Title	Generalized skew informationに関連した不等式 (非加法性の数理と情報 : 非線形性・非可換性との接点)
Author(s)	柳, 研二郎; 古市, 茂; 栗山, 憲
Citation	数理解析研究所講究録 (2008), 1585: 12-23
Issue Date	2008-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/81523
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第1585巻 2008年 12-23

Generalized skew information に関連した不等式 Some inequalities related to generalized skew information

山口大学大学院・理工学研究科 柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)
Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University
山口東京理科大学　古市　茂 (Shigeru Furuichi)
Tokyo Univerersity of Science in Yamaguchi
山口大学大学院・理工学研究科　栗山　憲 (Ken Kuriyama)
Graduate School of Science and Engineering, Yamaguchi University

1 Generalized skew information と不確定性関係

量子状態 ρ (密度作用素: $\rho^* = \rho \geq 0, Tr[\rho] = 1$) と観測量 H (自己共役作用素: $H^* = H$) との間のある種の非可換性の度合いを表す情報量として次の Wigner-Yanase skew information が知られている:

$$I_\rho(H) \equiv \frac{1}{2} Tr\left[(i[\rho^{1/2}, H])^2\right]. \tag{1}$$

ここで $[X,Y] \equiv XY - YX$ である. また Dyson による一般化

$$I_{\rho,\alpha}(H) \equiv \frac{1}{2} Tr\left[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])\right], \quad \alpha \in [0,1] \tag{2}$$

が Wigner-Yanase-Dyson skew information として知られている. 近年この種の skew information と不確定性関係に関する研究が盛んになされている [10, 17, 8]. 量子状態 ρ と観測量 X, Y に対する Heisenberg の不確定性関係は

$$V_\rho(X) V_\rho(Y) \geq \frac{1}{4} \left|Tr\left[\rho[X,Y]\right]\right|^2 \tag{3}$$

である. ここで分散は $V_\rho(H) \equiv Tr\left[\rho(H - Tr[\rho H]I)^2\right]$ で定義される. これよりも強い結果として Schrodinger の不確定性関係

$$V_\rho(X) V_\rho(Y) - |Cov_\rho(X,Y)|^2 \geq \frac{1}{4} \left|Tr\left[\rho[X,Y]\right]\right|^2$$

が知られている. ただし $Cov_\rho(X,Y) \equiv Tr\,[\rho(X - Tr[\rho X]I)(Y - Tr[\rho Y]I)]$ である. Luo-Zhang [10] は不等式 (3) より強い結果として

$$I_\rho(X)I_\rho(Y) \geq \frac{1}{4}\,|Tr\,[\rho[X,Y]]|^2$$

を得たがこれは不成立であった. 次の例で成り立たないことがわかる.

Counter Example 1

$$\rho = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

なぜ成り立たないかという理由は次の通りである.

$$\phi(X,Y) \equiv Tr[\rho\widetilde{X}\widetilde{Y}^*] - Tr[\rho^{1/2}\widetilde{X}\rho^{1/2}\widetilde{Y}^*]$$

とおくと $\phi(X,Y)$ は sesqui-linear かつ Hermitian であることは容易にわかる. しかし $\phi(X,X)$ は positive ではない. また self adjoint operator A に対して $\phi(A,A) \geq 0$ であるが、そうだからといって Schwarz inequality を使うことはできない. つまり $\phi(X,Y)$ は $B(\mathcal{H})$ 上の inner product ではないのである. ここに彼らの間違った原因があるといえる. そこで彼らの不等式を回復させるために次のような定義を導入する.

Definition 1 ([17]) 任意の *density operator* ρ, 任意の *self-adjoint operators* A, B, 任意の $0 \leq \alpha \leq 1$, 任意の $\epsilon \geq 0$ に対して *generalized correlation* を次のように定義する.

$$\begin{aligned} Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,B) &\equiv (\frac{1}{2}+\epsilon)Tr[\rho\widetilde{A}\widetilde{B}] + \frac{1}{2}Tr[\rho\widetilde{B}\widetilde{A}] \\ &\quad -\frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha\widetilde{A}\rho^{1-\alpha}\widetilde{B}] - \frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha\widetilde{B}\rho^{1-\alpha}\widetilde{A}] \end{aligned}$$

また次のような *genaralized skew information* を定義する.

$$I_{\alpha,\rho,\epsilon}(A) \equiv Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,A) = (1+\epsilon)Tr[\rho\widetilde{A}^2] - Tr[\rho^\alpha\widetilde{A}\rho^{1-\alpha}\widetilde{A}]$$

このとき次の定理を得る.

