数理解析研究所講究録
第 1585 巻 2008 年 120-134

多重ファジィ積分とその応用

Multidimensional fuzzy integral and its application

桐朋学園, 早稲田大学・産業経営研　成川康男 (Yasuo NARUKAWA)

Toho Gakuen, IRBA　Waseda University

スペイン科学研究機構 人工知能研究所ヴィセンス トッラ (Vicenc Torra)

IIIA Consejo Superior de Investigaciones Cientificas

1　はじめに

非加法的集合関数は様々な名称で呼ばれ、非加法的測度 [4] で定着しつつある。非加法的測度論では最も一般的なものでは、空集合の値が 0 であることと単調性のみ仮定し、連続性も仮定していない。ここでは、非加法的測度に下からの連続性を仮定し、これをファジィ測度と呼ぶことにする。

非加法的測度に関する積分については通常の Lebesgue 積分の一般化である Choquet 積分 [2, 10] と関数と測度の順序関係のみ決まる菅野積分 [14] が一般的に用いられる。室伏 [11] は Choquet 積分と菅野積分を一般化した積分を研究している。本論文ではこれを一般化されたファジィ積分と呼ぶことにする、

通常の Lebesgue 積分論では Fubini の定理があり、重積分における積分順序の交換についてはある条件のもとで成立することが示されている。しかし、非加法的測度では加法性が成り立たないため、どこにどのような条件を付け加えて Fubini の定理に似た定理

を成立させるのが良いか確定しているとはいえない。町田 [9] は可測集合の直積の集合上の非加法的測度に関する Choquet 積分について積分の順序交換が成り立つことを示した。Ghirardato[5] は可測関数に制限をつけて Choquet 積分の順序交換について論じている。

本論文では一般化されたファジィ積分の重積分について論じる。初めに可測集合の直積の集合での積分の順序交換について論じ、次にファジィ測度の定義域の拡張について論じる。また最後に、多重ファジィ積分の応用として、研究者の index による評価の定式化を紹介する。

2 Preliminaries

はじめにこの章では、本論分で用いられる基本的な定義、定理を紹介する。

定義 2.1. X を全体集合とし、$\mathcal{X}$ は 2^X の部分集合とする。$(X,\mathcal{X})$ をファジィ可測空間と呼ぶことにする。また、関数 $f:X\to\mathbb{R}^+$ が $\mathcal{X}$-可測であるとは、$\{x|f(x)\geq a\}\in\mathcal{X}$ であるときをいう。

定義 2.2. [3] 2 つの $\mathcal{X}$ 可測な関数 f と g が共単調 (comonotonic) であるとは, 任意の $x,y\in X$ に対して $f(x)<f(y)\Rightarrow g(x)\leq g(y)$ が成り立つことをいう。

定義 2.3. [14] $(X,\mathcal{X})$ をファジィ可測空間とする。次の性質を満たす実数値集合関数 $\mu:\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ を $(X,\mathcal{X})$ 上のファジィ測度 μ という。

(1) $\mu(\emptyset)=0$, $\mu(X)=k$ ここで、 $k\in(0,\infty]$

(2) $A\subset B,\ A,B\in\mathcal{X}$ のとき $\mu(A)\leq\mu(B)$

(3) $A_n\uparrow A$ であるとき、 $\mu(A_n)\uparrow\mu(A)$

μ を $(X,\mathcal{X})$ 上のファジィ測度 μ とするとき、$(X,\mathcal{X},\mu)$ をファジィ測度空間　という。

定義 2.3(3) の性質を下からの連続性という。

次に、ファジィ測度に関する積分として、Choquet 積分と菅野積分を定義しよう。

定義 2.4. *[2, 10, 14]* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ をファジィ測度空間とし、f を $\mathcal{X}$-可測関数とし、$\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$ とおく。

