数理解析研究所講究録
第 1589 巻 2008 年 120-129

区間ベイズ推定による適応型品質管理

日本化学工業株式会社　佐々木 稔 (Minoru SASAKI)
Nippon Chemical Industrial Co., LTD.
弓削商船高等専門学校・総合教育科　堀口　正之 (Masayuki HORIGUCHI)
General Education, Yuge National College of Maritime Technology
千葉大学・教育学部　蔵野　正美 (Masami KURANO)
Faculty of Education, Chiba University

1　はじめに

現在の品質管理 (quality control) に用いられている管理図の原型は, 約 80 年前に考案されたシューハート管理図 (cf. [19]) である. シューハート管理図は, 通常, 中心線から両側へ 3σ の距離に管理限界線を持ち, 規則的な間隔で工程からサンプリングされたデータをプロットしたグラフからなる.

ベイズ推定を用いた適応型の品質管理については, 多くの研究があり (cf.[2, 6, 9, 18]), 品質管理の現場でその有効性が報告されている. ベイズ推定を基本とした品質管理では, 蓄積された情報を基にして管理限界, サンプルサイズおよびサンプリング間隔を変更して事象や状況の変化に適応していく (cf. [9]).

例えば, シューハート管理図におけるサンプリング間隔を適応的に変化させる手法として, 可変サンプリング間隔管理図 (cf. [6]) がある. 可変サンプリング間隔管理図においては, ATS(Average Time to Signal, 初めてサンプルが取られた時から管理限界を超えたサンプルが取られるまでの時間を T とし, その平均をとる) のような統計的効率の基準に基づいて管理図の良さを強調している. この研究の適用事例として, Baxley(cf. [2]) は, ナイロンフィラメントの重要な品質特性を監視するために可変サンプリング間隔管理図を適用し, 固定サンプリング間隔管理図と比べてシフト毎に測定するフィラメントのサンプリング数を 80 から 40 に削減するというサンプリング費用削減に効果があったとしている.

また, 適応型の品質管理の問題を未知パラメータをもつ逐次決定過程として定式化して, 動的計画法を用いて最適な管理政策を求める研究 (cf. [1, 4, 5, 7, 8, 10, 11]) もなされている.

ベイズ流の方法では, 未知のパラメータに対する事前情報や知識を 1 つの事前分布で表現する必要がある. (cf. [15, 16, 20]) しかし, 実際の適応場面では事前知識が漠然として 1 つの事前分布に表すことが困難であることがある. また, 事前情報から事前分布を推定あるいは構成するとき, その間の食い違いによる大きな推定誤差を引き起こすことがある.

これらの困難を克服する方法として L. DeRobertis and J. A. Hartigan('1981) は, 区間ベイズ法の考えを提唱している. これは, 未知パラメータに対する事前知識を測度のある区間 (intervals of measures) で表そうとするものである.

本報告は, 区間ベイズ法を母平均が未知 (分散は既知) の正規母集団の品質管理に適用して事前情報に対して頑健な適応型の品質管理法を提案する. また, 従来の 3 シグマ管理図 (cf. [13, 14, 19]) は, 我々が提案する区間ベイズ法を用いた適応型の管理図では事前情報としてどの範囲の知識を前提にしているかなども検討する.

2 記号と補題

この節では, [3] を参照にして事前測度 Q の存在する範囲を表わす測度区間を定義し, 積分比を求める 2 つの補題をのべる.

$\Theta = (-\infty, \infty)$ をパラメータ空間として, 母平均 $\theta \in \Theta$, 分散 σ_0^2(既知) の正規母集団 $N(\theta, \sigma_0^2)$ を考え, その密度関数 $f(x \mid \theta)$ は次で与えられる:

$$X \sim N(\theta, \sigma_0^2)$$

$$f(x \mid \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (\theta \in \Theta) \tag{1}$$

Θ の部分集合からなるボレル集合族を $\mathcal{B}$ として, 可測空間 $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度 L, U について, 全ての $A \in \mathcal{B}$ に対して $L(A) \leq U(A)$ が成り立つとき $L \leq U$ と記す. $L \leq U$ のとき, L と U のそれぞれを左端点および右端点にもつ区間 $I(L, U)$ を次で定める.

$$I(L, U) := \{Q \mid L \leq Q \leq U, Q \text{ は } \sigma\text{-有限測度}\} \tag{2}$$

パラメータ θ の事前知識を表す事前測度 (prior measure)Q は, $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度 $L, U (L \leq U)$ の区間 $I(L, U)$ に含まれるとする. すなわち, 次が成り立つとする.

$$Q \in I(L, U) \tag{3}$$

このとき区間 $I(L, U)$ を事前測度区間 (intervals of prior measures) という. g を $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の Q-可積分関数とするとき, 記号の簡単のためにその積分を次のように表す:

$$Q(g) := \int_\Theta g(\theta) dQ(\theta)$$

次の補題は, $\dfrac{Q(b)}{Q(c)}, Q \in I(L, U)$ の範囲を与えている.

