数理解析研究所講究録
第 1593 巻 2008 年 113-121

More about Euclidean designs

坂内悦子　(九大・数理)

はじめに

ユークリッド空間のデザインの概念は Neumaier-Seidel ([14]) によって球デザインの拡張として 1988 年に定義された. Delsarte-Seidel ([11]) により $2e$-デザインの場合及び antipodal な場合の $(2e+1)$-デザインに含まれる点の個数の下界が与えられ, tight なデザインの定義が与えられた. 一方, 解析学の研究者である Möller は cubature formula を与える点の個数の自然な下界を得ていた. その下界は ユークリッド空間のデザインにも適用できるものであった. Seidel をはじめとする組合せ論の研究者達は Möller の結果に気が付かなかった. そのためユークリッド空間のデザインの tight 性に関する定義が条件付きでしかなされていなかったのである. 昨年 (平成１８年) になって名古屋大の澤さん, 平尾さん達との交流を通じて Möller の結果に出会うことができ, ユークリッド空間のデザインの tight 性をより自然な形で定義することができる様になった. これらのことに関しては第２４回代数的組合せ論シンポジウムの報告集に解説を加えているので, そちらを参照していただけるとありがたい.

上に述べた様にユークリッド空間のデザインの tight 性が自然な形で定義される様になり, ユークリッド空間の tight な t-デザインの分類問題に本気で取りかかる機運が生まれ, そのために, 球面上の t-デザインに関する Delsarte-Goethals-Seidel [10] の論文に使われた手法を再検討した. 彼らは球面上の t-デザイン X が s-距離集合でありかつ $t \geq 2s-2$ という条件を満たしているならば X は Q-多項式アソシエーションスキームの構造を持つことを証明している. 私達はこの結果を少し拡張することに成功した. 既に第１９回有限群論草津セミナー (８月) の報告集で X が球面上の antipodal な t-デザインかつ s-距離集合であり, $t \geq 2s-3$ を満たすならば X は association scheme の構造を持つことを示すことができたとアナウンスし特に $t=5$ $s=4$ の場合は X は Q-多項式スキームの構造を持つことを紹介した.

今回の数理研での「有限群と代数的組合せ論」研究集会では, 一般に $t \geq 2s-3$ を満たす antipodal な球面上の t-design かつ s-距離集合は Q-多項式スキームの構造を持つことを紹介した. さらに Delsarte-Goethals-Seidel の手法はユークリッド空間のデザインに対しても適用でき, 詳しい条件は後で述べるが (実は研究集会の際に与えた条件は少し不正確であったのでこの報告では正確に記述を与える), ユークリッド空間のデザインはそれをサポートする球面の個数があまり多くないのであれば coherent configuration の構造を持つことを紹介する.

この研究は坂内英一との共同研究である.

球面上の t-デザインの定義と基本的な事実

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の標準内積を $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ とし, $\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ とする. $S^{n-1} = \{\boldsymbol{x} \in$

$\mathbb{R}^n \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$ を原点を中心とする $\mathbb{R}^n$ の単位球面とする. 次に n 変数の多項式の作るベクトル空間に関する記号を少し定義しておく. $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を n 変数の多項式の作るベクトル空間とする. $\mathrm{Hom}_l(\mathbb{R}^n)$ を l 次の斉次多項式が張る $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間とする. さらに,

$$\mathcal{P}_e(\mathbb{R}^n) = \oplus_{l=0}^{e}\mathrm{Hom}_l(\mathbb{R}^n)$$
$$\mathcal{P}_e^*(\mathbb{R}^n) = \oplus_{l=0}^{[\frac{e}{2}]}\mathrm{Hom}_{e-2l}(\mathbb{R}^n)$$

と置く. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 Y に対して $\mathcal{P}(Y) = \{f|_Y \mid f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)\}$, $\mathcal{P}_e(Y) = \{f|_Y \mid f \in \mathcal{P}_e(\mathbb{R}^n)\}$, $\mathcal{P}_e^*(Y) = \{f|_Y \mid f \in \mathcal{P}_e^*(\mathbb{R}^n)\}$ と表す.

定義 1 球面 $S^{n-1}(\subset \mathbb{R}^n)$ 上の有限集合 X は次の条件を満たすときに球面上の t-デザインと呼ぶ.

$$\frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{S^{n-1}} f(\boldsymbol{x})d\sigma(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{|X|}\sum_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x})$$

が任意の $f \in \mathcal{P}_t(\mathbb{R}^n)$ 対して成り立つ. 左辺の積分は通常の球面積分である.

