

織方図作成における最適化問題のグラフによる定式化

愛知県産業技術研究所 松浦 勇 (Matsuura Isamu)

Aichi Industrial Technology Institute

愛知県産業技術研究所 安藤正好 (Andoh Masayoshi)

Aichi Industrial Technology Institute

名古屋大学大学院 情報科学研究科 柳浦睦憲 (Yagiura Mutsunori)

School of Information Science, Nagoya University

名古屋大学大学院 情報科学研究科 平田富夫 (Hirata Tomio)

School of Information Science, Nagoya University

1. まえがき

織物はたて糸とよこ糸が直角に交差して成り立っている。数千本のたて糸を平行にビームに巻き、そのビームを織機に仕掛ける準備工程を経て、製織工程を開始することができる。織機では、たて糸を上下 2 つの層に分離して、その間によこ糸を通すことにより織物が製造される。たて糸の 2 つの層への分け方を変化させることにより織物組織が形成される。たて糸を 2 つの層に分けることを開口といい、装着した開口装置の機構の違いにより、織機はタペット式織機、ドビー式織機、ジャカード式織機に分類される。資材用、衣料用など、単純な組織の織物はタペット式織機、または、ドビー式織機で製織され、インテリア用など、複雑な組織の織物はジャカード式織機を用いるのが一般的である。ドビー式織機は、ジャカード式織機と比較すると、たて糸の太さ、密度等の変更が容易で小ロット生産にも対応しやすいという利点がある。ドビー式織機で複雑な組織の織物を織ることができれば、新たな商品開発に寄与することができると思われる。

長目綜統とは、目が上下方向に長い綜統であり、通常、ジャカード織機で大きな模様の織物を織る際に用いるが、これをドビー織機に導入することにより、与えられた綜統枠枚数で製織可能な織物組織数を増加させることができる。文献[1-3]では千鳥模様や平織が主体であるものを対象に必要な綜統枠枚数を減らしている。我々は 3 枚の綜統枠を使う場合に、完全組織がたて糸 4 本、よこ糸 4 本からなる織物組織では、製織可能なものが約 2 倍に増えることを示した[4]。

本論文では、長目綜統を導入した場合に、与えられた織物組織を製織するのに必要な綜統枠枚数を最小化する方法を提案する。まず、必要な最小綜統枠枚数が、織物組織図をブール行列とみなしたときのブール階数 (Boolean rank) であることを示す。次に、行列のブール階数を求める問題が、2 部グラフのクリーク被覆問題に変換でき、さらに 2 部グラフのクリーク被覆問題がグラフ彩色問題に変換できることを示す。グラフ彩色問題は代表的な組合せ最適化問題であり、多くの発見的アルゴリズムが提案されている。これらのアルゴリズムを適用することで、普通綜統のみを使用する場合と比較して必要綜統枠枚数を減らせることを実験的に示す。

本論文の構成は次のようである。第 2 章で長目綜統の使い方と織方図の行列表現について述べる。第 3 章でグラフ彩色問題への変換とアルゴリズムについて述べ、第 4 章で実験結果を示す。第 5 章はまとめである。

2. 準備

2.1 製織のメカニズム

Fig. 1 に製織の原理を示す。綜統枠 (heald frame) に取り付けられたヘルドロッド (heald rod) が Fig. 2 に示す綜統 (heald) の耳 (end loop) に通されている。たて糸は綜統の目 (eye) に通されており、綜統の上下運動によって、2つの層に分けられ、開口部が形成される (本論文では綜統枠が上に動いて開口部を形成する上口開口を仮定する)。よこ糸は杼 (ひ, shuttle) によって開口部に通され、筈 (おさ, reed) によって織前に押し付けられる[5]。織機には、複数の綜統枠が装着されており、綜統は、いずれかの綜統枠に取り付けられている。そのため、同じ綜統枠の綜統を通るたて糸は同じ動きをし、たて糸の動きの種類は綜統枠枚数で決まる。通常、タペット式開口装置で使用できる綜統枠の枚数は 12 から 15 枚位であり、それ以上になるとタペット式では機構上困難になる。ドビー式開口装置の綜統枠枚数は 30 枚程度までで、それ以上の綜統枠枚数が必要な紋織のような極めて複雑な組織ではジャカード式開口装置が利用される。ジャカード式は扱える完全組織内のたて糸本数が数百本から 2 千本程度のものまで大きさの異なる各種のものがある。開口の機構はドビー式もジャカード式も原理は同じであるが、ドビー式が綜統枠 1 枚ごとの開口であるのに対し、ジャカード式は綜統の代わりに通糸 (つうじ) を用いる。通糸には綜統の目に相当する目がらすがあり取り付けられる。目がらすにたて糸を通し、通糸を個々に動かしてたて糸を開口する。

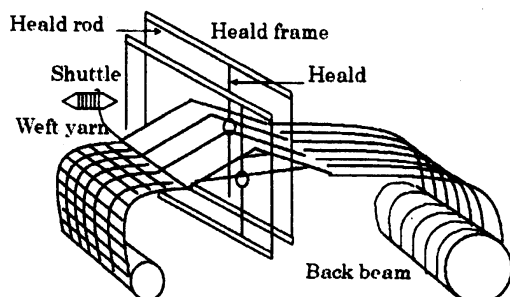


Fig. 1 Schematic explanation of a loom.

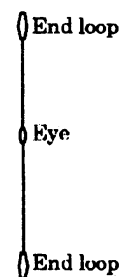


Fig. 2 A heald.

