

# 水面孤立波の衝突, 追い越しの理論解 —片方の振幅が大きい場合—

神戸大学大学院・工学研究科・機械工学専攻 片岡 武 (Takeshi Kataoka)

Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Engineering  
Kobe University

## 要旨

水面孤立波の相互作用, 正面衝突および追い越し現象を, Euler 方程式系を基に調べ, 片方の振幅が大きくもう一方の振幅が小さい場合の理論解を求めた. 理論解の導出過程を示し, 導出した理論解をもとにして相互作用による位相のずれ, 放出波などについて論ずる.

## 1. 緒言

水面孤立波の相互作用である, 正面衝突および追い越し現象は, 古くから研究の対象とされてきた流体波動の古典的問題である. 本研究では, Euler 方程式系をもとにして, 片方の孤立波の振幅が大きい場合の理論解を導出する. これまでの理論的研究がいずれも両孤立波の振幅が小さい場合に限られている[1-3]ことから, この理論解は新しいものである. また数値的に大振幅孤立波の相互作用を調べた研究[4]は多々あるが, 本研究の4節で紹介するような物理的考察(例えば, 相互作用による解が孤立波の変調により表されること)を示した研究はない. またこれまでの数値的研究では本研究で見出された重要な結果(例えば, 両孤立波が共に前方へシフトし得るという事実)が見過ごされてきた. 以下では, 2節で問題設定と基礎方程式, 3節で解析, 4節で物理的考察を述べる.

## 2. 問題設定と基礎方程式

一様な重力加速度  $g$  が働く系において, 平らな底の上に横たわる平均有限深さ  $D$  の自由表面をもつ非圧縮性完全流体の空間 2 次元 (鉛直方向と水平一方向) 流れを考える (図 1 参照). ただし表面張力は無視し, 流れは渦なしであると仮定する. これ以降, 変数はすべて  $g, D,$  流体の密度により無次元化したものを使う. 解析の便宜上, 底が  $y = 0$  と一致するような空間直交座標  $x, y$  を導入すると, 支配方程式系は,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{for } 0 < y < \eta, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = \eta, \tag{2.2}$$

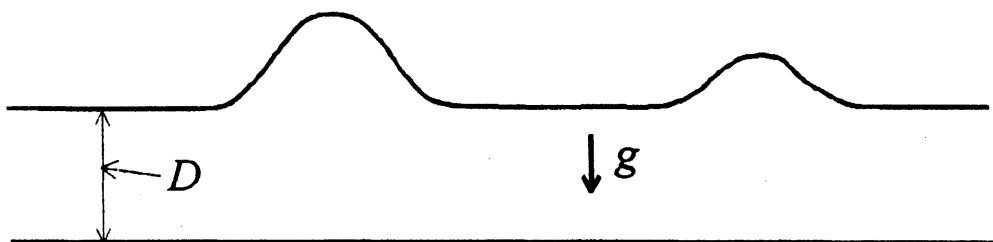


図 1 概略図

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right] + \eta = B(t) \quad \text{at } y = \eta, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0. \quad (2.4)$$

ただし,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.5)$$

$t$  は時間,  $\phi(x, y, t)$  は速度ポテンシャル,  $\eta(x, t)$  は底からの自由表面の高さ,  $B(t)$  は与えられた  $t$  の関数である.

(2.1)-(2.4)の解として, 次の形の定常解を考えよう:

$$\phi = -vx + \Phi(x, y), \quad \eta = H(x). \quad (2.6)$$

$$\left( B(t) = \frac{v^2}{2} + 1 \right)$$

ただし,  $\partial \Phi / \partial x$ ,  $\partial \Phi / \partial y$ ,  $H-1$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  で零に近づくとする. このとき  $\Phi$  と  $H$  の支配方程式系は,

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{for } 0 < y < H, \quad (2.7)$$

$$\left( -v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{dH}{dx} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = H, \quad (2.8)$$

$$-v \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] + H = 1 \quad \text{at } y = H, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad H-1 \rightarrow 0 \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty. \quad (2.11)$$

解(2.6)は, 空間的に局所的な変動がその形を崩すことなく  $x$  方向に一定速度  $v$  で伝播する現象を, その変動とともに動く座標系で眺めたものである. 局所的な変動が伝播する現象を表すこの解(2.6)のことを, 孤立波解と呼ぼう. 孤立波解の存在は  $1 < |v| \leq 1.2942$  に対して数値的に示されている[5-7]. 解が存在するとき, (2.11)で表される  $x \rightarrow \pm\infty$  への減衰は指数関数的であり,  $H(x)$  はただ1点において極大値をとる(この点を孤立波の峰と呼ぶ). 一般性を失うことなく,

$$[\Phi]_{x \rightarrow \infty} = -[\Phi]_{x \rightarrow -\infty} \quad (2.12)$$

と置ける. ここに  $[\ ]_{x \rightarrow \infty}$  ( $[\ ]_{x \rightarrow -\infty}$ ) は, 括弧内の量を  $x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow -\infty$ ) で評価することを意味する. さらに  $x=0$  を孤立波の峰に合わせることで,  $\Phi$  は  $x$  に関して奇関数,  $H$  は偶関数となる. この孤立波は,  $0 < H(0)-1 < 0.781$  ( $1 < |v| \leq 1.2936$ ) のとき空間2次元攪乱 ( $x, y$  方向) に対して線形安定であることが知られている[6,7].