補題 1(cf. [3])
b, c を $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の Q-可積分関数で, 任意の $Q \in I(L, U)$ に対して $Q(c) > 0$ とする.
このとき, 次が成り立つ.

1. $\inf\left\{\frac{Q(b)}{Q(c)} \mid Q \in I(L,U)\right\}$ は, 次の方程式の一意の解 λ として与えられる:

$$U(b-\lambda c)^{-}+L(b-\lambda c)^{+}=0 \tag{4}$$

2. $\sup\left\{\frac{Q(b)}{Q(c)} \mid Q \in I(L,U)\right\}$ は, 次の方程式の一意の解 λ として与えられる:

$$U(b-\lambda c)^{+}+L(b-\lambda c)^{-}=0 \tag{5}$$

但し, 任意の関数 $g(\theta)$ に対して

$$g^{+}(\theta)=\max\{g(\theta),0\}, g^{-}(\theta)=\min\{g(\theta),0\} \tag{6}$$

$X=x$ を観測したときの事前測度 Q の事後測度 Q_x は $Q_x(A)=\int_A f(x \mid \theta)Q(d\theta)$ $(A \in \mathcal{B})$ で与えられる (cf. [3]). このとき, 事後測度の全体 $\{Q_x \mid Q \in I(L,Q)\}$ はやはり区間として与えられることが次で述べられる.

補題 2([3])

$$\{Q_x \mid Q \in I(L,Q)\}=I(L_x,U_x) \tag{7}$$

但し,

$$L_x(A)=\int_A f(x \mid \theta)dL, U_x(A)=\int_A f(x \mid \theta)dU \qquad (A \in \mathcal{B}) \tag{8}$$

3 事後測度区間 α-パーセンタイル

この節では, 適応型の区間管理図の構成を可能にするために, 測度区間の α-パーセンタイルを定義する. さらに, 事前測度区間をルベーグ測度で規定し, §2 の補題 1,2 を用いて事後測度区間の α-パーセンタイルを具体的に求めて行く.

仮定 A

事前測度 Q は, 区間 $I(L,kL)$ に含まれる. 即ち,

$$Q \in I(L,kL) \tag{9}$$

但し, L は $(\Theta,\mathcal{B})$ 上のルベーグ測度で, k は正の定数である.

いま, $X=x$ が与えられたときの事後測度区間 $I(L_x,kL_x)$ の α-パーセンタイルを定義しよう. 正の数 a に対して次を定める.

$$\underline{g}_a(\theta):=1_{(-\infty,a]}(\theta), \bar{g}_a(\theta):=1_{[a,\infty)}(\theta) \tag{10}$$

但し, 1_A は集合 A の指示関数で

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A), \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

である.

次を定義する:

$$\underline{\lambda}(a \mid x) := \sup\left\{ \frac{Q(\underline{g}_a)}{Q(1)} \mid Q \in I(L_x, kL_x) \right\} \tag{11}$$

$$\overline{\lambda}(a \mid x) := \sup\left\{ \frac{Q(\overline{g}_a)}{Q(1)} \mid Q \in I(L_x, kL_x) \right\} \tag{12}$$

但し, $1 = 1_{(-\infty,\infty)}$ である.

任意の $0 < \alpha < 1$ に対して, $\underline{\lambda}(\underline{p}_\alpha \mid x) = \alpha, \overline{\lambda}(\overline{p}_\alpha \mid x) = \alpha$ を満たす $\underline{p}_\alpha = \underline{p}_\alpha(x), \overline{p}_\alpha = \overline{p}_\alpha(x)$ を考える. このとき

$$\frac{Q((-\infty, \underline{p}_\alpha])}{Q(1)} \le \alpha, \frac{Q([\overline{p}_\alpha, \infty))}{Q(1)} \le \alpha \quad (Q \in I(L_x, kL_x))$$

が成り立つので, $\underline{p}_\alpha, \overline{p}_\alpha$ をそれぞれ下側および上側区間 α-パーセンタイルと呼ぼう.