Theorem 1 (Yanagi-Furuichi-Kuriyama [17])

$$I_{\alpha,\rho,\epsilon}(A)I_{\alpha,\rho,\epsilon}(B) - |Re\{Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,B)\}|^2 \geq \frac{\epsilon}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2$$

Theorem 1 を証明するためには次の定義が必要である.

Definition 2 f, g をそれぞれ *domain* $D \subset \mathbb{R}$ をもつ *real functions* とする. このとき任意の $a, b \in D$ に対して

$$(f(a) - f(b))(g(a) - g(b)) \geq 0$$

が成り立つとき, (f, g) は *monotone pair* という. また任意の $a, b \in D$ に対して

$$(f(a) - f(b))(g(a) - g(b)) \leq 0$$

が成り立つとき, (f, g) は *anti-monotone pair* という.

このとき次の Lemma が成り立つ.

Lemma 1 (Bourin [1], Fujii [2]) 任意の *self-adjoint operators* A, X に対して次の *trace inequality* が成り立つ.

(1) (f, g) が *monotonic pair* のとき次が成り立つ.

$$Tr[f(A)Xg(A)X] \leq Tr[f(A)g(A)X^2].$$

(2) (f, g) が *antimonotonic pair* のとき次が成り立つ.

$$Tr[f(A)Xg(A)X] \geq Tr[f(A)g(A)X^2].$$

さらに一般的に次の trace inequality も成り立つ.

Lemma 2 任意の *self-adjoint operators* A, B, 任意の *linear operator* X に対して次の *trace inequality* が成り立つ.

(1) (f, g) が *monotonic pair* のとき次が成り立つ.

$$Tr[f(A)X^*g(B)X + f(B)Xg(A)X^*] \leq Tr[f(A)g(A)X^*X + f(B)g(B)XX^*].$$

(2) (f, g) が *antimonotonic pair* のとき次が成り立つ.

$$Tr[f(A)X^*g(B)X + f(B)Xg(A)X^*] \geq Tr[f(A)g(A)X^*X + f(B)g(B)XX^*].$$

Proof of Lemma 2. $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の 2 つの self-adjoint operators を次のように定義する.

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \widehat{X} = \begin{pmatrix} 0 & X^* \\ X & 0 \end{pmatrix}.$$

(f, g) を $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ 上の monotonic pair とすると Lemma 1 より

$$Tr[f(\widehat{A})\widehat{X}g(\widehat{A})\widehat{X}] \leq Tr[f(\widehat{A})g(\widehat{A})\widehat{X}^2],$$

が成り立つのでこれより Lemma の (1) を得る. 同様にして (2) も示される. q.e.d.

ここで Theorem 1 の略証を与える.

Proof of Theorem 1. 任意の density operator ρ と任意の bounded linear operators X, Y に対して次のように定義する.

$$\begin{aligned} \phi(X,Y) &\equiv (\frac{1}{2}+\epsilon)Tr[\rho\widetilde{X}^*\widetilde{Y}] + \frac{1}{2}Tr[\rho\widetilde{Y}\widetilde{X}^*] \\ &- \frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha\widetilde{X}^*\rho^{1-\alpha}\widetilde{Y}] - \frac{1}{2}Tr[\rho^\alpha\widetilde{Y}\rho^{1-\alpha}\widetilde{X}^*]. \end{aligned}$$

Lemma 2 より $\phi(X,X) \geq 0$ である. $\phi(X,Y)$ は sesquilinear かつ Hermitian であるので Schwarz inequality を用いると

$$|\phi(X,Y)|^2 \leq \phi(X,X)\phi(Y,Y).$$

が得られる. よって任意の self-adjoint operators A, B に対して次が成り立つ.

$$|Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,B)|^2 \leq Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,A)Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(B,B) = I_{\alpha,\rho,\epsilon}(A)I_{\alpha,\rho,\epsilon}(B)$$

$Tr[\rho[A,B]]$ は純虚数であることがわかるので

$$|Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,B)|^2 = \frac{\epsilon^2}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2 + |Re\{Corr_{\alpha,\rho,\epsilon}(A,B)\}|^2$$

となり目標の不等式を得る. q.e.d.

2 Wigner-Yanase-Dyson skew information and Generalized Fisher information

Classical Fisher information は次のように定義される.