球面上の t-design X の点の個数に関しては次の定理が証明されている.

定理 2 (Delsarte-Goethals-Seidel [10])

(1) X を球面上の $2e$-デザイン とすると

$$|X| \geq \dim(\mathcal{P}_e(S^{n-1})) = \binom{n+e-1}{e} + \binom{n+e-2}{e-1}$$

(2) X を球面上の $(2e+1)$-デザイン とすると

$$|X| \geq 2\dim(\mathcal{P}_e^*(S^{n-1})) = 2\binom{n+e-1}{e}$$

定理 2 において等号が成り立つときに X は球面上の tight t-デザイン と呼ばれる.

Seymour-Zaslavsky [15] の結果により t と n を任意に固定したときにある実数 $N(t,n)$ が存在して $N \geq N(t,n)$ となる任意の N に対して $|X| = N$ となる球面上の t-デザインが存在することが知られている. 従って私達の興味は X に含まれる点の個数をできるだけ小さくすることに注がれている. すなわち tight もしくはそれに近いものの分類に興味を持っている. また, それらのものは組合せ論的に非常に良い性質を持っているのである.

一般に球面上の s-距離集合 X の点の個数 $|X|$ は

$$|X| \leq \binom{n+s-1}{s} + \binom{n+s-2}{s-1}$$

を満たすことが知られている ([10]). 従って, X が 球面上の t-デザインであり s-距離集合であれば $t \leq 2s$ を満たしている. 球面上の t-デザインは s-距離集合である時に次数が s であると言う.

球面上の次数 s の t-デザインは t の値が $2s$ に近いときに tight なものに近いと考えることもできる. Delsarte-Goethals-Seidel は次の定理を証明している ([10]).

定理 3 (Delsarte-Goethals-Seidel) 球面 S^{n-1} 上の t-デザイン X の次数が s であり，さらに $t \geq 2s-2$ が成り立つならば X は Q-多項式スキームの構造を持つ.

私達はこの定理を antipodal という条件を加えることで $t \geq 2s-3$ の場合に拡張した.

球面上の untipodal な次数 s の t-デザインに関する結果

定理 4 (B-B[5]) 球面 S^{n-1} 上の *antipodal* な t-デザイン X の次数が s であり，さらに $t \geq 2s-3$ が成り立つならば X は Q-多項式スキームの構造を持つ.

定理 5 (B-B[5]) $P=(P_j(i))$, $Q=(Q_j(i))$ をアソシエーションスキーム X の第 1 および第 2 固有行列とする. $q_{i,j}^k$, $0 \leq i,j,k \leq s$ を *Krein* 数とする. 隣接行列 D_0, D_1, …, D_s および原始ベキ等行列からなる基底 $E_0, E_1, \ldots, E_s$ の並べ方を適当に定めることにより以下のことが成り立つ.

(1) $P_1(i)=(-1)^i$, $0 \leq i \leq s$.

(2) $Q_j(2i+1)=(-1)^j Q_j(2i)$, $1 \leq 2i+1 \leq s$ *and* $0 \leq j \leq s$. さらにもし s が偶数であれば $1 \leq j \leq s-1$ を満たす任意の奇数 j に対して $Q_j(s)=0$.

(3) $m_i = Q_i(0) = \binom{n+i-1}{i} - \binom{n+i-3}{s-2}$, $0 \leq i \leq s-2$,
$m_{s-1} = Q_{s-1}(0) = \frac{|X|}{2} - \binom{n+s-4}{s-3}$,
$m_s = \frac{|X|}{2} - \binom{n+s-3}{s-2}$.

(4) $0 \leq \mu, i, j \leq s$ と $\mu+i+j=0$ を満たす任意の μ, i, j に対して $q_{\mu,i}^j = 0$.