$\underline{p}_\alpha, \overline{p}_\alpha$ を求めるために次の補題が必要である.

補題 3 (11) および (12) で与えられた $\underline{\lambda}, \overline{\lambda}$ は次で与えられる:

$$\underline{\lambda}(a \mid x) = \frac{k\psi(\frac{a-x}{\sigma_0})}{1 + (k-1)\psi(\frac{a-x}{\sigma_0})} \tag{13}$$

$$\overline{\lambda}(a \mid x) = \frac{k(1 - \psi(\frac{a-x}{\sigma_0}))}{k - (k-1)\psi(\frac{a-x}{\sigma_0})} \tag{14}$$

但し, $\psi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

証明

補題 1 と (11) より $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}(a \mid x)$ は次の方程式の解として得られる.

$$k\int_{-\infty}^{a} (1-\lambda)^+ f(\theta \mid x) d\theta + k\int_{a}^{\infty} (-\lambda)^+ f(\theta \mid x) d\theta + \int_{-\infty}^{a} (1-\lambda)^- f(\theta \mid x) d\theta + \int_{a}^{\infty} (-\lambda)^- f(\theta \mid x) d\theta = 0 \tag{15}$$

$0 \le \lambda \le 1$ より

$$(1-\lambda)^- = 0, (-\lambda)^- = -\lambda, (1-\lambda)^+ = 1-\lambda, (-\lambda)^+ = 0 \tag{16}$$

故に

$$k(1-\lambda)\int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta - \lambda\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} k\int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta &= \lambda\left(k\int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta + \int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta\right) \\ &= \lambda\left(1+(k-1)\int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta\right). \end{aligned}$$

λ について解くと,

$$\lambda = \frac{k\int_{-\infty}^{a} f(x \mid \theta)d\theta}{1+(k-1)\int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta}$$

これは, (13) を意味する.
また, $\overline{\lambda} = \overline{\lambda}(a \mid x)$ は次の方程式の解として得られる.

$$\begin{aligned} k\int_{-\infty}^{a}(-\lambda)^{+} f(\theta \mid x)d\theta + k\int_{a}^{\infty}(1-\lambda)^{+} f(\theta \mid x)d\theta + \\ \int_{-\infty}^{a}(-\lambda)^{-} f(\theta \mid x)d\theta + \int_{a}^{\infty}(1-\lambda)^{-} f(\theta \mid x)d\theta = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$0 \le \lambda \le 1$ により, 上と同様に式 (16) から

$$k(1-\lambda)\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta - \lambda\int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta = 0$$

$$\begin{aligned} k\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta &= \lambda\left(k\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta + \int_{-\infty}^{a} f(\theta \mid x)d\theta\right) \\ &= \lambda\left(1+(k-1)\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta\right) \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{k\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta}{1+(k-1)\int_{a}^{\infty} f(\theta \mid x)d\theta} = \frac{k(1-\psi(\frac{a-x}{\sigma_0}))}{1+(k-1)(1-\psi(\frac{a-x}{\sigma_0}))} = \frac{k(1-\psi(\frac{a-x}{\sigma_0}))}{k-(k-1)\psi(\frac{a-x}{\sigma_0})}$$

従って, (14) を得る. □

補題 3 より, 次の定理を得る.

定理 1 下側および上側の α-パーセンタイル $\underline{p}_\alpha, \overline{p}_\alpha$ は次で与えられる:

$$\underline{p}_\alpha(x) = x + \sigma_0\psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right) \quad (18)$$

$$\overline{p}_\alpha(x) = x + \sigma_0\psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right) \quad (19)$$

証明

$\underline{p}_\alpha(x)$ の定義により $\underline{p}_\alpha(x)$ は次の a についての等式の解である.

$$k\psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)=\alpha\left(1+(k-1)\psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)\right)$$

$$\psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)=\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}$$

$$\frac{a-x}{\sigma_0}=\psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1+\alpha)k+\alpha}\right)$$

$$a=x+\sigma_0\psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)$$

$\therefore$(18) を得る.

(14) より $\overline{p}_\alpha$ は次の a についての等式の解である.

$$k\left(1-\psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)\right)=\alpha k-\alpha(k-1)\psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)$$

$$\psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)=\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}$$

$$a=x+\sigma_0\psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)$$

$\therefore$(19) を得る. □

定理 1 によって与えられた $\underline{p}_\alpha, \overline{p}_\alpha$ は明らかに次の不等式を満足する.