$|v|$  が1に近いとき, つまり  $v = v_0(1 + \varepsilon^2)$  ( $\varepsilon$  は小さなパラメータ,  $v_0$  は孤立波の伝播方向が  $x$  の正方向であれば1, 負方向であれば-1をとる) と表されるとき,  $\Phi$  と  $H-1$  がそれぞれ  $O(\varepsilon)$  と  $O(\varepsilon^2)$  の小さな量となり, その  $x$  への依存性が緩やかとなる. この解を小振幅孤立波解と呼び,  $(\Phi_\varepsilon(X, y), H_\varepsilon(X))$  で表すことにする. ただし

$$X = \varepsilon x \quad (2.13)$$

は  $x$  に関して縮められた座標である. 小振幅孤立波解は, 具体的に次のように表される:

$$\Phi_s(X, y) \equiv \Phi(x, y)|_{v=v_0(1+\varepsilon^2)} = \varepsilon \Phi_{s1}(X) + \varepsilon^3 \Phi_{s3}(X, y) + \dots, \quad (2.14a)$$

$$H_s(X) \equiv H(x)|_{v=v_0(1+\varepsilon^2)} = 1 + \varepsilon^2 H_{s2}(X) + \varepsilon^4 H_{s4}(X) + \dots, \quad (2.14b)$$

ただし,

$$\Phi_{s1}(X) = \frac{2\sqrt{6}}{3} v_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} X\right), \quad (2.15a)$$

$$\Phi_{s3}(X, y) = \bar{\Phi}_{s3}(X) - \Phi_{s1}'(X) \frac{y^2}{2}, \quad (2.15b)$$

$$\bar{\Phi}_{s3}(X) = \frac{43\sqrt{6}}{90} v_0 \tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} X\right) - \frac{v_0}{\cosh^2\left(\sqrt{3/2} X\right)} \left[ \frac{19}{10} X + \frac{4\sqrt{6}}{9} \tanh\left(\sqrt{\frac{3}{2}} X\right) \right], \quad (2.15c)$$

$$H_{s2}(X) = v_0 \Phi_{s1}'(X), \quad (2.15d)$$

$$H_{s4}(X) = v_0 \frac{d}{dX} \left( \bar{\Phi}_{s3}(X) - \frac{1}{2} \Phi_{s1}''(X) + \Phi_{s1}(X) \right) - \frac{1}{2} \Phi_{s1}'(X)^2, \quad (2.15e)$$

.....

であり, ダッシュ記号のついた変数はそのダッシュ記号の数に相当する階数の独立変数による微分である.

有限振幅孤立波 ( $\Phi, H$ ) と小振幅孤立波 ( $\Phi_s, H_s$ ) の衝突現象を Euler 方程式系(2.1)-(2.4)をもとに解析しよう. 解析の便宜上, 有限振幅孤立波とともに動く座標系をとり, (2.1)-(2.4)の解を次の形に置く (図 2 参照):

$$\phi = -vx + \Phi(x, y) + \Phi_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau, y) + \hat{\phi}(x, y, t), \quad (2.16a)$$

$$\eta = H(x) + H_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau) - 1 + \hat{\eta}(x, t). \quad (2.16b)$$

ここに,

$$\tau = \varepsilon t \quad (2.17)$$

は時間  $t$  に関して縮められた座標, ( $\hat{\phi}, \hat{\eta}$ ) は相互作用により生じる項であり,

$$(\hat{\phi}, \hat{\eta}) \rightarrow (0, 0) \text{ as } t \rightarrow -\infty, \quad (2.18)$$

を満たす. (2.16a, b) は  $x = 0$  にとどまる有限振幅の孤立波に, 小振幅孤立波が  $x$  の正方向から伝

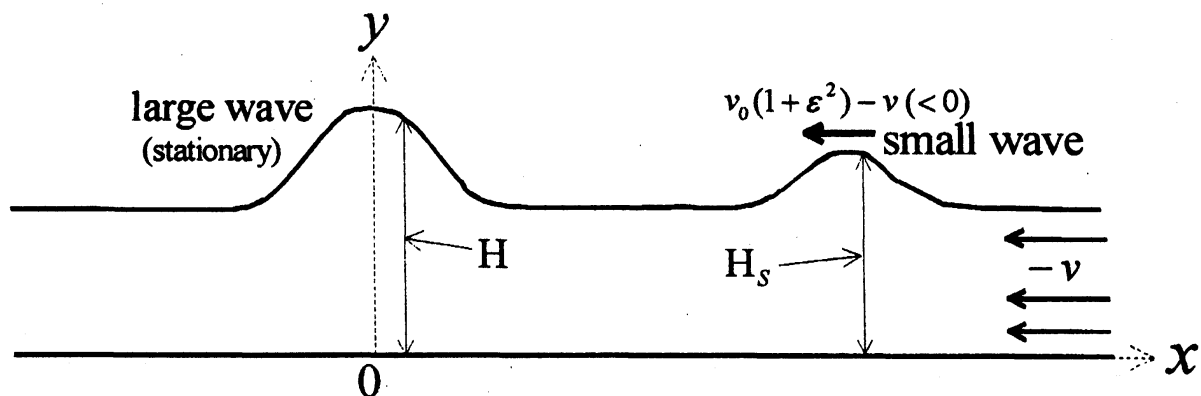


図 2 孤立波相互作用の概略図

播速度  $v_0(1+\varepsilon^2)-v < 0$  で近づく状況を表している (図 2 参照).  $v_0 = -1$  のときは正面衝突,  $v_0 = 1$  のときは追い越し現象に相当する. ここでの目的は,  $t > -\infty$  における  $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$  を具体的に求めることである.