Definition 3 (Classical Fisher information) $\{p_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された *probability density functions* のパラメータ付けられた *family* とする. このとき3通りに表現される

$$\begin{aligned} I_F(p_\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{d\theta} p_\theta^{1/2}(x)\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{d\theta}\log p_\theta(x)\right)^2 p_\theta(x) dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\frac{dp_\theta(x)}{d\theta}\right)^2}{p_\theta(x)} dx. \end{aligned}$$

を *Classical Fisher information* という. ここで $\dfrac{dp_\theta(x)}{d\theta}$ は対数微分と呼ばれている.
さらに $p_\theta(x) = p(x-\theta)$ を満たすとき

$$\begin{aligned} I_F(p_\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx} p^{1/2}(x)\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dx}\log p(x)\right)^2 p(x) dx \\ &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} \frac{\left(\frac{dp(x)}{dx}\right)^2}{p(x)} dx. \end{aligned}$$

と表現される.

classical Fisher information を quantum Fisher information に拡張することを考える. この際に拡張の仕方は固定されたものはないので様々な拡張の仕方が考えられる. ここでは2通りの拡張を試みる.

Definition 4 (Quantum Fisher information) $\{\rho_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ を *Hilbert space* $\mathcal{H}$ 上で定義された *density operators* のパラメータ付けられた *family* とする. このとき *Quantum Fisher information* は次のように2通りに定義される.

(1)—Wigner-Yanase information

$$I_W(\rho_\theta) = \frac{1}{2}Tr[(D_H\rho_\theta^{1/2})^2] = Tr[\rho_\theta H^2] - Tr[\rho_\theta^{1/2} H \rho_\theta^{1/2} H],$$

ただし $D_H x = i[x,H] = i(xH - Hx)$ である. さらに $\rho_\theta = e^{-i\theta H}\rho e^{i\theta H}$ を満たすとき

$$I_W(\rho_\theta) = \frac{1}{2}Tr[(D_H\rho^{1/2})^2] = Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H].$$

(2)

$$I_F(\rho_\theta) = \frac{1}{4}Tr[\rho_\theta L_\theta^2],$$

ただし L_θ は次の性質を満たす *symmetric logarithmic derivative (*対称対数微分*)* である.

$$\frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}(L_\theta\rho_\theta + \rho_\theta L_\theta).$$

さらに $\rho_\theta = e^{-i\theta H}\rho e^{i\theta H}$ を満たすとき

$$I_F(\rho_\theta) = \frac{1}{4}Tr[\rho L^2],$$

ただし $L = e^{i\theta H}L_\theta e^{-i\theta H}$ である.

以降 ρ_θ は次の von Neumann-Landau equation を満たすものと仮定する.

$$i\frac{d\rho_\theta}{d\theta} = H\rho_\theta - \rho_\theta H, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Luo は次の結果を得た.

Proposition 1 (Luo [11]) $\{\rho_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ が次の条件を満たすと仮定する.

$$\rho_\theta = e^{-i\theta H}\rho e^{i\theta H}.$$

このとき次が成り立つ.

(1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$I_W(\rho_\theta) = I_W(\rho, H) \equiv \frac{1}{2}Tr[(D_H\rho^{1/2})^2].$$

(2) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$I_F(\rho_\theta) = I_F(\rho, H) \equiv \frac{1}{4}Tr[\rho^{1/2}L\rho^{1/2}L].$$

Proposition 2 (Luo [11])

$$I_W(\rho, H) \leq I_F(\rho, H) \leq 2I_W(\rho, H).$$

次に一般化された quantum Fisher information を次のように定義する.

Definition 5 (Genalized quantum Fisher information) $\{\rho_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ を *Hilbert space* $\mathcal{H}$ 上で定義された *density operators* のパラメータ付けられた *family* とする. このとき *Generalized quantum Fisher information* は次のように2通りに定義される.