2.2 織物組織図と等価組織

織物における糸の交差の状態は、通常、たて糸本数、よこ糸本数で表される大きさをひとつの単位として、その繰り返しとなっている。その単位を完全組織と呼ぶ[6]。Fig. 3 の織物では、黒で示すたて糸 3 本、白色で示すよこ糸 3 本からなる完全組織の繰り返しとなっていることがわかる。糸の交差の状態は、織物組織図 (weave diagram, 以下、組織図と呼ぶ) で表現される。たて糸がよこ糸の上を通っている交差点を■で表し、よこ糸がたて糸の上を通っている交差点を□で表す。完全組織は同一織物内でも位置の取り方によって違って見える。これらを等価組織と称する。その中で、上下左右に平行移動すると同じ組織になるものは第一種等価組織と呼び、織物面に垂直な軸に 180 度回転する操作により等価となるものを第二種等価組織と呼ぶ[7]。Fig. 3 の織物の 3 通りの第一種等価組織を Fig. 4 に示す。

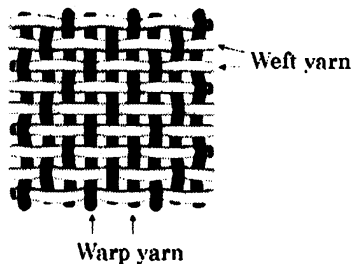


Fig. 3 Yarn interlacement in fabric.

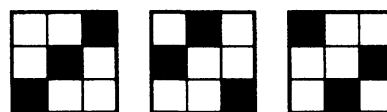


Fig. 4 Three equivalent weave diagrams.

2.3 織方図

織物組織を織るための、たて糸の綜統への通し方を示すのが綜統通図 (threading draft diagram) であり、開口装置 (綜統枠) の運動順序を示すのが紋枠図 (peg plan diagram) である。完全組織図, 綜統通図, 紋枠図を合わせて、織方図 (lifting plan diagram) と呼ぶ。Fig. 5 に織方図の例を示す。よこ糸が F 本, たて糸が E 本からなる完全組織で, 綜統枠枚数が H 枚であれば, 組織図は F 行 E 列, 紋枠図は F 行 H 列, 綜統通図は H 行 E 列となる。綜統枠は織前に近いものから順に, h_1 から h_H で表す。紋枠図はよこ糸 f_j が入るときに綜統枠 h_i が上昇する場合に, (h_i, f_j) を ■ で表す。綜統通図は, たて糸 w_i が第 j 綜統枠 h_j を通る場合に, (w_i, h_j) を × で表す。Fig. 5 の組織図の各列について見ると, 4 通りのパターンが存在するので, 綜統枠は 4 枚必要である。以降, 織方図を示す場合には, Fig. 5 のように, 組織図の左に紋枠図を描き, 組織図の下に綜統通図を描くこととする。

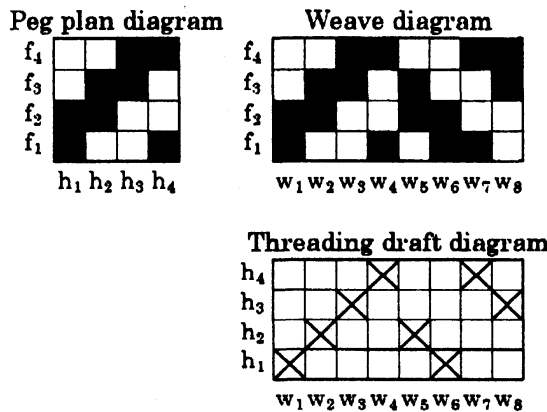


Fig. 5 A lifting plan diagram.

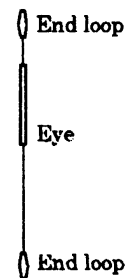


Fig. 6 A long-eye heald.

2.4 長目綜統を用いた製織

長目綜統とは, Fig. 6 に示す形状の, 目が上下方向に長い綜統であり, 通常, ジャカード織機で大きな模様を織る際に用いる [8]。ドビー織機において, 長目綜統と普通綜統を共に用いて, 必要綜統枠枚数を減らすことができる。実際, 渡辺 [1-3] は平織が主体である千鳥模様などを対象として, 必要綜統枠枚数が 2~4 割減らせることを示している。

普通の綜統を用いる製織では, たて糸はそれぞれ 1 本の綜統に通されるが, 長目綜統を導入した場合は, たて糸は複数の綜統に通される。織機を側面から見た 4 つの模式図を Fig. 7 に示す。各模式図において, 左側がよこ糸が入る織前側で, 右側がバックビーム側である。ここでは, 2 本の長目綜統 A, B を考え, 太線で示したたて糸は両方の長目綜統に通っているとする。Fig. 7 (a) に示すように, A, B とも上昇していない状態では, たて糸は静止している。A, B いずれか一方が上昇するとたて糸は開口する (同図 (b), (c))。綜統の目が長いので, 他方の綜統がたて糸の上昇を妨げることがない。A, B とも上昇した場合も, たて糸は開口する (同図 (d))。

長目綜統を使うことで綜統枠枚数を減らすことができる簡単な例を示す。普通綜統を使った場合の織方図を Fig. 8 に示す。組織図をみると, 4 本のたて糸はすべて異なる動きをするため, 普通綜統を使った場合には, 綜統枠が 4 枚必要である。Fig. 9 に長目綜統を併用した場合の織方図を示す。左から 1 番目のたて糸は第 1 綜統枠の綜統のみに通っているが, 2 番目のたて糸は第 1 綜統枠と第 2 綜統枠の 2 つの綜統を通っている。3 番目のたて糸は第 2 綜統枠, 第 3 綜統枠の 2 つの綜統を通っている。そして, 4 番目のたて糸は第 3 綜統枠の綜統のみに通している。これにより, 綜統枠が 3 枚で済むことがわかる。

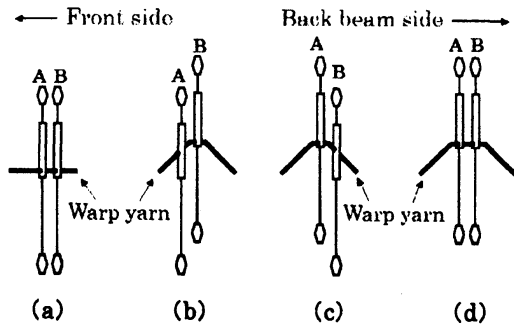


Fig. 7 Movements of long-eye healds in bottom closed shedding.

- (a) Both healds are still.
- (b) Heald B is ascend.
- (c) Heald A is ascend.
- (d) Both healds are ascend.

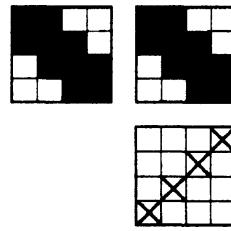


Fig. 8 The lifting plan diagram for normal healds.