### 3. 漸近解析

$(\hat{\phi}, \hat{\eta})$  に対する方程式系は, (2.16a,b)を(2.1)-(2.4)に代入して得られる方程式と(2.18)である. この方程式系は小振幅孤立波のパラメータ  $\varepsilon$  を含む. ここでは  $\varepsilon$  が小さいときの漸近解  $(\hat{\phi}, \hat{\eta})$  を求めよう.

#### 3.1. 近接場の解

まずは  $x, y, \tau$  に関して単位量の範囲で有意の変化 [ $\partial\hat{\phi}/\partial x = O(\hat{\phi})$ ,  $\partial\hat{\phi}/\partial y = O(\hat{\phi})$ ,  $\partial\hat{\phi}/\partial\tau = O(\hat{\phi})$ ,  $\partial\hat{\eta}/\partial x = O(\hat{\eta})$ ,  $\partial\hat{\eta}/\partial\tau = O(\hat{\eta})$ ] をするものを次のような  $\varepsilon$  の冪級数の形で求める:

$$\hat{\phi}_C(x, y, \tau) = \varepsilon\hat{\phi}_{C1} + \varepsilon^2\hat{\phi}_{C2} + \varepsilon^3\hat{\phi}_{C3} + \dots, \quad (3.1a)$$

$$\hat{\eta}_C(x, \tau) = \varepsilon\hat{\eta}_{C1} + \varepsilon^2\hat{\eta}_{C2} + \varepsilon^3\hat{\eta}_{C3} + \dots. \quad (3.1b)$$

ここに添え字  $C$  は解の種類を表す[近接場の解(core solution)]. この近接場  $x = O(1)$  においては, 方程式系に含まれる小振幅孤立波解  $\Phi_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau, y)$ ,  $H_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau)$  も,  $X (= \varepsilon x)$  および  $\varepsilon^2\tau$  に関して展開し,  $\varepsilon$  についてのべき展開(2.14a,b)を次のように再構築する必要がある.

$$\Phi_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau, y) = \varepsilon\Phi_{sC1} + \varepsilon^2\Phi_{sC2} + \varepsilon^3\Phi_{sC3} + \dots, \quad (3.2a)$$

$$H_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau) - 1 = \varepsilon^2H_{sC2} + \varepsilon^3H_{sC3} + \varepsilon^4H_{sC4} + \dots, \quad (3.2b)$$

ここに,  $\Phi_{sCn}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) と  $H_{sCn}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) は以下の既知関数である:

$$\begin{aligned} \Phi_{sC1} &= \Phi_{s1}((v - v_0)\tau), \quad \Phi_{sC2} = x\Phi'_{s1}((v - v_0)\tau), \\ \Phi_{sC3} &= \bar{\Phi}_{s3}((v - v_0)\tau) + \frac{x^2 - y^2}{2}\Phi''_{s1}((v - v_0)\tau) - v_0\tau\Phi'_{s1}((v - v_0)\tau), \\ \Phi_{sC4} &= x\bar{\Phi}'_{s3}((v - v_0)\tau) + \frac{x^3 - 3xy^2}{6}\Phi'''_{s1}((v - v_0)\tau) - v_0\tau x\Phi''_{s1}((v - v_0)\tau), \\ &\dots, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} H_{sC2} &= v_0\Phi'_{s1}((v - v_0)\tau), \quad H_{sC3} = v_0x\Phi''_{s1}((v - v_0)\tau), \\ H_{sC4} &= v_0\bar{\Phi}'_{s3}((v - v_0)\tau) + \frac{v_0(x^2 - 1)}{2}\Phi''_{s1}((v - v_0)\tau) + v_0\Phi'_{s1}((v - v_0)\tau) - \frac{1}{2}\Phi'_{s1}((v - v_0)\tau)^2 - \tau\Phi''_{s1}((v - v_0)\tau), \\ &\dots. \end{aligned}$$

$\Phi_{s1}$  と  $\bar{\Phi}_{s3}$  は(2.15a,c)により定義される.