(1) f の μ に関する Choquet 積分は

$$(C)\int f d\mu := \int_0^\infty \mu_f(r)dr,$$

で定義される。

(2) f の μ に関する菅野積分は

$$(S)\int f d\mu := \sup_{r\in[0,k]} [r \wedge \mu_f(r)]$$

で定義される。

以下で、Choquet 積分や菅野積分の一般化としての、Generalized Fuzzy 積分を定義する。

定義 2.5. 擬加法 *(A pseudo addition)* $\oplus$ とは $[0, k]$ 上の二項演算で次の条件を満たすものを言う。

(A1) $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$

(A2) $x \leq u$ かつ $y \leq v$ のとき $x \oplus y \leq u \oplus v$

(A3) $x \oplus y = y \oplus x$

(A4) $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

(A5) $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow x_n \oplus y_n \to x \oplus y.$

擬乗法 *(A pseudo multiplication)* $\boxdot$ とは $[0, k]$ 上の二項演算で次の条件を満たすものを言う。

(M1) $x \boxdot 1 = 1 \boxdot x = 1$

(M2) $x \leq u$ かつ $y \leq v$ のとき $x \boxdot y \leq u \boxdot v$

(M3) $x \boxdot y = y \boxdot x$

(M4) $(x \boxdot y) \boxdot z = x \boxdot (y \boxdot z)$

(M5) $x_n \to x, y_n \to y \Rightarrow x_n \boxdot y_n \to x \boxdot y.$

擬加法が *strict* であるとはそれが連続で狭義に単調増加であることをいう。また、擬加法 $\oplus$ がアルキメデス的であるとは すべての $x \in (0,1)$ に対して $x \oplus x > x$ であるときをいう。

例 1.

(1) The maximum operator $x \vee y$ はアルキメデス的でない擬加法である。

(2) 代数和 $x \dot{+} y := x + y$ はアルキメデス的な擬加法である。

(3) 菅野演算 $x +_\lambda y := 1 \wedge (x + y + \lambda xy)$ $(-1 < \lambda < \infty)$ はアルキメデス的な擬加法である。

アルキメデス的な擬加法では、下記の加法表現定理が基本的である。

命題 2.6. [8] もしも擬加法 $\oplus$ がアルキメデス的であるとき、狭義単調増加な連続関数 $g : [0,k] \to [0,\infty]$ が存在し、$x \oplus y = g^{(-1)}(g(x) + g(y))$ が成り立つ。ここで、$g^{(-1)}$ は

$$g^{(-1)}(u) := \begin{cases} g^{(-1)}(u) & \textit{if} \quad u \leq g(k) \\ k & \textit{if} \quad u > g(k). \end{cases}$$

で定義される g の擬減法である。

関数 g は $\oplus$ の *additive generator* と呼ばれる。

定義 2.7. m をファジィ可測空間 $(X, \mathcal{X})$ 上のファジィ測度とする。m が $\oplus$－分解可能であるとは $A \cap B \neq \emptyset$ である $A, B \in \mathcal{X}$ に対して $m(A \cup B) = m(A) \oplus m(B)$ が成り立

つときをいう。⊕− *decomposable* ファジィ測度 m が *normal* であるとは $\oplus = \vee$ または $g \circ m$ がが加法的であるときをいう。ここで $g \circ m$ は ⊕ の *additive generator* である。

定義 2.8. ⊕ は [0,1] 上の ∨ or Archimedean または擬加法とし、⊡ は [0,1] 上の擬乗法とする。⊡ が ⊕-fitting とは

(F1) $a \boxdot x = 0 \Leftrightarrow a = 0$ or $x = 0$.

(F2) $a \boxdot (x \oplus y) = (a \boxdot x) \oplus (a \boxdot y)$.

(F3) $(a \oplus b) \boxdot x = (a \boxdot x) \oplus (b \boxdot x)$.