系 1 任意の $Q\in I(L,kL)$ に対して

$$\frac{Q_x((-\infty,\underline{p}_\alpha])}{Q_x(1)}\leq\alpha, \tag{20}$$

$$\frac{Q_x([\overline{p}_\alpha,\infty])}{Q_x(1)}\leq\alpha. \tag{21}$$

4 管理図への応用

ここでは, §3 で求められた下側および上側区間パーセンタイルを用いて区間ベイズによる管理を与える. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ を正規母集団 $N(\theta,\sigma_0^2)$ から大きさ n の無作為標本とする. 但し, σ_0^2 は既知とする. このとき, $\overline{X}\sim N\left(\theta,\frac{\sigma_0^2}{n}\right)$ となる.

次の仮説を考える.

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$
$$(H_2 : \theta > \theta_0)$$

$\overline{X} = x$ のとき, 下側 α-パーセンタイル $\underline{p}_\alpha(x)$ の定義から, 仮説 H_0 の対立仮説 H_1 に対する任意の $Q_x \in I(L_x, kL_x)$ の有意水準 α 以下の棄却域は $(-\infty, \underline{p}_\alpha(x)]$ となる.

同様に, 仮説 H_0 の対立仮説 H_2 に対する棄却域は, $[\overline{p}_\alpha(x), \infty)$ となる.

補題 3 より次を得る:

$$\theta_0 \le \underline{p}_\alpha(x) \iff x \le \theta_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)$$

$$\theta_0 \ge \overline{p}_\alpha(x) \iff x \ge \theta_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)$$

従って, 区間ベイズ法による 1 つの合理的な管理方法として, 有意水準 2α の一様最小棄却域が次のように得られる:
任意の $x \in (-\infty, \infty)$ に対して, 次の区間 $D(\alpha, k, n)$ を定義する:

$$D(\alpha,k,n) := \left[\theta_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right), \theta_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)\right]$$

このとき, 管理方式としては $\overline{X} = x$ のとき:

$$\begin{cases} x \in D \text{ ならば ''Continue production''} \\ x \notin D \text{ ならば ''Stop and investigate''} \end{cases}$$

となる.

表 1 は, ψ^{-1} に関する表で, 表中で $k = 1$ の場合の列の数字はちょうど標準正規分布の 2α 点を表している. 表 2 は, サンプル数 $n = 5$ の場合の管理区間 $D(\alpha, k, 5)$ であり, 表 3 は $n = 20$ の場合の管理区間 $D(\alpha, k, 20)$ である. 事前測度区間としてルベーグ測度 L を用いた $I(L, kL)$ を考えているので, $k = 1$ のときは $I(L, L) = \{L\}$ となり, 事前測度としてルベーグ測度 (improper) を仮定していることになる. この場合, 例えば $\alpha = 0.025$ のとき, 管理区間は $(-1.96, 1.96)$ となるが, このことは表 1 から確かめられる. 一般に, k が増加すれば管理区間は集合の包含関係のもとで増加する. 良く用いられる 3 シグマ管理図には, $k = 1, \alpha = 0.00135$ の場合が対応している. 表 1 から, ベイズ区間管理図において 3 シグマ管理図は, $k = 4, \alpha = 0.005$ に相等していることがわかる. n の取り方から容易にわかるように, 表 3 のそれぞれの管理区間は表 2 の区間の半分になっている.

表 1: $\left(\psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right), \psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)\right)$ の表

α \ k	1	2	3	4	5	10
0.1	−1.282,1.282	−1.620,1.620	−1.803,1.803	−1.926,1.926	−2.019,2.019	−2.291,2.291
0.05	−1.645,1.645	−1.949,1.949	−2.114,2.114	−2.227,2.227	−2.311,2.311	−2.560,2.560
0.025	−1.960,1.960	−2.237,2.237	−2.388,2.388	−2.491,2.941	−2.569,2.569	−2.800,2.800
0.005	−2.576,2.576	−2.806,2.806	−2.934,2.934	−3.022,3.022	−3.089,3.089	−3.289,3.289
0.00135	−3.000,3.000	−3.205,3.205	−3.320,2.320	−3.399,3.399	−3.460,3.460	−3.642,3.642