(3.1a,b), (3.2a,b)を(2.16a,b)に代入し, その結果を(2.1)-(2.4)に代入して  $\varepsilon$  について整理すると,  $(\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) に対する一連の方程式系が得られる:

$$\nabla^2\hat{\phi}_{Cn} = 0 \quad \text{for } 0 < y < H, \quad (3.4)$$

$$L_K[\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn}] = F_n \quad \text{at } y = H, \quad (3.5)$$

$$L_D[\hat{\phi}_{Cn}, \hat{\eta}_{Cn}] = G_n \quad \text{at } y = H, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Cn}}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0. \quad (3.7)$$

ただし  $L_K$ ,  $L_D$  は次式で定義される線形作用素である.

$$L_K[\hat{\phi}_C, \hat{\eta}_C] = \left( -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\phi}_C + \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dH}{dx} + \left( -v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \hat{\eta}_C, \quad (3.8)$$

$$L_D[\hat{\phi}_C, \hat{\eta}_C] = \left[ \left( -v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] \hat{\phi}_C + \left[ \left( -v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + 1 \right] \hat{\eta}_C. \quad (3.9)$$

また非同次項  $F_n$ ,  $G_n$  は,

$$F_1 = 0, \quad (3.10a)$$

$$F_2 = -\frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial \tau} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} + \hat{\eta}_{C1} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial y} \right) \quad (3.10b)$$

$$+ \frac{\hat{\eta}_{C1}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - L_K[\Phi_{sC2}, H_{sC2}]$$

$$F_3 = -\frac{dH_{sC2}}{d\tau} - \frac{\partial \hat{\eta}_{C2}}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C2}}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi_{sC2} + \hat{\phi}_{C2})}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} \right) \quad (3.10c)$$

$$+ \hat{\eta}_{C1} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C2}}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \hat{\phi}_{C2}}{\partial y} \right)$$

$$+ \left( H_{sC2} + \hat{\eta}_{C2} + \frac{\hat{\eta}_{C1}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial y} \right)$$

$$+ \hat{\eta}_{C1} \left( H_{sC2} + \hat{\eta}_{C2} + \frac{\hat{\eta}_{C1}^2}{6} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - L_K[\Phi_{sC3}, H_{sC3}]$$

$$F_4 = -\frac{\partial(H_{sC3} + \hat{\eta}_{C3})}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{\partial(H_{sC3} + \hat{\eta}_{C3})}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi_{sC2} + \hat{\phi}_{C2})}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C2}}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi_{sC3} + \hat{\phi}_{C3})}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} \right)$$

$$+ \hat{\eta}_{C1} \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial(H_{sC3} + \hat{\eta}_{C3})}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C2}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} - \frac{\partial(\Phi_{sC3} + \hat{\phi}_{C3})}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial(\Phi_{sC3} + \hat{\phi}_{C3})}{\partial y} \right)$$

$$+ \left( H_{sC2} + \hat{\eta}_{C2} + \frac{\hat{\eta}_{C1}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C2}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C2}}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \hat{\phi}_{C2}}{\partial y} \right)$$

$$+ \left[ H_{sC3} + \hat{\eta}_{C3} + \hat{\eta}_{C1} (H_{sC2} + \hat{\eta}_{C2}) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\hat{\eta}_{C1}^3}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C1}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \hat{\phi}_{C1}}{\partial y} \right) \quad (3.10d)$$

$$+ \left[ \hat{\eta}_{C1} (H_{sC3} + \hat{\eta}_{C3}) + \frac{(H_{sC2} + \hat{\eta}_{C2})^2}{2} + \frac{\hat{\eta}_{C1}^2 (H_{sC2} + \hat{\eta}_{C2})}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\hat{\eta}_{C1}^4}{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dH}{dx} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$

$$- L_K[\Phi_{sC4}, H_{sC4}]$$

.....,

$$G_1 = 0, \quad (3.11a)$$

$$G_2 = -\frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} - \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \right)^2 \right] + \hat{\eta}_{c1} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \right] \\ + \frac{\hat{\eta}_{c1}^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ v \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - L_D[\Phi_{sc2}, H_{sc2}] \quad (3.11b)$$

$$G_3 = -\frac{\partial(\Phi_{sc2} + \hat{\phi}_{c2})}{\partial \tau} - \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} \frac{\partial(\Phi_{sc2} + \hat{\phi}_{c2})}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_{c2}}{\partial y} \right) \\ + \hat{\eta}_{c1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial \tau} + \left( v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial(\Phi_{sc2} + \hat{\phi}_{c2})}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_{c2}}{\partial y} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ + \left( H_{sc2} + \hat{\eta}_{c2} + \frac{\hat{\eta}_{c1}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \right] \\ + \hat{\eta}_{c1} \left( H_{sc2} + \hat{\eta}_{c2} + \frac{\hat{\eta}_{c1}^2}{6} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ v \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - L_D[\Phi_{sc3}, H_{sc3}] \quad (3.11c)$$

$$G_4 = -\frac{\partial(\Phi_{sc3} + \hat{\phi}_{c3})}{\partial \tau} - \left[ \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right) (\Phi_{sc3} + \hat{\phi}_{c3}) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(\Phi_{sc2} + \hat{\phi}_{c2})}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c2}}{\partial y} \right)^2 \right] \\ + \hat{\eta}_{c1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial \hat{\phi}_{c2}}{\partial \tau} + \left[ \left( v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] (\Phi_{sc3} + \hat{\phi}_{c3}) - \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} \frac{\partial(\Phi_{sc2} + \hat{\phi}_{c2})}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_{c2}}{\partial y} \right\} \\ + \left( H_{sc2} + \hat{\eta}_{c2} + \frac{\hat{\eta}_{c1}^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -\frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial \tau} + \left( v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial(\Phi_{sc2} + \hat{\phi}_{c2})}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_{c2}}{\partial y} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{c1}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ + \left[ H_{sc3} + \hat{\eta}_{c3} + \hat{\eta}_{c1} (H_{sc2} + \hat{\eta}_{c2}) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\hat{\eta}_{c1}^3}{6} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \right] \hat{\phi}_{c1} \\ + \left[ \hat{\eta}_{c1} (H_{sc3} + \hat{\eta}_{c3}) + \frac{(H_{sc2} + \hat{\eta}_{c2})^2}{2} + \frac{\hat{\eta}_{c1}^2 (H_{sc2} + \hat{\eta}_{c2})}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\hat{\eta}_{c1}^4}{24} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ v \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ - L_D[\Phi_{sc4}, H_{sc4}] \quad (3.11d)$$

.....