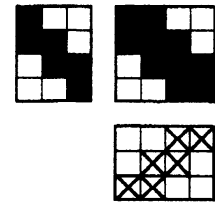


Fig. 9 The lifting plan diagram for long-eye healds.

2.5 織方図の行列表現

以下では、組織図、紋控図、綜統通図をそれぞれ行列で表す。組織図、紋控図における■と□をそれぞれ1と0で表し、綜統通図における×と□をそれぞれ1と0で表す。組織図、紋控図、綜統通図を行列で表したものをそれぞれW、P、Tと表記する。ただし、行列Tの行の順序は綜統通図の行のそれと逆にする。これは、これらの行列の間に $W=PT$ の関係が成立するためである(これについては後で詳しく述べる)。Fig. 5の織方図に対応する3つの行列をFig. 10に示す。

Fig. 10の行列のように、すべての成分が0または1である行列をブール行列と呼ぶ。ブール行列A、Bの和 $A+B$ と積 AB をそれぞれ通常の行列の和と積と同様に定義する。ただし、成分の計算はブール代数に従うものとする。つまり、+は論理和に、 \cdot は論理積に置き換えて演算を行う。行列Aの (i,j) 成分を A_{ij} で表す。Aのi行目の行ベクトルを A_i 、j列目の列ベクトルを A_j で表す。以降ではW、P、Tをブール行列とする。二つのn次行ベクトル $a=(a_1, \dots, a_n)$ と $b=(b_1, \dots, b_n)$ の論理和 $a \vee b$ とは、その成分ごとの論理和を成分とするn次行ベクトル $(a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n)$ のことである。列ベクトルの論理和も同様に定義する。

普通綜統のみを使用する場合、各たて糸はただひとつの綜統に通るのでTの列 T_j にはちょうどひとつの1が現れる。この1を T_{ij} とすると、Pの列 P_{i1} が、 T_j に対応するたて糸 w_j が通る綜統に対応している。つまり、 P_{i1} で表される綜統 h_i の動きにより、たて糸 w_j に所望の動きをさせている。このことから、組織図W、紋控図P、綜統通図Tの間には $W=PT$ の関係が成立する。与えられたWをPとTの積で表したとき、Pの列の数(=Tの行の数)が、Wで表される織物組織を製織するための綜統枠の数である。Fig. 5でみたように、この値は行列Wの異なるパターン数の列の数である。

長目綜統を導入する場合には、1本のたて糸が複数の長目綜統を通るので、Tには複数の1が現れる列が存在する。Tの列 T_j において、1が i_1 行目と i_2 行目に現れるとすると、列 P_{i_11} 、列 P_{i_21} の論理和が T_j に対応するたて糸 w_j の動きを表している。3つ以上の1が存在するTの列についても同様である。したがって、長目綜統を使用する場合も、普通綜統のみを使用する場合と同様に、組織図W、紋控図P、綜統通図Tの間には $W=PT$ の関係が成り立つ。

$$\begin{array}{c}
 P \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 W \\
 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 T \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Fig. 10 The lifting plan diagram represented by Boolean matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 11 A Boolean matrix of Boolean rank = 3.

2.6 ブール階数

A を m 行 n 列のブール行列とする。A のブール階数 (Boolean rank) とは、A を m 行 r 列のブール行列 B と r 行 n 列のブール行列 C のブール積 $A=BC$ として表現することができる最小の r のことをいう。Fig. 11 にブール階数が 3 であるブール行列の例を示す。ブール階数はシャイン階数 (Schein rank) とも呼ばれる [9] (以下では、ブール階数を単に階数と呼ぶ)。列ベクトルの集合 S があり、行列 A の任意の列を S の列ベクトルのいくつかの論理和で表現できるとする。そのような S の最小サイズが A の階数であると考えることができる。B に現れる各列が、 S の元である。同様に、行ベクトルの集合 S' があり、行列 A の任意の行を S' の行ベクトルのいくつかの論理和で表現できるとする。そのような S' の最小サイズが A の階数であると考えられる。C に現れる各行が、 S' の元である。したがって、組織図 W が与えられたとき、長目綜統を用いて製織する際に必要十分な綜統枚数を知るには W の階数を求めればよいことになる。

ブール行列の階数を求める問題は NP 困難であり [10], 厳密解を求めるための多項式時間アルゴリズムは未だ見つかっていない。そのため発見的アルゴリズムや近似アルゴリズムを使うのが実際的である。

3. グラフ彩色問題への変換

本章では、ブール行列の階数を求める問題が、代表的な組合せ最適化問題であるグラフ彩色問題に変換されることを示す。これは、グラフ彩色問題に関しては多くの発見的アルゴリズムが提案されており、それらを用いてブール行列の階数を求めることができるためである。

3.1 2部クリーク被覆問題への変換

グラフ $G=(V,E)$ が 2 部グラフであるとは、頂点集合 V が 2 つの集合 X, Y に分割され、 E の各辺は一方の端点を X に、他方の端点を Y にもっているときをいう。このような 2 部グラフを $B=(X,Y,E)$ と表記する。グラフ $G=(V,E)$ のクリークとは、頂点集合 V の部分集合 $V_s \subset V$ を頂点集合とする部分グラフで、 V_s の任意の 2 頂点が隣接しているものをいう。2 部グラフ $B=(X,Y,E)$ において、 X の部分集合 $X_s=\{x_1, \dots, x_n\}$, と Y の部分集合 $Y_s=\{y_1, \dots, y_m\}$ を頂点集合とする部分グラフ $B'=(X_s, Y_s, E_s)$ で、任意の 2 頂点 $x_i \in X_s, y_j \in Y_s$ が隣接しているものを 2 部クリークという。以降、グラフが 2 部グラフの場合にクリークと言えば、2 部クリークのことを指す。また、 B の部分グラフ $B''=(X, Y, E_s)$ を B' と同一視して、2 部クリークと呼ぶこともある。グラフ G の頂点の部分集合 V' で誘導される部分グラフ G' とは、 $G=(V', E')$ のことである。ここで、 $E'=\{(u,v) \in E \mid u,v \in V'\}$ である。

