとめれば、次のようになる。

予備定理 1 では、内接の場合と外接の場合を含めて、単一の式で表現できる。具体的には、それぞれの 2 次方程式を解き、不適なもの捨てる。

予備定理 2 では、既に式が求められていて、利用する際、便利である。e₄ を他の文字に置き換えて利用する場合、内接と外接の場合で異なることに注意する。

4. 崇禪寺の算額題について

崇禪寺の算額は、平成 2 年掲額したものであるが、内容的には、第一問がデカルトの円定理に、第二問がソディの 6 球連鎖定理に関連している。研究の発端は福井県鯖江市船津神社の算額であり、道脇義正・群馬県和算研究会前会長によれば、「円内で互いに接触する円の曲率間に存在する不変性を求め、その三次元への拡張を求めた。・・・その後この拡張された三次元の問題に Descartes の円定理の拡張である Wilker の定理を適用して非常に興味ある結果を得・・・その一部分がはしなくも Sir Fredrick Soddy(1877~1956)の The Hexlet という論文と一致することがわかった。」⁽⁹⁾と述べられている。

まず、平成 2 年の算額奉納式で解説された「崇禪寺算額縁起とその解説」⁽¹⁰⁾から第一問のポイントとなる数学的な部分を取り上げ、その解法を検討する。

[第一問] 算額題の解説

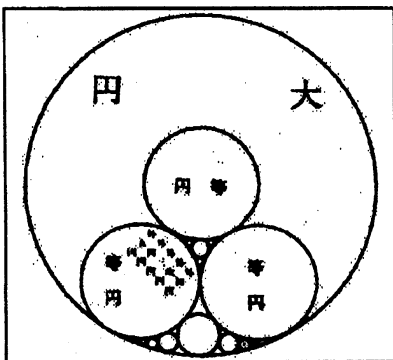


図 3

(題意)

今大円 O (半径 3r、曲率 ρ) 内に互いに外接する 3 等円 (半径 r、曲率 3ρ) のうち 2 等円が大円 O に内接している。この隙間に内累円と外累円を容れる。このとき、各累円の直径を大円径で表せ。ただし、内累円とは等円に外接し大円に内接している円の列である。

(術文)

$$\text{内 } n \text{ 円径} = \text{大円径} \div \{2n(n + \sqrt{3}) + 3\}$$

$$\text{外 } n \text{ 円径} = \text{内 } n \text{ 円径} \times \text{大円径} \div (3 \cdot \text{大円径} \cdot 6 \cdot \text{内 } n \text{ 円径})$$

始めに、内累円の列を {P_n} (n=1,2,3,…) とし、円 P_n の半径を p_n、曲率を τ_n とする。同様に、外累円の列を {Q_n} (n=1,2,3,…) とし、円 Q_n の半径を q_n、曲率を σ_n とする。

元の解説では、内累円の場合は、予備定理 1 の $2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^2$ 、

外累円の場合は、予備定理 2 の $e_4' = (e_1+e_2+e_3) + 2\sqrt{e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1}$ を用いて、それぞれ解いている。

しかし、前述のように、以下では内累円の場合も予備定理 2 を用いて解答するが、元の解説との違いは、そこだけである。

[第一問の解答]

1. 隣円と 1 等円に外接し、かつ大円に内接する円 (内累円) P_n の半径 p_n , 曲率 τ_n に対して、予備定理 2 から得られた 2・3 を用いる。

$e_1=3\rho, e_2=\tau_{n-1}, e_3=\tau_n, e_4=\rho$ として、

$$e_3 = (e_1+e_2+e_4) + 2\sqrt{e_1e_2+e_2e_4+e_4e_1} \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

へ代入すると、

$$\tau_n = (\tau_{n-1}+2\rho) + 2\sqrt{\rho(2\tau_{n-1}-3\rho)} \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

漸化式②を $\tau_0=3\rho$ として順次計算して、

$$\tau_1 = (5+2\sqrt{3})\rho$$

$$\tau_2 = (11+4\sqrt{3})\rho$$

$$\tau_3 = (21+6\sqrt{3})\rho$$

$$\tau_4 = (35+8\sqrt{3})\rho$$

$$\tau_5 = (53+10\sqrt{3})\rho$$

が得られ、

$$\tau_n = \{2n(n+\sqrt{3})+3\}\rho \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