$(\oplus, \boxdot)$ を a pseudo fitting system という。

これまでのことを使って、分解可能測度に関するファジィ積分が定義できる。

定義 2.9. [15] $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、$(\oplus, \boxdot)$ を a pseudo fitting system とする。

関数 $f : X \to [0,1]$ (ただし $f = \oplus 1_{i=1}^{n} r_i 1_{D_i}$ ここで $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ for $i \neq j$) のファジィ積分を次の式で定義する。

$$(D)\int f \boxdot dm := \oplus_{i=1}^{n} r_i \boxdot m(D_i).$$

一般の可測関数 f 　に対しては, $f_n \uparrow f$ となる単関数の列 f_n が存在するので, ファジィ積分を

$$(D)\int f \boxdot dm := \lim_{n\to\infty} (D)\int f_n \boxdot dm.$$

で定義する。

上記の分解可能測度に関するファジィ積分に対して、その一般化として Choquet 積分の形に一般化されたファジィ積分が定義できる。

定義 2.10. *Murofushi.t-conorm* $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、$(\oplus, \boxdot)$ を a pseudo fitting system とする。

関数 $f : X \to [0,1]$ (ただし $f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$ ここで $a_i \geq 0$ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n, A_i \in \mathcal{X}$, $f = \oplus 1_{i=1}^{n}$ の一般化されたファジィ積分 (GF-integral) を次の式で定義する。

$$(GF)\int f \boxdot dm := \oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot m(A_i).$$

一般の可測関数 f に対しては f に収束する単関数 $\{f_n\}$ の列を使って

$$(GF)\int f \boxdot dm := \lim_{n\to\infty}(GF)\int f_n \boxdot dm$$

で定義する。

例 2. (1) $\oplus = +$ で $\boxdot = \cdot$ のとき, 一般化されたファジィ積分は Choquet 積分である。

(2) $\oplus = \vee$ で $\boxdot = \wedge$ のとき一般化されたファジィ積分は菅野積分である。

可測関数 f, g は共単調とする。任意の $a, b \in [0,1]$ に対して $\{x|f(x) \geq a\} \subset \{x|g(x) \geq b\}$ または $\{x|f(x) \geq a\} \supset \{x|g(x) \geq b\}$ であるので、

$$(f \oplus g)(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$$

とかける。ここで $a_i \geq 0$ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n, A_i \in \mathcal{X}$ である。このことを使って、以下の定理が得られる。

定理 2.11. $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、$(\oplus, \boxdot)$ を *a pseudo fitting system* とする。

可測関数 f, g は共単調とするとき,

$$(GF)\int (f \oplus g) \boxdot dm = (GF)\int f \boxdot dm \oplus (GF)\int g \boxdot dm$$

が成り立つ。

上の性質を一般化されたファジィ積分の共単調 $\oplus$ 加法性という。

ファジィ測度に下からの連続性を仮定しているから次の単調収束定理が成り立つ。

定理 2.12. *(Monotone convergence theorem)* $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、$(\oplus, \boxdot)$ を *a pseudo fitting system* とする。

可測関数 f_n 可測関数の単調増加列で可測関数 f に収束するとき、

$$(GF)\int f \boxdot dm = \lim_{n\to\infty}(GF)\int f_n dm.$$

3 多重ファジィ積分

3.1 可測関数

この章では2つのファジィ可測空間の直積を考える。$(X, \mathcal{X})$ と $(Y, \mathcal{Y})$ を2つのファジィ可測空間とし、直積空間を考える。すなわち

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := \{A \times B | A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}\}$$

である。以下ではファジィ可測空間 $(X \times Y, \mathcal{X} \times \mathcal{Y})$ を考える。ここで $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ の構造として ring や algebra であることが仮定されていないことに注意する。

$f : X \times Y \to [0, k]$ を $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-可測関数とする。このとき、任意の $a \geq 0$ に対して $A \in \mathcal{X}$ と $B \in \mathcal{Y}$ が存在して $A \times B = \{(x, y) | f(x, y) \geq a\}$ とかける. このことから次の命題が直ちに得られる。

命題 3.1. $f : X \times Y \to [0, k]$ を $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-可測関数とする。