$n=1$ のとき, 上記方程式系(3.4)-(3.7)は線形同次となり,  $x \rightarrow \pm\infty$ で減衰する次の解をもつ:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_{c1} \\ \hat{\eta}_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} p_1(\tau) \\ \frac{dH}{dx} p_1(\tau) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

ただし  $p_1(\tau)$  は  $\tau$  の未定関数である.

次のオーダーより ( $n=2,3,\dots$ ), 上記方程式系(3.4)-(3.7)は線形非同次となる. その同次部分  $n=1$ のそれと一致し,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^H \frac{\partial \Phi}{\partial x} \nabla^2 \hat{\phi}_{cn} dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} L_K[\hat{\phi}_{cn}, \hat{\eta}_{cn}] - \frac{dH}{dx} L_D[\hat{\phi}_{cn}, \hat{\eta}_{cn}] \right]_{y=H} dx = 0$$

を満たすので, 解が存在するためには非同次項  $F_n, G_n$  が次の可解条件を満たす必要がある.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} F_n - \frac{dH}{dx} G_n \right]_{y=H} dx = 0. \quad (3.13)$$

ただし  $[ ]_{y=H}$  は、括弧内の量を  $y=H$  で評価することを意味する。

$n=2$  のとき、非同次項  $F_2$ ,  $G_2$  は、(3.12)を(3.10b)と(3.11b)に代入して、

$$F_2 = -\frac{dH}{dx} \frac{dp_1}{d\tau} + L_K \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{1}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} \right] p_1^2 - L_K [\Phi_{sc2}, H_{sc2}] \quad (3.14a)$$

$$G_2 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dp_1}{d\tau} - \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + L_D \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \frac{1}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} \right] p_1^2 - L_D [\Phi_{sc2}, H_{sc2}]. \quad (3.14b)$$

これら (3.14a,b) は  $n=2$  の可解条件(3.13)を恒等的に満たし、 $n=2$  における(3.4)-(3.7)の解は次のように表される。

$$\begin{aligned} (\hat{\phi}_{c2}, \hat{\eta}_{c2}) = & \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} p_2(\tau) + q_2(\tau) + \Phi_a r_2(\tau) - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} - \Phi_b \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} p_1^2 - \Phi_{sc2}, \right. \\ & \left. \frac{dH}{dx} p_2(\tau) + H_a r_2(\tau) - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} - H_b \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{d^2 H}{dx^2} p_1^2 - H_{sc2} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

ただし  $p_2(\tau)$ ,  $q_2(\tau)$  は  $\tau$  の未定関数、

$$r_2(\tau) = \frac{1}{v-v_0} \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} \quad (3.16)$$

は既知関数、 $\partial \Phi / \partial v$ ,  $\partial H / \partial v$  は  $\Phi$ ,  $H$  の  $v$  による微分、 $\Phi_a$ ,  $H_a$ ,  $\Phi_b$ ,  $H_b$  は(A10)-(A13)により(付録を見よ)定義される量である。(2.12)で定義した  $\Phi$  の対称性を考慮すると、 $\Phi$ ,  $\Phi_a$ ,  $\Phi_b$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  において 0 でない次の値をもつ。

$$[\Phi]_{x \rightarrow \pm\infty} = \pm \left( \frac{vM}{2} - \frac{T}{v} \right) = \pm \left[ \left( \frac{5v}{6} - \frac{1}{3v} \right) M - \frac{E}{v} \right], \quad (3.17a)$$

$$[\Phi_a]_{x \rightarrow \pm\infty} = \left[ \frac{3}{2} v - \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{d}{dv} \right] [\Phi]_{x \rightarrow \pm\infty}, \quad [\Phi_b]_{x \rightarrow \pm\infty} = \frac{1}{2} \left( 3 - v \frac{d}{dv} \right) [\Phi]_{x \rightarrow \pm\infty}. \quad (3.17b,c)$$

ここに  $M$  と  $T$  は、次式で定義される(有限振幅)孤立波の質量および運動エネルギーである。

$$M(v) = \int_{-\infty}^{\infty} (H-1) dx, \quad (3.18)$$

$$T(v) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^H \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (3.19)$$

(3.17a-c)より、 $\hat{\phi}_{c2}$  も  $x \rightarrow \pm\infty$  において 0 でない値を持つ。

$$[\hat{\phi}_{c2}]_{x \rightarrow \pm\infty} = q_2 + \left[ \frac{\Phi_a}{v-v_0} - \Phi_b \right]_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} - \frac{d[\Phi]_{x \rightarrow \pm\infty}}{dv} \frac{dp_1}{d\tau}. \quad (3.20)$$