と推定できる。この推定が正しいことは数学的帰納法で証明できる。

従って、

$$p_n = \frac{3\rho}{2n(n+\sqrt{3})+3} \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

2. 隣円と 2 等円のいずれにも外接する円 (外累円) Q_n の半径 q_n , 曲率 σ_n に対して、予備定理 2 を適用する。 $e_1=3\rho, e_2=3\rho, e_3=\sigma_{n-1}, e_4'=\sigma_n$ として、

$$e_4' = (e_1+e_2+e_3) + 2\sqrt{e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1}$$

へ代入すると、

$$\sigma_n = (\sigma_{n-1}+6\rho) + 2\sqrt{6\rho\sigma_{n-1}+9\rho^2} \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

漸化式⑤を $\sigma_0=3\rho$ として順次計算して、

$$\sigma_1 = (9+6\sqrt{3})\rho$$

$$\sigma_2 = (27+12\sqrt{3})\rho$$

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= (57+18\sqrt{3})\rho \\ \sigma_4 &= (99+24\sqrt{3})\rho \\ \sigma_5 &= (153+30\sqrt{3})\rho\end{aligned}$$

が得られ、

$$\sigma_n = \{6n(n+\sqrt{3})+3\}\rho \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

と推定できる。また、この推定が正しいことは数学的帰納法で証明できる。

従って、

$$q_n = \frac{3r}{6n(n+\sqrt{3})+3} \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

3. ③と⑥より不変式、

$$3\tau_n - \sigma_n = 6\rho \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

が成立する。解説では、⑧がこの問題での不変式と指摘されている。

5. 崇禅寺算額題・第一問の別解について

解答では、

$$\tau_n = (\tau_{n-1} + 2\rho) + 2\sqrt{\rho(2\tau_{n-1} - 3\rho)}$$

や

$$\sigma_n = (\sigma_{n-1} + 6\rho) + 2\sqrt{6\sigma_{n-1} + 9\rho^2}$$

などの2項間漸化式の一般項を求めることが一番の問題であった。解説では、帰納的な方法で求めている。

次に、 τ_n や σ_n を求めるのに直接的な方法がないのか、検討する。便利な予備定理2に対して、より根本的な予備定理1に戻ることから始める。

上の二つの漸化式は、予備定理1

$$2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) = (e_1 + e_2 + e_3 + e_4)^2 \dots\dots\dots \textcircled{1.1}$$

において、 e_1 から e_4 までの4個の曲率の内2個を定数 α 、 β (1個が負の値を取る場合もある)で与え、残りの2個を γ_n と γ_{n-1} として、 γ_n を求めることである。

即ち、 $\textcircled{1.1}$ を次のように書き換える。

$$2(\gamma_n^2 + \gamma_{n-1}^2 + \alpha^2 + \beta^2) = (\gamma_n + \gamma_{n-1} + \alpha + \beta)^2$$

ここから、 γ_n について解くと、

$$\gamma_n = \gamma_{n-1} + \alpha + \beta + 2\sqrt{(\alpha + \beta)\gamma_{n-1} + \alpha\beta} \dots \dots \dots \textcircled{9}$$

ここで、 $\textcircled{9}$ において、 $\sqrt{(\alpha + \beta)\gamma_{n-1} + \alpha\beta} = \delta_{n-1}$ とおくと $\gamma_n = \frac{\delta_n^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta}$ となり、

$\textcircled{9}$ を γ_n で表すと、

$$\frac{\delta_n^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\delta_{n-1}^2 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} + 2\delta_{n-1} + \alpha + \beta$$

両辺に $\alpha + \beta$ をかけて整理すると、

$$\boxed{\delta_n = \delta_{n-1} + \alpha + \beta} \dots \dots \dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{10}$ より、数列 $\{\delta_n\}$ は等差数列であるから、

$$\boxed{\delta_n = (\alpha + \beta)n + \delta_0} \dots \dots \dots \textcircled{11}$$

となり、条件を与えれば、 σ_n は求まる。従って、 p_n や q_n が $\textcircled{4}$ や $\textcircled{7}$ のように求まる。