(5) *dual intersection matrix* $B_1^* = (q_{1,i}^j)$ （3 重対角行列）は

$$B_1^* = \begin{bmatrix} * & c_1^* & \cdots & c_{s-1}^* & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & b_1^* & \cdots & b_{s-1}^* & * \end{bmatrix}$$

と表される. ただし

$c_i^* = q_{1,i-1}^i = \frac{ni}{n+2i-2}$, $i=1,\ldots,s-2$,

$b_i^* = q_{1,i}^{i-1} = \frac{n(n+i-3)}{n+2i-4}$, $i=1,\ldots,s-3$,

$c_{s-1}^* = q_{1,s-2}^{s-1} = \frac{2n(n-1)(n+s-4)!}{(s-2)!(n-1)!|X|-2(s-2)(n+s-4)!}$

$b_{s-2}^* = q_{1,s-1}^{s-2} = \frac{n(n+s-4)}{n+2s-6}$,

$b_{s-1}^* = q_{1,s}^{s-1} = \frac{(s-2)!n!|X|-2n(n+s-3)!}{(s-2)!(n-1)!|X|-2(s-2)(n+s-4)!}$

となる.

定理 4 の証明の概略

定理 4 の概略を述べるために少し記号を定義する．まず調和多項式全体が作る $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の部分空間を $\mathrm{Harm}(\mathbb{R}^n)$ とし $\mathrm{Harm}_l(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Harm}(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{Hom}_l(\mathbb{R}^n)$ とする．$\mathrm{Harm}(\mathbb{R}^n)$ には S^{n-1} 上での積分を用いた内積を定義しておく．すなわち

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} \varphi(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x})d\sigma(\boldsymbol{x}).$$

この内積に関して $\mathrm{Harm}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\mathrm{Harm}(\mathbb{R}^n) = \perp_{l=0}^{\infty} \mathrm{Harm}_l(\mathbb{R}^n)$$

と直交分解されることは良く知られている．$\varphi_{l,1}, \ldots, \varphi_{l,h_l}$ をこの内積に関する $\mathrm{Harm}_l(\mathbb{R}^n)$ の正規直交基底とする．次に球面 S^{n-1} に対応する l 次の Gegenbauer 多項式を $\tilde{Q}_l(x)$ とする．ただし $\tilde{Q}_l(1) = \dim \mathrm{Harm}_l(\mathbb{R}^n)$ となる様に正規化しておく．

定理 4 の X は antipodal であり，次数 s であるので $A(X) = \{\alpha_i \mid 1 \le i \le s\}$, $-1 \le \alpha_i < 1$ となる実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ が存在する．ただし $\alpha_1 = -1$ とする．s が奇数であれば $\alpha_{2i+1} = -\alpha_{2i}$, $\alpha_{2i} > 0$, $i = 1, \ldots, \frac{s-1}{2}$ s が偶数であれば $\alpha_{2i+1} = -\alpha_{2i}$, $\alpha_{2i} > 0$, $i = 1, \ldots, \frac{s-2}{2}$, $\alpha_s = 0$ が成り立っている．$\alpha_0 = 1$ と定義しておく．

定理 4 の X を特徴づける行列 H_l を次の様に定義する．H_l の行は X で，列は $\varphi_{l,i}$, $1 \le i \le h_l$ で添字づける．その $(\boldsymbol{x}, i)$-成分を

$$H_l(\boldsymbol{x}, i) = \varphi_{l,i}(\boldsymbol{x})$$

とする．また，定理 4 の X のアソシエーションスキームの隣接行列となるはずの行列 D_l を

$$D_l(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \alpha_l \text{ の時,} \\ 0, & \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \ne \alpha_l \text{ の時,} \end{cases}$$

で定める．

定理の証明には次の二つの命題が重要な役割をはたす．詳しくは [10, 3] を参照して下さい．

命題 6 X が球面 S^{n-1} 上の t-デザインであることと次の条件が成り立つことは同値である．

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in X} \varphi(\boldsymbol{x}) = 0$$

が任意の $\varphi \in Harm_l(\mathbb{R}^n)$, $1 \le l \le t$ に対して成立する．

命題 7 (Gegenbauer 多項式の加法公式)

$$\sum_{i=1}^{h_l} \varphi_{l,i}(\boldsymbol{x})\varphi_{l,i}(\boldsymbol{y}) = \tilde{Q}_l(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$$

が任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^{n-1}$ に対して成立する．

命題 6 と 命題 7 は次の命題を与える．

命題 8 X を S^{n-1} 上の *antipodal* な 次数 s の t-デザインとする.

(1) $0 \le k+l \le t$ を満たす任意の k, l に対して ${}^tH_k\ H_l = \delta_{k,l}|X|I$ が成り立つ.