(1)—Wigner-Yanase-Dyson information

$$I_{W,\alpha}(\rho_\theta) = \frac{1}{2}Tr[(D_H\rho_\theta^\alpha)(D_H\rho_\theta^{1-\alpha})] = Tr[\rho_\theta H^2] - Tr[\rho_\theta^\alpha H\rho_\theta^{1-\alpha}H],$$

ただし $D_Hx = i[x, H] = i(xH - Hx)$ である. さらに $\rho_\theta = e^{-i\theta H}\rho e^{i\theta H}$ を満たすとき

$$I_{W,\alpha}(\rho_\theta) = \frac{1}{2}Tr[(D_H\rho^\alpha)(D_H\rho^{1-\alpha})] = Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H\rho^{1-\alpha}H].$$

(2)

$$I_{F,\alpha}(\rho_\theta) = \frac{1}{4}Tr[\rho_\theta^\alpha L_\theta\rho^{1-\alpha}L_\theta],$$

ただし L_θ は次の性質を満たす *symmetric logarithmic derivative* である.

$$\frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}(\rho_\theta^\alpha L_\theta\rho_\theta^{1-\alpha} + \rho_\theta^{1-\alpha}L_\theta\rho_\theta^\alpha).$$

さらに $\rho_\theta = e^{-i\theta H}\rho e^{i\theta H}$ を満たすとき

$$I_{F,\alpha}(\rho_\theta) = \frac{1}{4}Tr[\rho^\alpha L\rho^{1-\alpha}L],$$

ただし $L = e^{i\theta H}L_\theta e^{-i\theta H}$ である.

次の定理を得る.

Theorem 2 $\{\rho_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ を次の条件を満たすと仮定する.

$$\rho_\theta = e^{-i\theta H}\rho e^{i\theta H}.$$

このとき次を得る.

(1) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$I_{W,\alpha}(\rho_\theta) = I_{W,\alpha}(\rho, H) \equiv \frac{1}{2} Tr[(D_H \rho^\alpha)(D_H \rho^{1-\alpha})].$$

(2) 任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$I_{F,\alpha}(\rho_\theta) = I_{F,\alpha}(\rho, H) \equiv \frac{1}{4} Tr[\rho^\alpha L \rho^{1-\alpha} L].$$

さらに次の定理を得る.

Theorem 3

$$I_{W,\alpha}(\rho, H) \leq I_{F,\alpha}(\rho, H).$$

Proof of Theorem 3. $\rho = \sum_n \lambda_n |\phi_n >< \phi_n|$ を ρ の spectrum decomposition とする. このとき

$$\begin{aligned} I_{W,\alpha}(\rho, H) &= Tr[\rho H^2] - Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m,n} (\lambda_m + \lambda_n - \lambda_m^\alpha \lambda_n^{1-\alpha} - \lambda_m^{1-\alpha} \lambda_n^\alpha) | < \phi_m | H | \phi_n > |^2. \end{aligned}$$

他方次を得る.

$$\begin{aligned} I_{F,\alpha}(\rho, H) &= \frac{1}{4} Tr[\rho^\alpha L \rho^{1-\alpha} L] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m,n} \frac{1}{2} (\lambda_m^\alpha \lambda_n^{1-\alpha} + \lambda_m^{1-\alpha} \lambda_n^\alpha) | < \phi_m | L | \phi_n > |^2. \end{aligned}$$

ここで $i(\rho H - H \rho) = \frac{1}{2}(\rho^\alpha L \rho^{1-\alpha} + \rho^{1-\alpha} L \rho^\alpha)$ が成り立つので

$$| < \phi_m | L | \phi_n > |^2 = \frac{4(\lambda_m - \lambda_n)^2}{(\lambda^\alpha \lambda_n^{1-\alpha} + \lambda_m^{1-\alpha} \lambda_n^\alpha)^2} | < \phi_m | H | \phi_n > |^2.$$

が成り立つ. したがって

$$I_{F,\alpha}(\rho, H) = \frac{1}{2} \sum_{m,n} \frac{(\lambda_m - \lambda_n)^2}{\lambda_m^\alpha \lambda_n^{1-\alpha} + \lambda_m^{1-\alpha} \lambda_n^\alpha} | < \phi_m | H | \phi_n > |^2.$$

次の不等式を得る.

$$
\begin{aligned}
& (\lambda_m-\lambda_n)^2-(\lambda_m+\lambda_n-\lambda_m^{\alpha}\lambda_n^{1-\alpha}-\lambda_m^{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha})(\lambda_m^{\alpha}\lambda_n^{1-\alpha}+\lambda_m^{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha}) \\
= \ & (\lambda_m-\lambda_n)^2-(\lambda_m+\lambda_n)(\lambda_m^{\alpha}\lambda_n^{1-\alpha}+\lambda_m^{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha})+(\lambda_m^{\alpha}\lambda_n^{1-\alpha}+\lambda_m^{1-\alpha}\lambda_n^{\alpha})^2 \\
\geq \ & (\lambda_m-\lambda_n)^2-(\lambda_m+\lambda_n)(\alpha\lambda_m+(1-\alpha)\lambda_n+(1-\alpha)\lambda_m+\alpha\lambda_n)+4\lambda_m\lambda_n \\
= \ & (\lambda_m-\lambda_n)^2-(\lambda_m+\lambda_n)^2+4\lambda_m\lambda_n \\
= \ & 0.
\end{aligned}
$$

ゆえに目標の不等式を得る. q.e.d.