6. 応用

(1) Descartes の円定理と Steiner の環円定理

Descartes の円定理は、Pappus—Steiner の環円定理の特別の場合でもある。

(Pappus—Steiner の環円定理) ⁽¹¹⁾

円 O 内に円 O' がある。これらに接しかつ互いに外接する円を順次画いて、初めの円に外接させることが一度できれば、どの位置からはじめても必ず上のようにすることができる。

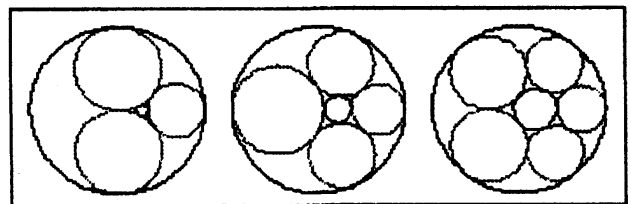


図 4

(注) 上図は Wolfram MathWorld の Steiner Chain に依っている。

そして、Pappus—Steiner の環円定理における作図可能性については、次の定理がある。

(Steiner の定理) ^(11')

上で、円 O, O' の半径を r, r' 、中心間距離を $OO' = d$ とする。2 円 O, O' に接し互いに外接する m 個の円が、円 O' の周りを n 回転して最初の円に外接したとすれば、

$$(r-r')^2 - 4rr' \tan^2 \frac{n\pi}{m} = d^2$$

デカルトの円定理は、Pappus-Steinerの環円定理の $m=3$ 、 $n=1$ の場合で、次の性質が成り立つ。

(性質1) 右のように、互いに外接する3つの円 C_1, C_2, C_3 に対して、それらを内接させる円を O 、それらと外接する円を O' とする。それぞれの曲率を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon, \varepsilon'$ とすると、
 $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ の値は、円 C_1, C_2, C_3 の位置によらず一定である。

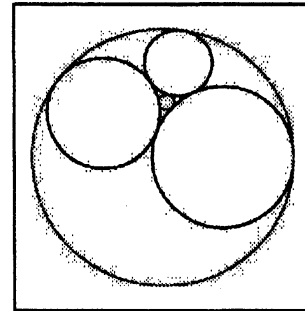


図5

(証明) Steinerの定理より、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1} \\ \varepsilon' &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1} \end{aligned}$$

二式を辺々引いて、

$$\boxed{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = (\varepsilon' - \varepsilon)/2}$$

(2) 置換量の不変性について

まず、 Y_n において α, β に該当するものを、 τ_n と σ_n について、それぞれ a, b と c, d とする。また、 Y_n における $\delta_n = \sqrt{(\alpha+\beta)Y_n + \alpha\beta}$ に該当するものを、 τ_n と σ_n について、それぞれ λ_n と μ_n とする。⑩から、別解で用いた二つの置換式、

$$\lambda_n = \sqrt{(a+b)\tau_n + ab} = (a+b)n + \lambda c \quad \dots \dots \dots \textcircled{12}$$

$$\mu_n = \sqrt{(c+d)\sigma_n + cd} = (c+d)n + \mu d \quad \dots \dots \dots \textcircled{13}$$

に注目すると、興味深い関係が得られる。

(性質2) a, b, c, d 及び λ_n, μ_n について、 $\boxed{(c+d)\lambda_n(a+b)\mu_n}$ の値は、一定である。

(証明) ⑫と⑬から n を消去すると、

$$(c+d)\lambda_n - (a+b)\mu_n = (c+d)\lambda_0 - (a+b)\mu_0 \dots \dots \dots \textcircled{14}$$

が示せる。

更に、⑭において右辺を0と置くと、次が得られる。

(性質2) の系

$$(c+d)\lambda_n = (a+b)\mu_n \Leftrightarrow (c+d)\lambda_0 = (a+b)\mu_0 \dots \dots \dots \textcircled{15}$$

(例)

これを第一問に適用すると、

$$\mu_n = 3\lambda_n \dots \dots \dots \textcircled{16}$$

という、簡明な不変式が得られる。この時、⑭の式の値は、当然0となっている。

(3) 置換式の幾何学的な意味について

この置換式 $\delta_n = \sqrt{(a+b)\gamma_n + \alpha\beta}$ はどのような意味をもっているのか？

Coxeter は、Steiner の公式中の量

$\delta = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1}$ の幾何学的な意味を次のように明らかにしている。(3)