(2) 任意の非負整数 k に対して $H_k\ {}^tH_k = \sum_{l=0}^{s} \tilde{Q}_k(\alpha_l)D_l$ が成り立つ.

(3) $0 \le k \le s$ を満たす任意の整数 k に対して $H_k\ {}^tH_k \neq 0$ が成り立つ.

次の記号を導入しておく：

$$p_{i,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sharp\{\boldsymbol{z} \in X \mid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} = \alpha_i, \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{y} = \alpha_j\}.$$

命題 8 により $0 \le k+l \le t$ を満たす任意の非負整数 k, l に対して,

$$(H_k\ {}^tH_k)(H_l\ {}^tH_l) = \delta_{k,l}|X|{}^tH_k\ H_k$$

従って

$$\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s}\tilde{Q}_k(\alpha_i)\tilde{Q}_l(\alpha_j)D_iD_j = \delta_{k,l}|X|\sum_{\nu=0}^{s}\tilde{Q}_k(\alpha_\nu)D_\nu$$

を得る. この両辺の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$-成分を計算すると $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \alpha_\nu$ の時 左辺は,

$$\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{s}\tilde{Q}_k(\alpha_i)\tilde{Q}_l(\alpha_j)p_{i,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

となり, 右辺は $\delta_{k,l}|X|\tilde{Q}_k(\alpha_\nu)$ となる. $i, j \in \{0, 1\}$ の場合は $p_{i,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の値は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \alpha_\nu$ であれば $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ の選び方によらず一意に定まるので, Gegenbauer 多項式達の一次独立性等を利用すると, $t \ge 2s-3$ を満たすならばこの様な t-デザインが存在すれば $p_{i,j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を変数とする連立 1 次方程式の解は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ の選び方によらず i, j および $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \alpha_\nu$ を満たす ν に対して一意に定まることが証明できる. すなわち $D_0, \ldots, D_s$ がアソシエーションスキームの隣接行列になることがわかる. さらに Gegenbauer 多項式の対称性と一次独立性を用いることにより X が Q-多項式スキームになることがわかり dual intersection numbers $q_{i,j}^k$ 達も計算できる. ∎

以上に述べたことはユークリッド空間のデザインの研究を進める行程で再び球面上のデザインに関する理論を復習することにより得られたのであるが, 用いられた Delsarte-Goethals-Seidel 手法はさらにユークリッド空間のデザインに適用される.

ユークリッド空間の t-デザインの定義および基礎的な事実

X を $\mathbb{R}^n$ の有限部分集合とする. $\{\|\boldsymbol{x}\| \mid \boldsymbol{x} \in X\} = \{r_1, r_2, \cdots, r_p\}$ と置く. すなわち X は原点を中心とする丁度 p 個の球面達と共有点を持っている. X は原点を含んでいる（すなわち $r_i = 0$ となる i が存在する）可能性もあるとする. $S_i = \{\boldsymbol{x} \mid \|\boldsymbol{x}\| = r_i\}$, $X_i = X \cap S_i$, $i = 1, \ldots, p$ とし $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_p$ と定義する. この時 X は p 個の同心球面でサポートされているという.

$r_i, r_j > 0$ となる i, j に対して

$$A(X_i, X_j) = \{\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|} \mid \boldsymbol{x} \in X_i,\ \boldsymbol{y} \in X_j,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}\}$$

とし，$s_{i,j} = |A(X_i, X_j)|$ と置く．

注意： 特に $A(X_i) = A(X_i, X_i)$，$s_i = s_{i,i}$ と置くと X_i は s_i-距離集合となっている．

さらに X 上には正数値の weight 関数 w が定義されているとする．

定義 9 (Neumaier-Seidel, 1988 [14]) $\mathbb{R}^n$ の有限部分集合と正の *weight function* w の組 (X, w) は自然数 t について次の条件が成り立つ時にユークリッド空間の t-デザインと呼ばれる．

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{w(X_i)}{|S_i|} \int_{S_i} f(\boldsymbol{x}) d\sigma_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{x} \in X} w(\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{x})$$

が全ての $f \in \mathcal{P}_t(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ．ここで，$w(X_i) = \sum_{x \in X_i} w(x)$ である．

Möller が cubature formula に関してもっと一般的な形で証明した定理をユークリッド空間の t-デザインについて応用すると次の定理が得られる．