表 2: $H_0 : \theta_0 = 0, \sigma_0 = 1$ のときの $D(\alpha, k, 5)$ の表

α \ k	1	2	3	4	5	10
0.1	−0.573,0.573	−0.724,0.724	−0.806,0.806	−0.862,0.862	−0.903,0.903	−1.024,1.024
0.05	−0.736,0.736	−0.872,0.872	−0.946,0.946	−0.996,0.996	−1.034,1.034	−1.145,1.145
0.025	−0.877,0.877	−1.000,1.000	−1.068,1.068	−1.114,1.114	−1.149,1.149	−1.252,1.252
0.005	−1.152,1.152	−1.255,1.255	−1.312,1.312	−1.352,1.352	−1.381,1.381	−1.471,1.471
0.00135	−1.342,1.342	−1.433,1.433	−1.485,1.485	−1.520,1.520	−1.547,1.547	−1.629,1.629

表 3: $H_0 : \theta_0 = 0, \sigma_0 = 1$ のときの $D(\alpha, k, 20)$ の表

α \ k	1	2	3	4	5	10
0.1	−0.287,0.287	−0.362,0.362	−0.403,0.403	−0.431,0.431	−0.451,0.451	−0.512,0.512
0.05	−0.368,0.368	−0.436,0.436	−0.473,0.473	−0.498,0.498	−0.517,0.517	−0.572,0.572
0.025	−0.438,0.438	−0.500,0.500	−0.534,0.534	−0.557,0.557	−0.574,0.574	−0.626,0.626
0.005	−0.576,0.576	−0.627,0.627	−0.656,0.656	−0.676,0.676	−0.691,0.691	−0.736,0.736
0.00135	−0.671,0.671	−0.717,0.717	−0.742,0.742	−0.760,0.760	−0.774,0.774	−0.814,0.814

参考文献

[1] J. A. Bather. Control charts and minimization of costs. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 25:49–80, 1963.

[2] Robert V. Baxley, Jr. An application of variable sampling interval control charts. *Journal of Quality Technology*, 27(4):275–282, 1995.

[3] Lorraine De Robertis and J. A. Hartigan. Bayesian inference using intervals of measures. *Ann. Statist.*, 9(2):235–244, 1981.

[4] M. A. Girshick and Herman Rubin. A Bayes approach to a quality control model. *Ann. Math. Statistics*, 23:114–125, 1952.

[5] E. L. Porteus and A. Angelus. Opportunities for improved statistical process control. *Management Sci.*, 43:1214–1228, 1997.

[6] Marion R. Reynolds, Jr., Jesse C. Arnold, Raid W. Amin, and Joel A. Nachlas. $\overline{X}$ charts with variable sampling intervals. *Technometrics*, 30(2):181–192, 1988.

[7] George Tagaras. A dynamic programming approach to the economic design of X-charts. *IIE Trans.*, 26(3):48–56, 1994.

[8] George Tagaras. Dynamic control charts for finite production runs. *Europian J. Oper. Res.*, 91:38–55, 1998.

[9] George Tagaras and Yiannis Nikolaidis. Comparing the effectiveness of various Bayesian $\overline{X}$ control charts. *Oper. Res.*, 50(5):878–888, 2002.

[10] Howard M. Taylor. Markovian sequential replacement processes. *Ann. Math. Statist.*, 36:1677–1694, 1965.

[11] Howard M. Taylor. Statistical control of a Gaussian process. *Technometrics*, 9:29–41, 1967.

[12] Jiro Yamauchi. *Statictical table and formulas with computer applications JSA-1972.* Japanese Standerds Association, 1972.

[13] 朝香 鐵一 ほか. **新版品質管理便覧第 *2* 版**. 日本規格協会, 1988.

[14] 棟近 雅彦. **品質管理セミナー・ベーシックコース・テキスト 統計的方法編 *(*第 *6* 章管理図*)***. 日本科学技術連盟, 1997.

[15] 宮沢 光一. **情報・決定理論序説**. 岩波書店, 1971.

[16] 繁桝 算男. **ベイズ統計入門**. 東京大学出版会, 1985.

[17] 芳賀 敏郎. マハラノビスの距離. *27MA* **研究資料** *N0.20*, 1998.

[18] 佐々木 稔. **適応型の管理図とその品質マネジメントシステムへの応用に関する研究**. 放送大学大学院文化科学研究科修士論文, 2004.

[19] シューハート (白崎 文雄 訳). **工業製品の経済的品質管理**. 日本規格協会, 1951.

[20] 渡部 洋. **ベイズ統計学入門**. 福村出版, 1999.

[21] 葛谷 和義. 活用多変量管理図ー要求品質特性の工程管理ー. In **第 *24* 回多変量解析シンポジウム**, pages 89–96. 日本科学技術連盟, 2001.