右の図6で、互いに外接する3つの円(曲率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$) の3つの接点を通る円の曲率を δ とすると、 $\delta = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1}$ となるのである。

(注) 図6は、J.B.Wilker : Four Proofs of A Generalization of The Descartes Circle Theorem に依っている。

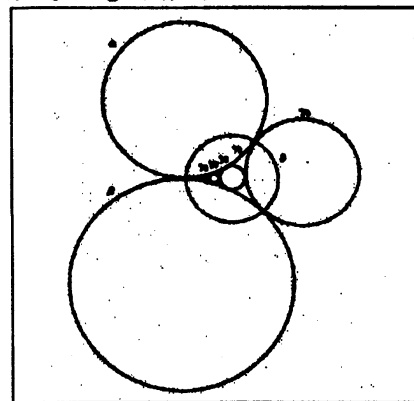


図6

それでは、既に得られた、

$$\delta_n = \delta_{n-1} + \alpha + \beta \dots \dots \dots \textcircled{10}$$

は、この立場からどのような意味があるのか？

円 δ が、3円 α, β, γ に直交している。このように直交円を次から次へと画いていくと、それらの曲率が等差数列になることを、⑩は示している。

また、(性質1) において、 $\varepsilon + \varepsilon' = 4\delta$ が成立する。

(4) 曲率の不変式の成立条件について

第一問で得られた不変式

$$3\tau_n - \sigma_n = 6\rho$$

は、解説の中で τ_n と σ_n の形を具体的に求めた結果、偶然得られたように見える。では成立の条件は何なのか、次に検討する。

そこで、⑬²と⑭²より n^2 を消去して、

$$\begin{aligned} & (a+b)(c+d)^2\tau_n(a+b)^2(c+d)\sigma_n + ab(c+d)^2 - cd(a+b)^2 \\ &= \{(c+d)\lambda_0 - (a+b)\mu_0\} \{2(a+b)(c+d)n + (c+d)\lambda_0 + (a+b)\mu_0\} \dots\dots\dots ⑰ \end{aligned}$$

⑰において、次の同値関係が得られる。

$$(a+b)(c+d)^2\tau_n(a+b)^2(c+d)\sigma_n + ab(c+d)^2 - cd(a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow (c+d)\lambda_0 = (a+b)\mu_0 \dots\dots\dots ⑱$$

更に、⑱の条件、

$$(c+d)\lambda_0 = (a+b)\mu_0 \dots\dots\dots ⑲$$

を曲率を用いて表すと、

$$(c+d)\tau_0 - (a+b)\sigma_0 = \frac{(ad-bc)(ac-bd)}{(a+b)(c+d)} \dots\dots\dots ⑳$$

実際、第一問では、

$$a=3\rho, b=-\rho, \tau_0=3\rho, \lambda_0=\sqrt{3}; \quad c=d=\sigma_0=3\rho, \mu_0=3\sqrt{3} \quad \text{であり、}$$

⑱や㉑で確かめれば、第一問の結果の成立が確かめられる。

(2) 置換した量の不変式 と (3) 曲率の不変式の成立条件 のまとめ

(2) の⑱と (3) の⑱は、同一の式⑱を含んでいる。そこで、これを以下にまとめる。

(性質 3)

$$\begin{aligned} & (a+b)(c+d)^2\tau_n(a+b)^2(c+d)\sigma_n + ab(c+d)^2 - cd(a+b)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & (c+d)\lambda_n = (a+b)\mu_n \Leftrightarrow (c+d)\lambda_0 = (a+b)\mu_0 \end{aligned}$$

7. 置換式 $\delta_n = \sqrt{(\alpha+\beta)\gamma_n+\alpha\beta}$ と Wilker の公式

Descartes の円定理を具体的に運用できる形にしたのが Steiner の公式であった。
J.B.Wilker は、第 n 番目の累円の半径を Steiner の公式によって導いた。更に、その公式の 4 つの証明法を明らかにしている。(12)