定理 10 (Möller, 1976 [12]（[13] も参照））
(i) ユークリッド空間の $2e$-デザイン X に対して次の不等式が成り立つ．

$$|X| \geq \dim(\mathcal{P}_e(S)).$$

(ii) ユークリッド空間の $(2e+1)$-デザイン X に対して次の不等式が成り立つ．
(a) e が奇数の時，または，e が偶数で $0 \notin X$ の時

$$|X| \geq 2\dim(\mathcal{P}_e^*(S)).$$

(b) e が偶数で $0 \in X$ の時

$$|X| \geq 2\dim(\mathcal{P}_e^*(S)) - 1.$$

注意： Delsarte-Seidel は定理 10(i) および X が antipodal かつ w が原点に関して対称であるという条件下で定理 10(ii) を証明している ([11])．

定理 10 で等号が成り立つときに X は p 個の同心球面上の tight t-デザインと呼ぶ．さらに $\dim(\mathcal{P}_e(S)) = \dim(\mathcal{P}_e(\mathbb{R}^n))$ または $\dim(\mathcal{P}_e^*(S)) = \dim(\mathcal{P}_e^*(\mathbb{R}^n))$ が成り立つときにユークリッド空間の tight な t-デザインであるという．

定理 11 (Möller, B-B-Hirao-Sawa[7]) (X, w) を p 個の同心球面上の *tight* $(2e+1)$-デザインとする．この時次が成り立つ．
(i) e が奇数であるか，または，e が偶数で $0 \in X$ を満たすならば X は *antipodal* かつ w は原点に関して対称である．
(ii) e が偶数で $0 \notin X$ かつ，$p \leq \frac{e}{2} + 1$ であれば X は *antipodal* かつ w は原点に関して対称である．

注意： 定理 11(ii) はもう少しゆるい条件で成立するが，ここでは簡単のため強い条件で記述した．詳しくは [7] を参照して下さい．

次の補題は実質的に [4]，[8] で証明されている．

補題 12 (B-B[4],B[8])
(1) X を S 上の *tight* $2e$-デザインとすると次の事が成り立つ.
(i) w は各 X_i $(1 \le i \le p)$ 上で一定の値をとる.
(ii) 任意の $1 \le i, j \le p$ に対して $s_{i,j} \le e$.
(iii) 特に $p = 2$ かつ $X_i \ne \{0\}$ であれば X_i は球面上の $(2e-2)$-デザインである.
(2) X を S 上の *tight* $(2e+1)$-デザインとする. さらに X が *antipodal* かつ $w(x)$ が原点に対して対称であれば次の事が成り立つ.
(i) w は各 X_i $(1 \le i \le p)$ 上で一定の値をとる.
(ii) 任意の $1 \le i \le p$ に対して $s_{i,i} \le e+1$.
(iii) 任意の $1 \le i \ne j \le p$ に対して $s_{i,j} \le e$.
(iv) 特に $p = 2$ かつ $X_i \ne \{0\}$ であれば X_i は球面上の $(2e-1)$-デザインである.

補題 12 で見た様に p 個の同心球面上の tight な $2e$ または $(2e+1)$-デザイン X に対しては weight 関数は各 X_i 上で定数関数になっている（t が奇数のときは球面の個数があまり多くない時にはという条件がつくが）. さらに $s_{i,j} \le e$ とか $s_{i,i} \le e+1$ とかが成り立っている.

これまでに tight なデザインの面白い例が色々見つかっているがそのどれをとっても coherent configuration の構造を持っている様であった（見つかった全ての場合に調べた訳ではないが）([1], [2], [4], [7], [8],[9]).

そこで定理 4 の証明に用いた方法がユークリッド空間のデザインに対しても使えるのではないかと考えた.

Gegenbauer 多項式の和公式はユークリッド空間まで拡張して考えるとノルム $\|x\|$ の処理に困っていたが, うまく処理することによりユークリッド空間のデザインについて定理 4 の類似の定理が証明できた.

ユークリッド空間のデザインと coherent configuration に関する結果

定義 13 (coherent configuration) X を有限集合とし, $R_1, R_2, \ldots, R_l \subset X \times X$ とする. $\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{1 \le i \le l})$ は次の *(1)〜(4)* の条件を満たすときに *coherent configuration* と呼ばれる.

(1) $X \times X = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_l$ は分割を与えている.