(1) $y \in Y$ を固定すると, $f(\cdot, y)$ は $\mathcal{X}$-可測である。

(2) $x \in X$ を固定すると, $f(x, \cdot)$ は $\mathcal{Y}$-可測である。

$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ が $(\sigma-)$algebra でないため下の例で見るように、単純な関数も $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-可測関数ではない。

例 3. $X := \{x_1, x_2\}$, $Y := \{y_1, y_2\}$ として 2つのファジィ測度空間 $(X, \mathcal{X})$ $(Y, \mathcal{Y})$ を考える。ここで、 $\mathcal{X} = 2^X$, $\mathcal{Y} = 2^Y$ である。

(1) 関数 $f: X \times Y \to [0,1]$ を

$$f(x_1, y_1) = f(x_1, y_2) = 0.2,\ f(x_2, y_1) = 0.6, f(x_2, y_2) = 1.$$

で定義する。このとき、

$$\{(x,y)|f(x,y) \geq 1\} = \{(x_2, y_2)\} = \{x_2\} \times \{y_2\},$$

$$\{(x,y)|f(x,y) \geq 0.6\} = \{(x_2, y_1), (x_2, y_2)\} = \{x_2\} \times \{x_1, y_2\},$$

$$\{(x,y)|f(x,y) \geq 0.2\} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\} = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2\}.$$

であるから f は $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-可測である。

(2) 関数 $g: X \times Y \to [0,1]$ を

$$g(x_1, y_1) = 0.2, g(x_1, y_2) = 0.4,\ g(x_2, y_1) = 0.6, g(x_2, y_2) = 1.$$

で定義する。このとき、

$$\{(x,y)|g(x,y) \geq 0.4\} = \{(x_1, x_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\} \notin \mathcal{X} \times \mathcal{Y}.$$

である。したがって、g は $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-可測ではない。実際、 $A \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ とするとき、A の要素の個数は $|A| = 0, 1, 2, 4$ と限られている。

3.2 多重一般化ファジィ積分

$(X, \mathcal{X}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ を2つのファジィ測度空間とし、$f: X \times Y \to [0, k]$ を $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$-可測関数、まず、 関数 f が単関数のとき、f は

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i \times B_i}$$

, $a_i \geq 0$, $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n, A_i \in \mathcal{X}$,

$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n, B_i \in \mathcal{Y}$ と表すことができる。

$1_{A\times B} = 1_A \boxdot 1_B$ であるから, $f(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \times 1_{B_i}$. このとき、

$$(GF)\int f d\nu = \oplus_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} \boxdot \nu(B_i) = \oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot \nu(B_i) 1_{A_i}$$

である。すべての i について 1_{A_i} は共単調であるから, 一般化ファジィ積分の共単調 $\oplus$-加法性より、

$$(GF)\int((GF)\int f d\nu)d\mu = (GF)\int(\oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot \nu(B_i)1_{A_i})d\mu$$
$$= \oplus_{i=1}^{n}(GF)\int(a_i \boxdot \nu(B_i)1_{A_i})d\mu = \oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot \nu(B_i) \boxdot \mu(A_i) = \oplus_{i=1}^{n} a_i \boxdot \mu(A_i) \boxdot \nu(B_i).$$

となる。ここで、$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上のファジィ測度 m を $m(A\times B) := \mu(A)\boxdot\nu(B)$ for $A\times B \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$. で定義すると、

$$(GF)\int((GF)\int f d\mu)d\nu = (GF)\int f dm = (GF)\int((GF)\int f d\nu)d\mu.$$

となる。一般の $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-可測関数では、単関数 f_n の列で $f_n \uparrow f$ となるものが存在する。単調収束定理より、

$$(GF)\int f_n d\mu \uparrow (GF)\int f d\mu, (GF)\int f_n d\nu \uparrow (GF)\int f d\nu$$