このように解が  $x$  に関して局所的でない状況は、さらに高次まで進んでも同様に起こる。 $x$  に関して局所的な解を求めるためには、 $x$  に関して緩やかな変化を伴う解(遠方場解)も求め、本節で求めた近接場解との接合により全体の解を構成する必要がある。遠方場解は 2.2 節で、解の接合は 2.3 節でおこなう。

$n=3$  のとき、非同次項  $F_3$ ,  $G_3$  は、(3.12), (3.15)を(3.10c)と(3.11c)に代入して、

$$F_3 = -\frac{dH}{dx} \frac{dp_2}{d\tau} - H_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + H_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2} + L_K [L_3[\Phi], L_3[H]] - L_K [\Phi_{sc3}, H_{sc3}], \quad (3.21a)$$

$$G_3 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dp_2}{d\tau} - \frac{dq_2}{d\tau} - \Phi_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + \Phi_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2} + L_D [L_3[\Phi], L_3[H]] - L_D [\Phi_{sc3}, H_{sc3}]. \quad (3.21b)$$

ここに  $L_3$  は次式で定義される線形作用素である。

$$L_3[\Psi] = p_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} p_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} p_1^2 - \frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} - \Psi_b \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + \Psi_a r_2 \right). \quad (3.22)$$

(3.21a,b) を  $n=3$  の可解条件(3.13)に代入すると,  $p_1$  に対する次式が得られる。

$$p_1(\tau) = P_{10} [\Phi_{s1}((v-v_0)\tau) - \Phi_{s1}(-\infty)]. \quad (3.23)$$

ただし,

$$P_{10} = v_0 \left[ \frac{-v}{dE/dv} \frac{d(v+v_0)M}{dv} + 1 \right]. \quad (3.24)$$

ここに  $M$  は(3.18)で定義される孤立波の質量,  $E$  は

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^H \left[ \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dy + (H-1)^2 \right\} dx \quad (3.25)$$

により定義される孤立波のエネルギー (運動エネルギー+ポテンシャルエネルギー) である。

(3.23)を満たすとき,  $n=3$ における(3.4)-(3.7)の解は,

$$\begin{aligned} (\hat{\phi}_{c3}, \hat{\eta}_{c3}) = & \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} p_3(\tau) + q_3(\tau) + \Phi_a r_3(\tau) - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{dp_2}{d\tau} - \Phi_b \frac{dq_2}{d\tau} + \hat{\phi}_{c3}^* \right. \\ & + p_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} p_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} p_1^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} - \Phi_b \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + \Phi_a r_2 \right) - \Phi_{sc3}, \\ & \frac{dH}{dx} p_3(\tau) + H_a r_3(\tau) - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dp_2}{d\tau} - H_b \frac{dq_2}{d\tau} + \hat{\eta}_{c3}^* \\ & \left. + p_1 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dH}{dx} p_2 + \frac{1}{6} \frac{d^2 H}{dx^2} p_1^2 - \frac{\partial H}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} - H_b \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + H_a r_2 \right) - H_{sc3} \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここに  $p_3(\tau)$ ,  $q_3(\tau)$ ,  $r_3(\tau)$  は  $\tau$  の未定関数であり,  $(\hat{\phi}_{c3}^*, \hat{\eta}_{c3}^*)$  は(3.4)-(3.7)における非同次項  $F_n$ ,  $G_n$  をそれぞれ次の項

$$-H_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + H_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2}, \quad -\Phi_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + \Phi_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2},$$

に置き換えた方程式系の特解のうち,  $\int_{-\infty}^{\infty} H_a \hat{\eta}_{c3}^* dx = 0$  を満たすものである。なお,  $x \rightarrow \pm\infty$  における  $x$  の正方向流量の増加分を表す

$$[\hat{u}_{c3}]_{x \rightarrow \pm\infty} \equiv \left[ \int_0^H \frac{\partial \hat{\phi}_{c3}}{\partial x} dy - v \hat{\eta}_{c3} \right]_{x \rightarrow \pm\infty} \quad (3.27)$$

は, 0 でない次の値を持つ。

$$[\hat{u}_{c3}]_{x \rightarrow \pm\infty} = (1-v^2)r_3 + v \frac{dq_2}{d\tau} \pm \frac{1}{2} \left( -M_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{dM}{dv} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + M_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2} \right). \quad (3.28)$$

ここに,  $M_a$  と  $M_b$  は,



$$M_a \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (H_a - v) dx = 2vM - \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{dM}{dv}, \quad M_b \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (H_b - 1) dx = 2M - \frac{v}{2} \frac{dM}{dv}, \quad (3.29)$$

により定義される量である ( $H_a$ ,  $H_b$  の定義は(A11), (A13)).