ブール行列の階数を求める問題は、2部グラフの最小クリーク被覆問題に変換することができる[11]。2部グラフ B のクリーク被覆とは、 B の2部クリークの集合 C で、 B のどの辺も C の少なくとも1つの2部クリークに含まれているものをいう。2部グラフの最小クリーク被覆問題とは、最小サイズのクリーク被覆 C を求める問題である[10]。行列 W から2部グラフへの変換は次のようにおこなわれる。 m 行 n 列のブール行列 W から、 m 個の頂点からなる頂点集合 $X=\{x_1, \dots, x_m\}$ と、 n 個の頂点からなる頂点集合 $Y=\{y_1, \dots, y_n\}$ を作る。 W_{ij} が1のとき、そしてそのときだけ、2部グラフの頂点 x_i と頂点 y_j を辺で結ぶ。こうしてできた2部グラフを B_w とする。 Fig. 12 に例を示す。

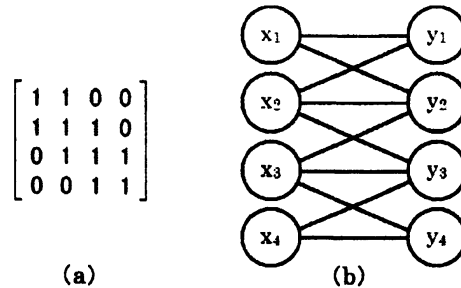


Fig. 12 A Boolean matrix W and the associated bipartite graph B_w .

(a) Boolean matrix W . (b) Bipartite graph B_w .

【定理1】ブール行列 W のブール階数は、2部グラフ B_w の最小クリーク被覆のサイズに等しい。

この定理を証明するために、まず、次の補題1と補題2を示す。

【補題1】 m 行 n 列のブール行列 W 、 m 行 r 列のブール行列 P 、 r 行 n 列のブール行列 T がある。このとき、 $W=PT$

ならば $W=\sum_{k=1}^r P_{\cdot k} T_{k \cdot}$ であり、逆に、 $W=\sum_{k=1}^r P_{\cdot k} T_{k \cdot}$ であるなら $W=PT$ である。

【補題1の証明】

$(PT)_{ij}=(\sum_{k=1}^r P_{\cdot k} T_{k \cdot})_{ij}$ であることを証明する。左辺 $=\sum_{k=1}^r P_{i,k} T_{k,j}=P_{i,1} T_{1,j}+\dots+P_{i,r} T_{r,j}$ なので、左辺=1となる

とき、ある $s(1 \leq s \leq r)$ が存在して、 $P_{i,s} T_{s,j}=1$ である。よって、 $P_{i,s}=T_{s,j}=1$ であり、これより、 $(P_{\cdot s} T_{s \cdot})_{ij}=1$ である。右辺 $=(P_{\cdot 1} T_{1 \cdot}+\dots+P_{\cdot r} T_{r \cdot})_{ij}$ であるので、 $(P_{\cdot s} T_{s \cdot})_{ij}=1$ より、右辺=1である。

逆に、右辺=1とする。このとき、ある $t(1 \leq t \leq r)$ が存在して、 $(P_{\cdot t} T_{t \cdot})_{ij}=1$ である。これより、 $P_{i,t}=1$ かつ $T_{t,j}=1$ であるので、左辺=1となる。 ■

m 行 1 列の行列 $A=(a_1, \dots, a_m)^T$ と 1 行 n 列の行列 $B=(b_1, \dots, b_n)$ の積 AB をクロスベクトルと呼ぶ。クロスベクトル AB を $c(A,B)$ と書く。つまり、 $c(A,B)$ は (i,j) 成分を $a_i b_j$ とする m 行 n 列の行列である。補題1より、 W のブール階数は W を最小数のクロスベクトルの和で表したときのクロスベクトルの数に一致する。

二つの行列 A 、 B の行数、列数がともに等しく、かつ、すべての (i,j) 成分について $A_{i,j} \leq B_{i,j}$ が成り立つ場合に $A \leq B$ と表す。

【補題2】 $M \leq W$ で、かつ階数が1であるブール行列 M を変換した B_M は2部グラフ B_w の2部クリークである。

逆に、 B_w の2部クリーク B_c に対応するブール行列 $C \leq W$ を考えると、その階数は1である。

【補題2の証明】

$M \leq W$ で、かつ階数が1である行列 M を考える。階数の定義から M は m 行 1 列の行列 $A=(a_1, \dots, a_m)^T$ と 1 行 n 列の行列 $B=(b_1, \dots, b_n)$ の積で表される。 $R=\{i | a_i=1, 1 \leq i \leq m\}$ 、 $C=\{j | b_j=1, 1 \leq j \leq n\}$ とすると、 $M_{i,j}(i \in R, j \in C)$ はすべて1であるため、 M から変換した2部グラフ B_M は B_w の2部クリークとなっている。

B_w の 2 部クリーク $H=(X',Y',E')$ を考える. $B_c=(X,Y,E)$ とすると, 任意の 2 頂点 $x_i \in X', y_j \in Y'$ は隣接しているため, 変換して B_c になるようなブール行列 $C \leq W$ では, $\{C_{ij} | x_i \in X', y_j \in Y'\}$ の要素はすべて 1 である. そのため, C の列にはすべての成分が 0 である列を除くと, 1 通りのパターンしか存在しない. この列を A とする. 同様に, C の行にはすべての成分が 0 である行を除くと, 1 通りのパターンしか存在しない. この行を B とすると, $C=c(A,B)$ と表すことができる. つまり, $C \leq W$ で, c の階数が 1 である. ■

【定理 1 の証明】

ブール行列 W の階数を r とし, 2 部グラフ B_w の最小クリーク被覆のサイズを b とする. 階数の定義から m 行 n 列のブール行列 W は m 行 r 列のブール行列 P と r 行 n 列のブール行列 T の積で $W=PT$ と表すことができる.