となる。これより、下の定理が得られる。

定理 3.2. $(X,\mathcal{X})$ と $(Y,\mathcal{Y})$ を2つのファジィ可測空間とし、$f : X\times Y \to [0,k]$ は $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-可測関数とする。このとき $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ 上のファジィ測度 m が存在し、

$$(GF)\int((GF)\int f d\mu)d\nu = (GF)\int f dm \qquad = (GF)\int((GF)\int f d\nu)d\mu.$$

が成り立つ。

上の定理で $\oplus = +, \boxdot = \cdot, m = \mu\nu$ とすると Choquet 積分について

$$(C)\int((C)\int f(x,y)d\mu)d\nu = \quad (C)\int((C)\int f(x,y)d\nu)d\mu = (C)\int f(x,y)dm$$

となる。このことは、町田 [9] によって証明された。

菅野積分についても,$\oplus = \vee, \boxdot = \wedge, m = \mu \wedge \nu$ とすると

$$(S)\int((S)\int f(x,y)d\mu)d\nu = \quad (S)\int((S)\int f(x,y)d\nu)d\mu =(S)\int f(x,y)dm$$

が成り立つ [12]。

3.3 値域の拡張

$(X,\mathcal{X},\mu)$ と $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ をファジィ可測空間とする。前の章で見たように、$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$-可測関数については、一般化ファジィ積分についても積分の順序交換が通常の積分と同様に行うことができる。しかし、$\mathcal{X}\times\mathcal{Y} := \{A\times B|A\in\mathcal{X}, B\in\mathcal{Y}\}$ は小さすぎて単純な関数でも可測関数とはならない。そこで、ここでは $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ をもっと多くの関数を含むように拡張していくことを考える。

はじめに、$\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \{\cup_{i\in I}(A_i\times B_i)|A_i\in\mathcal{X}, B_i\in\mathcal{X}, I: finite\}$ とおく。このとき、$\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ はalgebraである。$(X\times Y, \overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ を拡張された可測空間ということにする。さらに $\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ 上の集合関数 m を $\overline{m}(C) := \sup\{\oplus_{i\in I}\mu(A_i)\boxdot\nu(B_i)|C=\cup_{i\in I}(A_i\times B_i), A_i\times B_i\in\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}, I: finite\}$ と $\underline{m}(C) := \inf\{\oplus_{i\in I}\mu(A_i)\boxdot\nu(B_i)|C=\cup_{i\in I}(A_i\times B_i), A_i\times B_i\in\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}, I: finite\}$ で定義する。ここで、$A_i\times B_i$ と $A_j\times B_j$ はそれぞれ disjoint であるとする。

つぎに、単関数 $f = c_1 1_{C_1} + c_2 1_{C_2}, C_1 \supset C_2\ C_i \in \overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}, C_1 := \cup_{i\in I}(A_{1i}\times B_{1i})$: disjoint $, A_{1i}\in\mathcal{X}, B_{1i}\in\mathcal{Y}\ C_2 := \cup_{i\in I}(A_{2i}\times B_{2i})$: disjoint $, A_{2i}\in\mathcal{X}, B_{2i}\in\mathcal{Y}\ A_{1i}\supset A_{2i}, B_{1i}\supset B_{2i}$ を考える。

このとき f の m に関する積分を考えると

$$c_1\boxdot m(C_1)\oplus c_2\boxdot m(C_2) \quad \geq(c_1\boxdot\oplus_{i\in I}\mu(A_{1i})\boxdot\nu(B_{1i}))\oplus(c_2\boxdot\oplus_{i\in I}\mu(A_{1i})\boxdot\nu(B_{2i}))$$

が得られる。これらを一般化して以下の命題が得られる。

命題 3.3. $(X\times Y,\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ をファジィ可測空間とし、f を $\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-可測とする。