ここで他の定義との関わりについて言及する.

	$\frac{1}{4}Tr[\rho L^2]$	$\frac{1}{4}Tr[\rho^{\alpha}L\rho^{1-\alpha}L]$	$\frac{1}{4}Tr[\rho^{\frac{1-\alpha}{2}}L\rho^{\frac{1+\alpha}{2}}L]$
$\frac{1}{2}(\rho L+L\rho)$	○	×	×
$\frac{1}{2}(\rho^{\alpha}L\rho^{1-\alpha}+\rho^{1-\alpha}L\rho^{\alpha})$	○	◎	×
$\rho^{1/2}L\rho^{1/2}$	○	○	○
$\frac{1}{2}(\rho^{\frac{1-\alpha}{2}}L\rho^{\frac{1+\alpha}{2}}+\rho^{\frac{1+\alpha}{2}}L\rho^{\frac{1-\alpha}{2}})$	○	×	○

行方向には関連する 3 種類の generalized Fisher information $I_F(\rho,H)$ が表されている.
列方向には関連する 4 種類の $\dfrac{d\rho_\theta}{d\theta}$ が表されている.
◎ は基本的に Theorem 3 が成り立つ箇所である. また ○ は派生的に成り立つ箇所である. × は Theorem 3 が成り立たない箇所である.

3 Generalized quantum Cramer-Rao inequality

T を self-adjoint operator とする. density operators のパラメータ付けられた family $\{\rho_\theta;\theta\in\mathbb{R}\}$ に対して $E_\theta(T)\equiv Tr[\rho_\theta T]=\theta$ を仮定する. つまり T が不変推定量であると仮定する. このとき

$$Tr[\frac{d\rho_\theta}{d\theta}T]=1$$

であることに注意する. また T の variance は次で定義される.

$$V_\theta(T)=Tr[\rho_\theta(T-\theta I)^2].$$

$I_{F,\alpha}(\rho_\theta)$ は次で定義される generalized quantum Fisher information とする.

$$I_{F,\alpha}(\rho_\theta)=Tr[\rho_\theta^{\alpha}L_\theta\rho_\theta^{1-\alpha}L_\theta],$$

ただし L_θ は次を満たす symmetric logarithmic derivative である.

$$\frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}(\rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}}).$$

このとき一般化された Cramer-Rao inequality を得る.

Theorem 4

$$I_{F,\alpha}(\rho_\theta) \geq \frac{1}{V_\theta(T)}.$$

Proof of Theorem 4. 次の一連の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& |Tr[\rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} (T-\theta I)]|^2 \\
= \ & |Tr[\rho_\theta^{\frac{\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} \{\rho_\theta^{\frac{1}{2}}(T-\theta I)\}^*]|^2 \\
\leq \ & Tr[(\rho_\theta^{\frac{\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}})(\rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{\alpha}{2}})] V_\theta(T) \\
= \ & Tr[\rho_\theta^{\alpha} L_\theta \rho_\theta^{1-\alpha} L_\theta] V_\theta(T).
\end{aligned}$$

ここで左辺は次のように評価される.

$$\begin{aligned}
& \text{LHS} \\
\geq \ & (\mathrm{Re}\, Tr[\rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} (T-\theta I)])^2 \\
= \ & (\frac{1}{2} Tr[\rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} (T-\theta I)] + \frac{1}{2} Tr[(T-\theta I)\rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}}])^2 \\
= \ & (Tr[\frac{1}{2}(\rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} + \rho_\theta^{\frac{1-\alpha}{2}} L_\theta \rho_\theta^{\frac{1+\alpha}{2}})(T-\theta I)])^2 \\
= \ & (Tr[\frac{d\rho_\theta}{d\theta}(T-\theta I)])^2 \\
= \ & (Tr[\frac{d\rho_\theta}{d\theta} T] - \theta \frac{d}{d\theta}(Tr[\rho_\theta]))^2 \\
= \ & 1.
\end{aligned}$$

したがって一般化された Cramer Rao inequality を得る. q.e.d.