よって, 補題 1 より $W = \sum_{i=1}^r P_i T_i$ と表すことができる. 階数の定義からクロスベクトル $P_i T_i$ の階数は 1 である. これらの r 個のクロスベクトルに対応する r 個の 2 部グラフを考える. 補題 2 より階数が 1 である行列は B_w では 2 部クリークに対応する. よって, B_w のすべての辺は r 個の 2 部クリークで被覆できることになり, $b \leq r$ が成り立つ.

$Q=\{Q_1, \dots, Q_b\}$ を B_w における最小クリーク被覆とする. 補題 2 より, B_w の 2 部クリーク Q_i に対応するブール行列 $M_{Q_i} \leq W$ は階数が 1 である. 階数の定義から, M_{Q_i} はクロスベクトルで $M_{Q_i}=c(A_i, B_i)$ と表すことができるので, W は b 個のクロスベクトルの和 $W = \sum_{i=1}^b c(A_i, B_i)$ で表すことができる. よって, 補題 1 より AB と表すことができる. ただし, A は列ベクトル A_1, \dots, A_b をこの順に並べた n 行 b 列の行列, B は行ベクトル B_1, \dots, B_b をこの順に並べた b 行 m 列の行列である. よって, $r \leq b$ である. 以上から $r=b$ となる. ■

3.2 2 部グラフのクリーク被覆問題からクリーク分割問題への変換

グラフ G のクリーク分割とは, G のクリークの集合 C で, G のどの頂点も C のちょうど 1 つのクリークに含まれているものをいう. 最小クリーク分割問題とは, 与えられたグラフ G に対して最小サイズのクリーク分割 C を求める問題である [10].

2 部グラフ $B=(X,Y,E)$ からグラフ $G_B=(V_B, E_B)$ への変換を次のように行う [12]. B の辺 e_i を G_B の頂点とみなす. つまり $V_B=E$ とし, B において異なる 2 つの辺 e_i, e_j がひとつの 2 部クリークに含まれるとき, そして, そのときだけ G_B において頂点 e_i と頂点 e_j を隣接させる. Fig. 13 に例を示す. たとえば, B において e_1 と e_2 の端点である x_1, y_1, y_2 の 3 つの頂点で誘導される部分グラフは e_1 と e_2 を含む 2 部クリークである. そのため, G_B において e_1 と e_2 が隣接する.

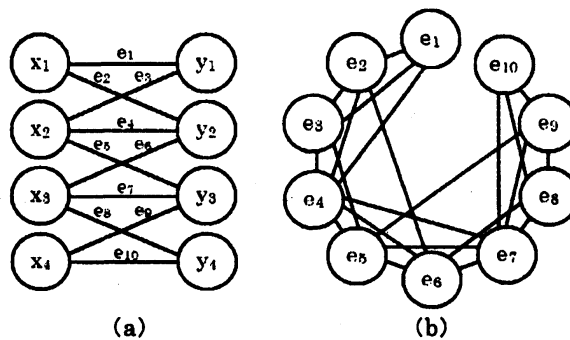


Fig. 13 A bipartite graph B and the associated graph Gb.
 (a) Bipartite graph B. (b) Graph Gb.

【定理 2】 2部グラフ B の最小クリーク被覆のサイズは、グラフ G_B の最小クリーク分割のサイズに等しい。

【定理 2 の証明】

2部グラフ B の最小クリーク被覆のサイズを b 、グラフ G_B の最小クリーク分割のサイズを p とする。

$Q=(X_Q, Y_Q, E_Q)$ を B における 2部クリークとする。 G_B の構成法より、 G_B において E_Q に対応する頂点の集合で誘導される部分グラフ G_Q はクリークである。 $Q=\{Q_1, \dots, Q_b\}$ を B における最小 2部クリーク被覆とする。 Q_i に対応する G_B のクリークを G_{Q_i} として、 Q に対応する G_B のクリーク集合を $C=\{G_{Q_1}, \dots, G_{Q_b}\}$ とする。 B の任意の辺は Q の少なくともひとつの 2部クリーク Q_i に含まれているため、 G_B の任意の頂点は C の少なくともひとつのクリーク G_{Q_i} に含まれている。 G_B において複数のクリークに含まれる頂点が存在する場合には、その頂点がただひとつのクリークに含まれるようにする。クリークから頂点を除去しても残りのグラフはやはりクリークなので、このようにして G_B におけるクリーク分割 $\{G_{Q_1}, \dots, G_{Q_b}\}$ をつくることができる。そのため、 $p \leq b$ が成り立つ。

次に、 $p \geq b$ を示す。まず、次の補題 3 を示す。

【補題 3】 C を G_B の極大クリークとし、その頂点集合を V_C とする。これに対応する B の辺集合を E_C とする。このとき、 B の辺集合 E_C のすべての辺はひとつの 2部クリークをなす。

【補題 3 の証明】

E_C が 2部クリークになっていないとする。 B において、辺集合 E_C の端点の集合を $X_{E_C} \subset X$ と $Y_{E_C} \subset Y$ とする。いま、2頂点 $x \in X_{E_C}$ 、 $y \in Y_{E_C}$ の間に辺がないとする。 $x \in X_{E_C}$ なので、 x に接続する辺 $e_1 \in E_C$ が存在する。同様に、 y に接続する辺 $e_2 \in E_C$ が存在する。 e_1 と e_2 に対応する G_B の 2頂点は C に属するので隣接している。よって、 B において e_1 と e_2 はひとつの 2部クリークに含まれ、 x と y は隣接していなければならない。つまり、辺 $(x, y) \in E$ である。この議論より、 B において X_{E_C} の頂点と Y_{E_C} の頂点の間にはすべて辺が存在する。この辺集合を E_C' とすると $E_C \subset E_C'$ である。 G_B の構成法より、 E_C' に対応する G_B の頂点はクリークをなし、 C を真に含む。これは C が極大であることに反する。よって、 B の辺集合 E_C に含まれるすべての辺はひとつの 2部クリークをなす。 ■

$\{C_1, \dots, C_p\}$ を G_B の最小クリーク分割とする。各クリーク C_i に対し、それを含む極大クリーク C_i' を考えることで、 $\{C_1, \dots, C_p\}$ に対応して、極大クリークによる頂点被覆 $\{C_1', \dots, C_p'\}$ が存在する。補題 3 より、 $\{C_1', \dots, C_p'\}$ に対応して、 B において 2部クリーク被覆 $\{B_{G_1}, \dots, B_{G_p}\}$ が存在し、 $b \leq p$ が成り立つ。以上から $b=p$ が成立する。 ■