$n=4$  のとき, 非同次項  $F_4$ ,  $G_4$  は, (3.12), (3.15), (3.26) を (3.10d), (3.11d) に代入して,

$$F_4 = -\frac{dH}{dx} \frac{dp_3}{d\tau} - H_a \frac{dr_3}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{d^2 p_2}{d\tau^2} + H_b \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} - \frac{\partial \hat{\eta}_{C3}^*}{\partial \tau} + L_K [L_4[\Phi], L_4[H]] - L_K [\Phi_{sc4}, H_{sc4}] \\ + L_K \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_{C3}^*}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\eta}_{C3}^*}{\partial x} \right] p_1, \quad (3.30a)$$

$$G_4 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dp_3}{d\tau} - \frac{dq_3}{d\tau} - \Phi_a \frac{dr_3}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{d^2 p_2}{d\tau^2} + \Phi_b \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} - \frac{\partial \hat{\phi}_{C3}^*}{\partial \tau} + L_D [L_4[\Phi], L_4[H]] - L_D [\Phi_{sc4}, H_{sc4}] \\ + L_D \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_{C3}^*}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\eta}_{C3}^*}{\partial x} \right] p_1. \quad (3.30b)$$

ここに  $L_4$  は次式で定義される線形作用素である.

$$L_4[\Psi] = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \left( p_1 p_3 + \frac{p_2^2}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial x^3} p_1^2 p_2 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} p_1^4 + \frac{p_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} - \Psi_b \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + \Psi_a r_2 \right) \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{\partial \Psi}{\partial v} \frac{dp_1 p_2}{d\tau} - \Psi_b \left( p_1 \frac{dq_2}{d\tau} + p_2 \frac{d\Phi_{c1}}{d\tau} \right) + \Psi_a (p_1 r_3 + p_2 r_2) \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} \left( \frac{dp_1}{d\tau} \right)^2 + \Psi_{bb} \left( \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} \right)^2 + \Psi_{aa} r_2^2 \right] + \frac{\partial \Psi_b}{\partial v} \frac{dp_1}{d\tau} \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} - \Psi_{ab} \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} r_2 - \frac{\partial \Psi_a}{\partial v} r_2 \frac{dp_1}{d\tau}. \quad (3.31)$$

また  $\Phi_{aa}$ ,  $H_{aa}$ ,  $\Phi_{ab}$ ,  $H_{ab}$ ,  $\Phi_{bb}$ ,  $H_{bb}$  は(A14)-(A19) (付録を見よ) で定義される量である.

(3.30a,b) を  $n=4$  の可解条件(3.13)に代入し, 次の関係式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \hat{\eta}_{C3}^*}{\partial \tau} + \frac{dH}{dx} \frac{\partial \hat{\phi}_{C3}^*}{\partial \tau} \right]_{y=H} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ L_1 \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_{C3}^*}{\partial \tau}, \frac{\partial \hat{\eta}_{C3}^*}{\partial \tau} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial v} - L_2 \left[ \frac{\partial \hat{\phi}_{C3}^*}{\partial \tau}, \frac{\partial \hat{\eta}_{C3}^*}{\partial \tau} \right] \frac{\partial H}{\partial v} \right]_{y=H} dx - \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{\partial \hat{u}_{C3}^*}{\partial \tau} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \left( -H_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial v} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + H_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v} - \left( -\Phi_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial v} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + \Phi_b \frac{d^2 \Phi_{sc1}}{d\tau^2} \right) \frac{\partial H}{\partial v} \right]_{y=H} dx = 0,$$

を用いると,  $p_2$  に対する次式が得られる.

$$\frac{dE}{dv} \frac{d^2 p_2}{d\tau^2} = -(E_b + M) \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + (E_a + 2vM) \frac{dr_3}{d\tau} = 0. \quad (3.32)$$

ただし,

$$E_a \equiv v \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} H_a - \frac{dH}{dx} \Phi_a \right]_{y=H} dx - 2vM = 3vE - \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{dE}{dv}, \quad (3.33a)$$

$$E_b \equiv v \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial x} H_b - \frac{dH}{dx} \Phi_b \right]_{y=H} dx - M = 3E - \frac{v}{2} \frac{dE}{dv}, \quad (3.33b)$$

であり, (3.32) 右辺の未知関数  $q_2$  と  $r_3$  は, 遠方場解 (3.2 節) との接合 (3.3 節) を通して後程決定される.

### 3.2. 遠方場の解

ここでは  $X$ ,  $y$ ,  $\tau$  に関して単位量の範囲で有意の変化 [ $\partial\hat{\phi}/\partial X = O(\hat{\phi})$ ,  $\partial\hat{\phi}/\partial y = O(\hat{\phi})$ ,  $\partial\hat{\phi}/\partial\tau = O(\hat{\phi})$ ,  $\partial\hat{\eta}/\partial X = O(\hat{\eta})$ ,  $\partial\hat{\eta}/\partial\tau = O(\hat{\eta})$ ] をするものを次のような  $\varepsilon$  の冪級数の形で求める:

$$\hat{\phi}_F(X, y, \tau) = \varepsilon^2 \hat{\phi}_{F2} + \varepsilon^3 \hat{\phi}_{F3} + \varepsilon^4 \hat{\phi}_{F4} + \dots, \quad (3.34a)$$

$$\hat{\eta}_F(X, \tau) = \varepsilon^3 \hat{\eta}_{F3} + \varepsilon^4 \hat{\eta}_{F4} + \varepsilon^5 \hat{\eta}_{F5} + \dots, \quad (3.34b)$$