Wilker は、Steiner の公式で、 $\varepsilon_1=\alpha$, $\varepsilon_2=\beta$, $\varepsilon_3=\gamma_{n-1}$, $\varepsilon_4=\gamma_n$ とおいた

$$\gamma_n = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma_{n-1}} \quad \dots \dots \dots (d)$$

から γ_n を n で表すことに成功し、更に、4 通りの証明があることを明らかにしている。

(Wilker の公式)

$$\boxed{\gamma_n = \gamma_0 + 2n\delta + n^2(\alpha + \beta)}$$

その証明は、(1) Steiner の公式から出発するもの、(2) Descartes の円定理から出発するもの、(3) 反転法を用いるもの、の三つに大別される。そして、(1) が二分され計 4 通りの証明法があるが、紙面の都合で (1) Steiner の公式から出発する一方の方法のみ採り上げる。

R.G.Stanton⁽¹³⁾ の Version

$$\gamma_n = \alpha c_n^2 - \frac{b}{a} \quad c_n = \frac{\sqrt{b + \alpha\gamma_n}}{a} \quad \text{とすると、} \quad c_{n+1} = c_n + 1 \quad \text{となり、}$$

$$c_n = c_0 + n = \frac{\sqrt{b + \alpha\gamma_0}}{a} + n \quad \text{が得られる。この } c_n \text{ を元の式に置き換えて、}$$

$$\gamma_n = \gamma_0 + 2n\sqrt{\alpha\beta + (\alpha + \beta)\gamma_0} + n^2(\alpha + \beta) = \gamma_0 + 2n\delta + n^2(\alpha + \beta)$$

先述の別解における置換式は、この R.G.Stanton の方法と共通性がある。
即ち、R.G.Stanton の変換式で $a = 1$ とおけば、先述の置換式となる。

8. 終わりに

本稿では、デカルトの円定理とソディーの6球連鎖定理の内容と歴史を調べた。次に崇禪寺の算額の解法について検討し、別解を示した。その別解によって崇禪寺算額の不変式の成立条件を明らかにした。更に、H.S.M.Coxeter や J.B.Wilker の先行研究との関連も明らかにし、その位置付けを考察した。最後に、人々が円や球の接触問題に古くから興味・関心を覚え、如何に研究してきたのか、その歴史の一端を示した。

頭注；

- (1) 所在地は桐生市川内町2丁目651。元久二年(1205)法然上人の弟子智明上人により開創された。
- (2) 平成2年4月29日は、算額奉納式の後、境内の懐石料理・无量庵で60名以上の参加者で盛大な祝賀会が催された。
- (3) H.S.M.Coxeter: The Problem of Apollonius, The American Mathematical Monthly, Vol.75, No.1. (Jan.1968), p.5-15.
- (4) 深川英俊、ダン・ペドー: 「日本の幾何一何題解けますか?」、森北出版、1991、p.22-23
- (5) 証明は例えば、日経サイエンス社 HP 「算額の問題に挑戦してみませんか?」に、空間における反転は、前原潤: 円と球面の幾何学、朝倉書店、1998に詳しい。
- (6) 小林龍彦: 『探蹟算法』の曲率問題について、和算家の生涯と業績(道脇義正編著)収録、多賀出版、1985、p.213-228
- (7) 深川英俊、ダン・ペドー: 「日本の幾何一何題解けますか?」、森北出版、1991、p.118-121
- (8) 岩田至康: 幾何学大辞典(1)、槇書店、1971、p.384-385
- (9) 道脇義正: Descartesの円定理とSoddyの六球連鎖定理に関連して、和算家の生涯と業績(道脇義正編著)収録、多賀出版、1985、p.238-248
- (10) 大山誠: 崇禪寺算額題の解説、崇禪寺算額縁起とその解説(道脇義正)収録、群馬県和算研究会、1990、p.5-13
- (11) 岩田至康: 幾何学大辞典(1)、槇書店、1971、p.284 (11') 同上、p.284
- (12) J.B.Wilker: Four Proofs of A Generalization of The Descartes Circle Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol.76, No.3. (Jan.1968), p.278-282.
- (13) R.G.Stanton, H.C.Williams, C.R.Zarnke, A Packing Problem, Cand.Math.Bull. Vol.10 (1966) p.287-297.