$\alpha = 0$ または $\alpha = 1$ のとき次の quantum Cramer-Rao inequality を導く.

Corollary 1

$$I_F(\rho_\theta) \equiv Tr[\rho_\theta L_\theta^2] \geq \frac{1}{V_\theta(T)}.$$

Remark 1 一般に任意の *self-adjoint operator* A, 任意の *density operator* ρ, 任意の $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$ に対して次の大小関係が成り立つことがわかる.

$$(Tr[\rho A])^2 \leq Tr[\rho^{\frac{1}{2}} A \rho^{\frac{1}{2}} A] \leq Tr[\rho^{\alpha} A \rho^{1-\alpha} A] \leq Tr[\rho A^2].$$

なぜなら

$$(Tr[\rho A])^2 = (Tr[\rho^{\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{4}} A \rho^{\frac{1}{4}})])^2 \leq Tr[\rho] Tr[(\rho^{\frac{1}{4}} A \rho^{\frac{1}{4}})^2] = Tr[\rho^{\frac{1}{2}} A \rho^{\frac{1}{2}} A].$$

$$Tr[\rho^{\alpha} A \rho^{1-\alpha} A] = Tr[\rho^{\alpha-\frac{1}{2}}(\rho^{\frac{1}{4}} A \rho^{\frac{1}{4}})\rho^{\frac{1}{2}-\alpha}(\rho^{\frac{1}{4}} A \rho^{\frac{1}{4}})]$$

$$\geq Tr[(\rho^{\frac{1}{4}} A \rho^{\frac{1}{4}})^2] = Tr[\rho^{\frac{1}{2}} A \rho^{\frac{1}{2}} A]. \text{ (byLemma1)}$$

$$Tr[\rho^{\alpha} A \rho^{1-\alpha} A] \leq Tr[\rho A^2]. \text{ (byLemma1)}$$

ただし ρ の *spectral decomposition* を使っても一連の不等式は得られることに注意しておく.

References

[1] J.-C.Bourin, Some inequalities for norms on matrices and operators, Linear Alg.Appl., vol.292, pp.139-154(1999).

[2] J.I.Fujii, A trace inequality arising from quantum information theory, Linear Alg.Appl.,vol.400, pp.141-146(2005).

[3] P.Gibilisco and T.Isola, On the characterization of paired monotone metrics, Ann.Inst.Stat. Math., vol.56, pp.369-381(2004).

[4] P.Gibilisco and T.Isola, On monotonicity of scalar curvature in classical and quantum information geometry, J.Math.Phys., vol.46, pp.1-14(2005).

[5] M.R.Grasselli, Duality, monotonicity and Wigner-Yanase-Dyson metrics, Inf.Dimens.Anal.Quantum Prob.Relat.Top., vol.7, pp.215-232(2004).

[6] W.Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantummechanischen Kinematik und Mechanik, Zeitschrift für Physik, vol.43, pp.172-198(1927).

[7] A.Jencova, Flat connections and Wigner-Yanase-Dyson metrics, Pep.Math.Phys., vol.52, pp.331-351(2003).

[8] H.Kosaki, Matrix trace inequality related to uncertainty principle, International J.Math., vol.16, pp.629-646(2005).

[9] E.H.Lieb, Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture, Adv.Math., vol.11, pp.267-288(1973).

[10] S.Luo and Q.Zhang, On skew information, IEEE Trans.IT, vol.50, no.8, pp.1778-1782(2004).

[11] S.Luo, Wigner-Yanase skew information vs. quantum Fisher information, Proc.Amer.Math.Soc., vol.132, pp.885-890(2003).

[12] S.Luo and Q.Zhang, An information characterization of Schrödinger's uncertainty relations, J.Stat.Phys., vol.114, pp.1557-1576(2004).

[13] H.P.Robertson, The uncertainty principle, Phys.Rev., vol.34, pp.163-164(1929).

[14] E.Schrödinger, About Heisenberg uncertainty relation, Proc.Prussian Acad.Sci., Phys.Math. Section, vol.XIX, pp.293(1930).

[15] E.P.Wigner and M.M.Yanase, Information content of distribution, Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A., vol.49, pp.910-918(1963).

[16] E.P.Wigner and M.M.Yanase, On the positive semidefinite nature of certain matrix expression, Canad. J. Math., vol.16, pp.397-406(1964).

[17] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, A generalized skew information and uncertainty relation, IEEE Trans. IT., vol.51, no.12, pp.4401-4404(2005).