(1) $f(x,\cdot)$ *is* $\mathcal{X}$ -可測

(2) $f(\cdot,y)$ *is* $\mathcal{Y}$ -可測

(3) $X\times Y$ の分割、すなわち、$X\times Y:=\cup_{i\in I}(A_i\times B_i)$,$A_i\in\mathcal{X},B_i\in\mathcal{Y}$ が存在して

$$(GF)\int fd\overline{m}\geq\oplus_{i\in I}(GF)\int_{Bi}((GF)\int_{A_i}fd\mu)d\nu$$
$$=\oplus_{i\in I}(GF)\int_{Bi}((GF)\int_{A_i}fd\mu)d\nu\geq(GF)\int fd\underline{m}.$$

以下では $(X,\mathcal{X})$ 上の μ と $(Y,\mathcal{Y})$ 上の ν が $\oplus$-分解可能とする。このとき $\oplus_{i\in I}\mu(A_i)\boxdot\nu(B_i)|C=\cup_{i\in I}(A_i\times B_i),A_i\times B_i\in\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ の値は分割により変わらない。したがって以下の命題が成り立つ。

命題 3.4. $(X,\mathcal{X})$ 上の μ と $(Y,\mathcal{Y})$ 上の ν が $\oplus$-分解可能とする。このとき $C\in\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ に対して $\overline{m}(C)=\underline{m}(C)$

このことより次の定理が得られる。

定理 3.5. $(X,\mathcal{X},\mu)$ と $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ を2つのファジィ測度空間とし、$(X\times Y,\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$ を拡張された可測空間とする。$f:X\times Y\to[0,k]$ を $\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$-可測関数、$(\oplus,\boxdot)$ を *a pseudo fitting system* とし、μ と ν を $\oplus$ 分解可能とすると、$\overline{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}$ 上のファジィ測度 m が存在し

$$(D)\int((D)\int fd\mu)d\nu\qquad=(D)\int fdm=(D)\int((D)\int fd\nu)d\mu.$$

が成り立つ。

$\oplus=+,\boxdot=\cdot$ のとき、積分は通常のルベーグ積分であり定理 3.5 は Funbini の定理の一部となっている。$\oplus=\vee,\boxdot=\wedge$ を考えることで

$$(S)\int((S)\int f(x,y)d\mu)d\nu\qquad=(S)\int((S)\int f(x,y)d\nu)d\mu=(S)\int f(x,y)dm$$

が得られる。ここで、μ と ν は可能性測度であり、$A\times B\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ に対して $m(A\times B)=\mu(A)\wedge\nu(B)$ である。

4 多重ファジィ積分の応用

ここでは、多重ファジィ積分の応用としてCitation indexを紹介する。通常研究者の評価として用いられているのは、NC-indexである。

定義 4.1. X_r はある研究者 r が出版した論文の集合とし、$f(x)$ は論文 $x \in X_r$ の引用数とする。このとき *NC-index (number of citations)* NC_r は下記の式で定義されるものである。

$$NC_r = \sum_{x \in X_r} f(x) \tag{1}$$

NC-indexはすべての論文の引用数の単純な合計であり、引用が少なくても論文数が多ければその値は大きくなり、論文の質はあまり反映されていない。そこで、Hirsch[6]は以下のような h-indexを提案した。

定義 4.2. X_r はある研究者 r が出版した論文の集合とし、$f(x)$ は論文 $x \in X_r$ の引用数とする。このとき *h-index (Hirsch index)* h_r は下記の式で定義されるものである。

$$h_r = \max_i \min(f(x_{\sigma(i)}), i)$$

ここで $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(N)\}$ は $\{1, \ldots, N\}$ の並べ替えで $f(x_{\sigma(1)}) \geq f(x_{\sigma(2)}) \geq \cdots \geq f(x_{\sigma(N)})$. を満たすものである。

研究者 r の h-index が h であるとは、r の論文の全てのうち h 本の論文は h 以上の引用数をもち、残りの論文は h 未満の引用数であるものである。

上の定義から明らかに NC-indexはcounting measure μ に関するChoquet積分であり、$NC_r = (C)\int f d\mu$ とかける。また、counting measure μ に関する h-indexは菅野積分であり [16] $h_r = (S)\int f d\mu$ とかける。