(2) $^\exists p$ *s.t.* $1 \le p < l$, $R_1 \cup \cdots \cup R_p = \{(x,x) \mid x \in X\}$.

(3) 各 i に対して ${}^tR_i = R_{i'}$, $1 \le i' \le l$ となる i' が存在する
(ただし ${}^tR_i := \{(x,y) \mid (y,x) \in R_i\}$*)*

(4) $\{z \in X \mid (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}$ は $(x,y) \in R_k$ で定数（すなわち i, j, k のみに依存する）. この定数を $p_{i,j}^k$ と表す.

注意：条件 2 で $p = 1$ とするとアソシエーションスキームと同値になる.

Coherent configuration は 1960 年代後半に D. Higman により定義された. アソシエーションスキームは可移な置換群の性質を抽象したものであり, coherent configuration は必ずしも可移でない置換群の性質を抽象して定義されたのである.

定理 14 (B-B [6]) (1) X をユークリッド空間の t-*design* とする. *weight* 関数は各 X_i 上で定数関数であり, $s_{\lambda,\nu}+s_{\nu,\mu}\le t-2(p-2)$ が任意の λ, ν, μ $(1\le\lambda,\nu,\mu\le p)$ に対して成立すると仮定する. この時 X は *coherent configuration* の構造を持つ.

(2) X をユークリッド空間の *antipodal* な t-*design* とする. *weight* 関数は各 X_i 上で定数関数であり, $s_{\lambda,\nu}+s_{\nu,\mu}-\delta_{\lambda,\nu}-\delta_{\nu,\mu}\le t-2(p-2)$ が任意の λ, ν, μ $(1\le\lambda,\nu,\mu\le p)$ に対して成り立つと仮定する. この時 X は *coherent configuration* の構造を持つ.

複雑になるのでここでは証明を与えない. 補題 12 により二つの同心球面上の tight な t-デザインは定理 14 の仮定を満たしていることがわかる. 従って coherent configuration の構造を持っていることになる.

p 個の同心球面上の tight な t-デザインの分類問題を解決したいというのが私達の研究の一つの目標である. $p=2$ の場合は $A(X_i,X_j)$ に含まれる内積を与える式は計算可能であり, その様に求まった内積は定理 14 よりある種の整数条件を満たさなければならない. 2 個の同心球面上の tight な t-デザインの分類問題の解決に向けて少し道が開けてきたと考えている.

References

[1] B. Bajnok, *On Euclidean designs*, Advances in Geometry 6 (2006), no. 3, 423–438.

[2] B. Bajnok, *Orbits of the hyperoctahedral group as Euclidean designs*, J. Algebraic Combin. 25 (2007), no. 4, 375–397.

[3] Ei. Bannai and Et. Bannai, 球面上の代数的組合せ理論シュプリンガー東京, 1999.

[4] Ei. Bannai and Et. Bannai, *On Euclidean tight 4-designs*, J. Math. Soc. Japan 58 (2006), 775-804.

[5] Ei. Bannai and Et. Bannai, *On antipodal spherical t-designs of degree s with* $t\ge 2s-3$, arXiv:0802.2905

[6] Ei. Bannai and Et. Bannai, 準備中.

[7] Ei. Bannai, Et. Bannai, M. Hirao and M. Sawa, *Cubature formulas in numerical analysis and Euclidean tight designs,* preprint.

[8] Et. Bannai *On antipodal Euclidean tight* $(2e+1)$*-designs*, J. Algebraic Combin. 24 (2006), no. 4, 391–414.

[9] Et. Bannai *New examples of Euclidean tight 4-designs*, preprint.

[10] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geom. Dedicata 6 (1977), no. 3, 363–388.

[11] P. Delsarte and J. J. Seidel, *Fisher type inequalities for Euclidean t-designs*, Linear Algebra Appl. 114-115 (1989), 213-230.

[12] H. M. Möller, *Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl*, Numer. Math. 25 (1975/76), no. 2, 185–200.

[13] H. M. Möller, *Lower bounds for the number of nodes in cubature formulae*, Numerische Integration (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), 221–230, Internat. Ser. Numer. Math., 45, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1979.

[14] A. Neumaier and J. J. Seidel, *Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 91=Indag. Math. 50 (1988), 321-334.

[15] P. Seymour and T. Zaslavsky, *Averaging sets: A generalization of mean values and spherical designs,* Advs. in Math. 52 (1984), 213–240.