3.3 クリーク分割問題からグラフ彩色問題への変換

グラフ G の彩色とは、隣接する頂点に異なる色を割り当てるという条件で、すべての頂点に色を割り当てるとをいう。グラフ彩色問題とは与えられたグラフ G を最小の色数で彩色する問題である[10]。そのときの色数を G の彩色数と呼び $\chi(G)$ で表す。グラフの頂点集合の部分集合で、任意の 2頂点が隣接していないものを安定集合と呼ぶ。グラフ $G=(V, E)$ の補グラフとは、辺の集合として E に含まれていない辺全体の集合 E^c をもつグラフ $G^c=(V, E^c)$ である。グラフ G の補グラフ G^c の補グラフを考えると、それは G である。グラフ $G=(V, E)$ においてクリークを構成する頂点集合 $V' \subset V$ は、補グラフ G^c においては安定集合となる。逆に G の安定集合は補グラフ G^c ではクリークを構成する。安定集合はグラフ彩色において同じ色を割り当てる頂点集合となることができる。これらのことから、グラフ G の最小クリーク分割のサイズは補グラフ G^c の彩色数 $\chi(G^c)$ に等しい。

3.4 グラフ彩色アルゴリズム

グラフ彩色問題はブール行列の階数を求める問題と同じく NP 困難であり、規模の大きな問題に対して実用的

な時間で厳密解を求めるアルゴリズムは未だ見つかっていない。提案されている発見的アルゴリズムの主なものとしては LF 法, LFI 法[13], RLF 法[14], DSATUR 法[15], DSI 法[15]などがある。

LF 法は次数の降順に、頂点に対して割り当て可能な最小の色番号を割り当てるアルゴリズムである。LF 法に交換法[13]を組み込んだのが LFI 法である。交換法とは、新しい色番号を導入する必要がある場合に、既に色番号を割り当てた頂点の色番号を交換し、新たな色番号の導入を遅らせる方法である。

RLF 法は次のようなアルゴリズムである。はじめに次数が最大である頂点に色番号 1 を割り当てる。さらに、ある基準で選んだ頂点に色番号 1 を割り当てる。これをくり返し、色番号 1 を割り当てることができる頂点がなくなったら、彩色済みの頂点と、それに接続する辺を除去し、残りのグラフに対して色番号 2 で同様の処理を行う。すべての頂点が彩色されるまで、色番号を増加させてこの操作を繰り返す。

頂点 v の飽和次数とは、彩色アルゴリズムの実行過程において、 v に隣接し、かつ既に彩色された頂点において割り当てられた色番号の種類をいう。DSATUR 法は、彩色されていない頂点の中で飽和次数が最大の頂点に、割り当て可能な最小の色番号を割り当てる。DSATUR 法に交換法を組み込んだのが DSI 法である。

これらのアルゴリズムを実装して実験をおこなったところ、最も性能が良かったアルゴリズムは DSI 法であった。そこで 4 章で述べる実験には DSI 法を用いた。

グラフ彩色問題の解からブール行列 P , T を求める方法は次のとおりである。グラフ彩色アルゴリズムにより同じ色番号を割り当てられた頂点集合は、2 部クリーク被覆問題のひとつの 2 部クリークをなす辺集合に対応する。2 部クリーク被覆の各 2 部クリークに対応させて、階数が 1 であるブール行列を作ることができる。これにより、グラフ彩色問題において r 色で彩色可能な解が得られれば、 m 行 n 列のブール行列 W を、 m 行 r 列のブール行列 P と r 行 n 列のブール行列 T の積で表すことができる。

4. 実験

文献[16-24]に掲載されている 747 種類の組織を使い実験をおこなった。これらの組織のたて糸本数は 4~76 本の範囲、よこ糸本数は 4~72 本の範囲である。普通綜統のみを使用する場合、与えられた組織図の列数と等しい綜統枚数があれば、その組織を製織することが可能であるが、組織図の中に同じ列パターンが複数含まれているときには、綜統枚数を減らすことができる。つまり、同じ列パターンに対応するたて糸は同じ綜統枚で制御できるので、組織図の中の異なる列パターンの数の綜統枚で製織することができる。

DSI 法は発見的アルゴリズムであるため、必要綜統枚数の最小値が得られる保証はない。そこで、組織図の異なる列パターンの数と、DSI 法を用いて求めた彩色可能数を比較し、小さい方を採用し織方図を作成した。

4.1 実験結果

織機が装着している綜統枚数毎の製織可能な織物組織数を表 1 に示す。表 1 より 747 種類の織物組織のうち、8 枚の綜統枚が装着された織機であれば製織可能なものは 509 種類から 577 種類に増加する。また、16 枚の綜統枚が装着された織機であれば製織可能なものは 732 種類から 737 種類に増加し、長目綜統導入の効果を確かめることができた。表 2 では、長目綜統を導入した場合の必要綜統枚数を、普通綜統のみを使用した場合と比較した。表 2 から、普通綜統のみ使用時の必要綜統枚数が増加するにつれて、綜統枚数を減らすことができた織物組織の割合が概ね増加することがわかる。つまり、多くの綜統枚数が必要である複雑な組織ほど、長目綜統導入の効果が大きい。

製織工場で使われているドビー式織機で 24 枚の綜統枚が装着されているものはまれで、8 枚または 16 枚の綜

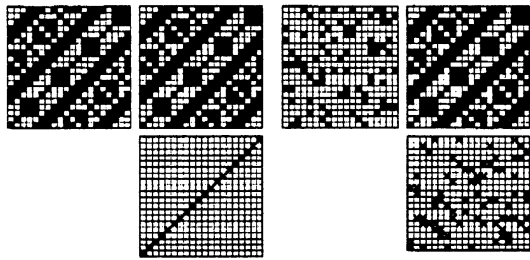
統枠が装着されたものが多い。16枚を超える綜統枠枚数が必要な場合には、ジャカード式織機が用いられることもある。そこで、普通綜統のみ使用時に必要綜統枠枚数が17枚以上であった15種類の組織図に対する実験結果について検討する。必要綜統枠枚数を減少させることができたのは、このうち8種類で、それらについて普通綜統のみを使用した場合の織方図と、長目綜統を導入した場合の織方図を Fig. 14 に示す。組織図の列数 p 、組織図の異なる列パターンの数 q 、提案アルゴリズムにより得られた必要綜統枠枚数 r を図のキャプション中に ($p \rightarrow q \rightarrow r$) の形で表記した。18種類の組織図のうち、必要綜統枠枚数を減少させることができなかったのは7種類で、それらの織方図を Fig. 15 に示す。

Table 1 The number of weave patterns that can be weaved with a loom with/without long-eye healds.