ここで、上記のindexは単年度のものであった。研究者の論文数と引用数は年々変化しており、これを総合してある研究者の現在のindexとしたい。これは以下のように多重ファジィ積分を用いて定式化できる。

X はある研究者 r が出版した論文の集合とし $\mathcal{X} := 2^X$ とする。可測空間 $(X, \mathcal{X})$ にはある測度 μ が入っていて、これが論文の数に関する重要度を表す・

Y を現在までの年度の集合とし、$\mathcal{Y} := 2^Y$ とする。可測空間 $(Y, \mathcal{Y})$ にはある測度 ν が入っていて、これが新しいものを重視するなどといった年度に関する重要度を表す。

$f(x, y)$ はある年度 $y \in Y$ の論文 $x \in X_r$ の引用数とする。$(\oplus, \boxdot)$ を a pseudo fitting system とするとき、関数 $g_1(y) := (GF)\int f d\mu$ はある年度 y の index である。また、$(GF)\int g_1 d\nu := (GF)\int (GF)\int f d\mu\nu$ で現在までの研究者の index が定義できる。

一方関数 $g_2(x) := (GF)\int f d\nu$ はある論文の経年の評価となる index である。また、$(GF)\int g_2 d\mu := (GF)\int (GF)\int f d\nu\mu$ で現在までの研究者の index を定義することもできる。

ここで、μ と ν が $\oplus$ 分解可能であれば定理 3.5 より

$$(GF)\int g_1 d\nu = (GF)\int g_2 d\mu$$

が成り立つ。

どのような構造が index としてふさわしいかということは、まだに明確にされていないが、それは測度と pseudo fitting system に依存することである。現実的な要請とその数学的な構造について今後の研究課題としたい。

Acknowledgements

Partial support by the Spanish MEC (projects ARES – CONSOLIDER INGENIO 2010 CSD2007-00004 – and eAEGIS – TSI2007-65406-C03-02) is acknowledged.

References

[1] Benvenuti, P., Mesiar, R, Vivona,D. (2002) Monotone set-functions-based integrals. in Handbook of measure theory, Elsevier.

[2] Choquet, G. (1953/54) Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, 5, 131-295.

[3] Dellacherie, C. (1971) Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, 191, 77-81.

[4] Denneberg,D.(1994) *Non Additive Measure and Integral,* Dordorecht:Kluwer Academic Publishers.

[5] Ghirardato,P.(1997),On Independence for Non-Additive Measures, with a Fubini Theorem, Journal of Economic Theory, 73, 261-291.

[6] Hirsch, J. E. (2005) An index to quantify an individual's scientific research output, Proc. of the National Academy of Sciences, 102:45 16569-16572.

[7] Klement, E.P., Mesiar,R., Pap, E. (2000) Triangular Norms, Dordorecht:Kluwer Academic Publishers

[8] Ling,C.H. (1965) Representation of associative functions, Publ. Math. Debrecen, 12, 189-212.

[9] Machida, M., (1990), A study on non-additive set functions, Master thesis, Tokyo Institute of Technology, (in Japanese).

[10] Murofushi, T., Sugeno, M., (1989), An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems, 29, 201-227.

[11] Murofushi,T., Sugeno,M. (1991): Fuzzy t-conorm integral with respect to fuzzy measures: generalization of Sugeno integral and Choquet integral, Fuzzy Sets and Systems, 42, 57-71.

[12] Narukawa, Y., Torra, V., Multidimensional integrals and citation analysis, Proc. of EUROFUSE 2007, 185-189.

[13] Narukawa, Y., Torra, V., (2007), Multidimensional fuzzy integrals, MDAI 2007, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 4617, 145-155.

[14] Sugeno, M., (1974), Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.

[15] Sugeno, M., Murofushi,T.,(1987), Pseudo-additive measures and integrals, J. Math. Anal. Appl., 122, 197-222.

[16] Torra, V., Narukawa, Y. (2007) The h-index and the number of citations: two fuzzy integrals, IEEE Trans. on Fuzzy Systems, in press.