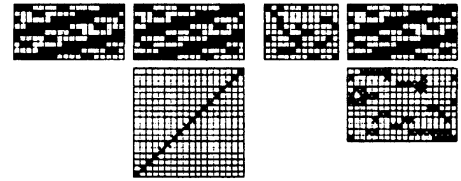
Number of heald frames	Number of weave patterns	
	Normal healds only	With Long-eye healds
8	509	577
16	732	737
24	747	747

Table 2 Decrease in the number of required heald frames.

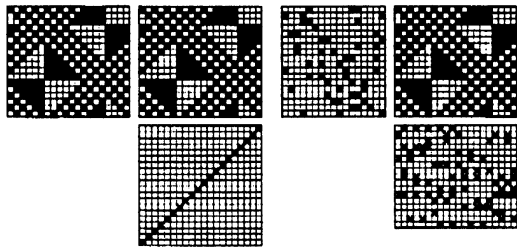
Number of required heald frames (normal healds only)	Number of weave patterns	Number of required heald frames (long-eye healds)	Average of the differences in the number of heald frames	Number of weave patterns for which our algorithm decreases the number of heald frames
3~4	171	3~4	-0.10	17
5~8	338	3~8	-0.68	118
9~12	153	4~12	-1.57	89
13~16	70	7~16	-2.46	40
17~24	15	11~24	-2.20	8



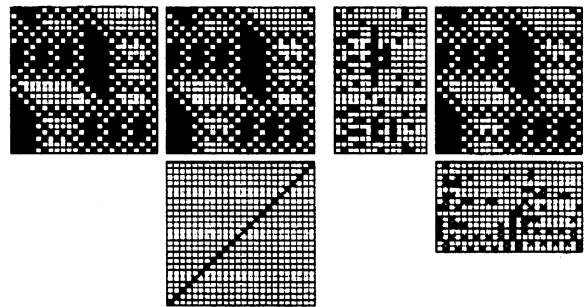
(a) Figured twill [17, p.57] (20→20→19)



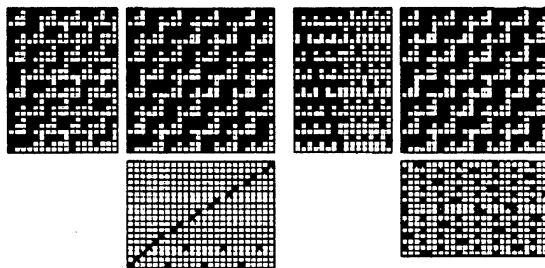
(b) Reclined twill [18,p.205] (18→18→12)



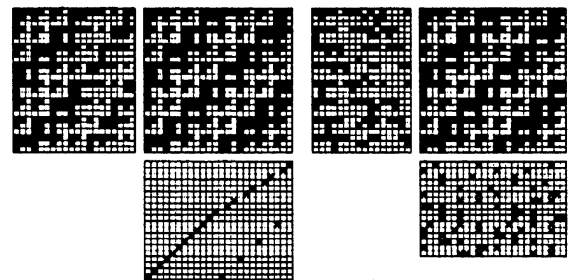
(c) Honeycomb weave [18,p.225] (20→20→17)



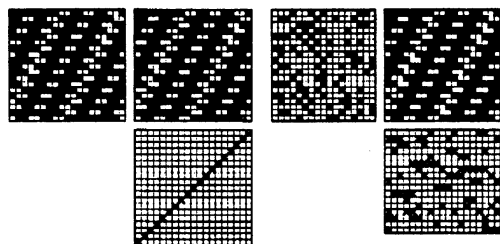
(d) Grecian weave [18,p.227] (24→24→15)



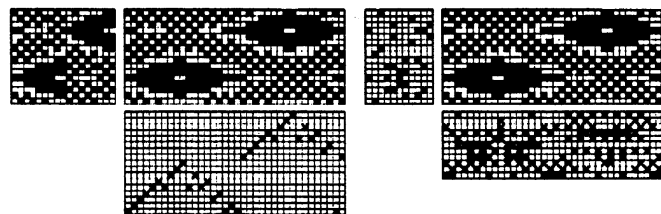
(e) Triple weave [19,p.14] (24→18→16)



(f) Triple weave [19,p.14] (24→20→16)



(g) Diagonal cord weave [19,p.80] (19→19→17)

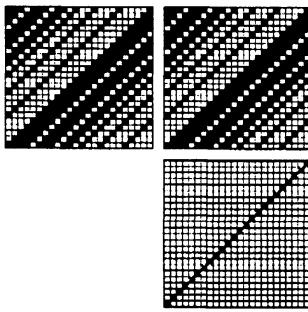


(h) Figured weave [23,p.48] (36→17→11)

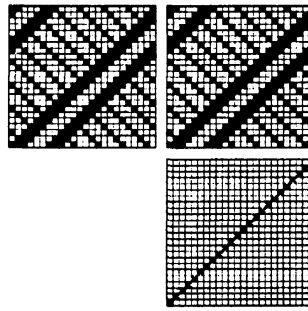
Fig. 14 Eight lifting plan diagrams on which introducing long-eye healds has an effect.

(left: Only normal healds are used, right: Long-eye healds are introduced.)

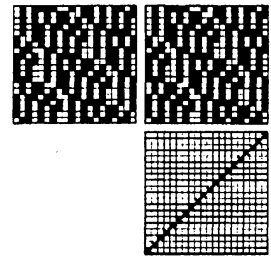
(The number of columns of weave diagram. → The number of column patterns of weave diagram. → The number of required heald frames calculated with proposed algorithm.)



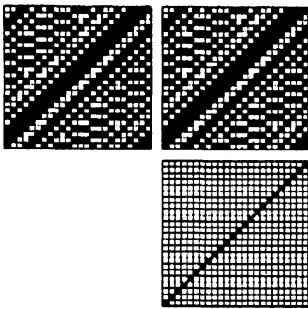
(a) Shaded twill [17,p.57]



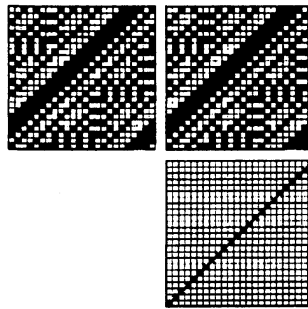
(b) Double twill [17,p.56]



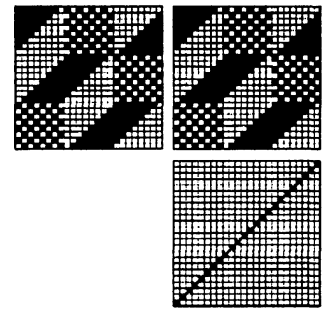
(c) Corkscrew twill [18,p.215]



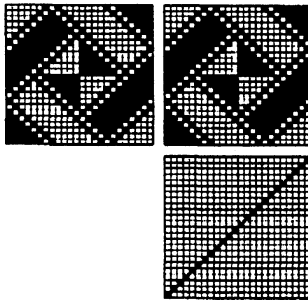
(d) Figured twill [18,p.216]



(e) Figured twill [18,p.216]



(f) Honeycomb weave [18,p.225]



(g) Grecian weave [18,p.227]

Fig. 15 Seven lifting plan diagrams on which introducing long-eye healds does not have effect.

4.2 考察

Fig. 14(b)の組織は、8本のよこ糸からなっている。Pを単位行列、TをWと同一にすることで $W=PT$ の関係が成り立ち、8枚の綜統枠で製織可能である。しかし、我々の提案アルゴリズムはそのような解を見つけることができなかつた。それは、使用したグラフ彩色アルゴリズムが発見的アルゴリズムであり、必ずしも最適解を見つけられないためである。より性能の良いグラフ彩色アルゴリズムを使うことでこのようなことは、起こりにくくなると考えられる。

綜統枠枚数を減らすことができなかつた Fig. 15(a)と、2枚だけ減らすことができた Fig. 14(g)は共に、組織のすべての列が、ある列パターンを列方向に循環シフトしたパターンである。これは、行に関しても同様である。与えられた組織が長目綜統を導入することで、綜統枠枚数を減らすことができない、または、大きく減らすことができないのは、組織のこのような性質と深く関係していると考えられる。

5. 結 言

与えられた組織図の織物を、長目綜統を導入して製織する際に必要な綜統枠枚数を最小化するアルゴリズムを提案した。長目綜統を導入したときに必要な最小綜統枠枚数が、組織図に対応するブール行列のブール階数であることを示した。ブール階数を求める問題がグラフ彩色問題に変換でき、グラフ彩色問題の解から織方図を求めることができることを示した。実際に織物として生産されている組織に対して実験を行い、必要綜統枠枚数を大きく減らせる組織図があることを示した。

References

- [1] Watanabe K (1964) Japanese Official Gazette of Patent, Showa 39-000185
- [2] Watanabe K (1964) Japanese Official Gazette of Patent, Showa 39-000186
- [3] Watanabe K (1965) Japanese Official Gazette of Utility Model, Showa 40-021018
- [4] Matsuura I, Andoh M, Hirata T (2007) J Text Eng, 53, 69-77
- [5] Japan Association of Specialists in Textiles and Apparel (2001) "Sen-i Seihin no Kiso-chishiki (1)", Chap 3, Japan Association of Specialists in Textiles and Apparel, Tokyo
- [6] The Text Mach Soc Japan (2002) "Sen-i Kougaku(IV)", Chap 1, The Text Mach Soc Japan, Osaka
- [7] Takatera M, Shinohara A (1986) Sen-i Gakkai Nenzhi Taikai Kenkyu Happyoukai Kouen Youshisyu, 194
- [8] Ministry of Education (1960) "Syokki3", Chap 3, Zitsumu Syuppan, Tokyo
- [9] Kim KH (1982), "Boolean Matrix Theory and Applications", Marcel Dekker, New York
- [10] Garey MR, Johnson DS (1979) "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness", W.H. Freeman, San Francisco
- [11] J. Orlin (1977) Proceedings Series A, Mathematical sciences / Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 80, 406-424
- [12] Simon HU (1990) SIAM Journal on Discrete Mathematics, 3, 294-310
- [13] Matula DW, Marble G, Isaacson JD (1972) "Graph Theory and Computing", pp109-122 Academic Press, New York
- [14] Leighton FT (1979), Journal of Research of the National Bureau of Standards, 84, 489-506
- [15] Brelaz D (1979), Communications of the ACM, 22, 251-256
- [16] Ohno I (1953) "Keorimono Ziten" Maruzen, Tokyo
- [17] Kuze E (1956) "Saishin Keori Gijutsu to Keorimono Kaisetsu", Nihon Youmou Kyougyou Rengoukai, Tokyo
- [18] Ministry of Education (1958) "Syokki1", Zitsumu Syuppan, Tokyo
- [19] Ministry of Education (1959) "Syokki2", Zitsumu Syuppan, Tokyo
- [20] Inoue T (1965) "Gendai Sen-i Ziten", Sen-i Journal, Tokyo
- [21] Terada S (1979) "Yasashii Orimono no Kaisetsu", Sen-i Kenkyuusya, Tokyo
- [22] Ichinomiya Fashion Design Center (2000) Textile & Fashion, 17
- [23] Ichinomiya Fashion Design Center (2001) Textile & Fashion, 18
- [24] Ichinomiya Fashion Design Center (2002) Textile & Fashion, 19