ここに添え字  $F$  は解の種類を表す[遠方場の解(far-field solution)].  $\hat{\phi}_F$ ,  $\hat{\eta}_F$  の級数がそれぞれ  $O(\varepsilon^2)$ ,  $O(\varepsilon^3)$  から始まるのは, 近接場の解がこれらのオーダーから  $x \rightarrow \pm\infty$  において零でない値をもつからである((3.20), (3.28)を見よ). (2.14a,b), (3.34a,b)を(2.16a,b)に代入し, その結果を(2.1)-(2.4)に代入して得られる式を  $\varepsilon$  について整理すると, 孤立波解  $(\Phi, H)$  が  $x \rightarrow \pm\infty$  で指数関数的に減衰することを考慮すれば,  $(\hat{\phi}_{Fn}, \hat{\eta}_{Fn+1})$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) に対する以下の方程式系が得られる.

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Fn}}{\partial y^2} = \begin{cases} 0 & (n = 2 \text{ and } 3), \\ -\frac{\partial^2 \hat{\phi}_{Fn-2}}{\partial X^2} & (n = 4, 5, \dots), \end{cases} \quad \text{for } 0 < y < 1, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Fn}}{\partial y} = J_n \quad \text{at } y = 1, \quad (3.36)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial X} \right) \hat{\phi}_{Fn} + \hat{\eta}_{Fn+1} = K_n \quad \text{at } y = 1, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}_{Fn}}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0. \quad (3.38)$$

ここに非同次項  $J_n$ ,  $K_n$  は,

$$J_n = \begin{cases} 0 & (n = 2 \text{ and } 3), \\ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial X} \right) \hat{\eta}_{F3} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{F2}}{\partial y^2} H_{s2}(X + (v - v_0)\tau) & (n = 4), \\ \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial X} \right) \hat{\eta}_{F4} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{F2}}{\partial y^2} \hat{\eta}_{F3} - \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{F3}}{\partial y^2} H_{s2}(X + (v - v_0)\tau) & (n = 5), \\ \dots \end{cases} \quad (3.39)$$

$$K_n = \begin{cases} 0 & (n = 2), \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_{F2}}{\partial y} \right)^2 & (n = 3), \\ \dots \end{cases} \quad (3.40)$$

$n = 2$  のとき, (3.35)-(3.38)は線形同次であり,  $y$  に依らない解をもつ.

$$\hat{\phi}_{F2} = \hat{\phi}_{F2}(X, \tau), \quad \hat{\eta}_{F3} = \left( -\frac{\partial}{\partial \tau} + v \frac{\partial}{\partial X} \right) \hat{\phi}_{F2}. \quad (3.41)$$

よって  $n = 3$  のときも ( $K_3 = 0$  より) (3.35)-(3.38)は線形同次となり,  $y$  に依らない解をもつ.

$$\hat{\phi}_{F2} = \hat{\phi}_{F3}(X, \tau), \quad \hat{\eta}_{F4} = \left( -\frac{\partial}{\partial \tau} + v \frac{\partial}{\partial X} \right) \hat{\phi}_{F3}. \quad (3.42)$$

$n=4,5$  のとき, (3.35)-(3.38)は線形非同次となる. この非同次方程式系が解をもつには, その非同次項  $-\partial^2 \hat{\phi}_{F_{n-2}} / \partial X^2$  と  $J_n$  が次の可解条件を満たさなければならない:

$$-\int_0^1 \frac{\partial^2 \hat{\phi}_{F_{n-2}}}{\partial X^2} dy = J_n. \quad (3.43)$$

(3.41), (3.42)を(3.43)の  $n=4,5$  に代入して, (2.18)のもとに解くと,  $\hat{\phi}_{F_2}$  と  $\hat{\phi}_{F_3}$  の  $X, \tau$  への依存性が次のように決まる.

$$\hat{\phi}_{F_2} = \begin{cases} 0 & \text{for } X > 0, \\ f_2(X + (v - v_0)\tau) + g_2(X + (v + v_0)\tau) & \text{for } X < 0, \end{cases} \quad (3.44a)$$

$$\hat{\phi}_{F_3} = \begin{cases} 0 & \text{for } X > 0, \\ f_3(X + (v - v_0)\tau) + g_3(X + (v + v_0)\tau) & \text{for } X < 0. \end{cases} \quad (3.44b)$$

ここに  $f_2, g_2, f_3, g_3$  は未定関数である.  $\hat{\eta}_{F_3}$  と  $\hat{\eta}_{F_4}$  は(3.44a,b)を(3.31)に代入して,

$$\hat{\eta}_{F_3} = \begin{cases} 0 & \text{for } X > 0, \\ v_0 [f_2'(X + (v - v_0)\tau) - g_2'(X + (v + v_0)\tau)] & \text{for } X < 0, \end{cases} \quad (3.45a)$$

$$\hat{\eta}_{F_4} = \begin{cases} 0 & \text{for } X > 0, \\ v_0 [f_3'(X + (v - v_0)\tau) - g_3'(X + (v + v_0)\tau)] & \text{for } X < 0. \end{cases} \quad (3.45b)$$

なおダッシュ記号のついた変数は, その独立変数による微分を表す.  $f_2, g_2, f_3, g_3$  の関数形は, 近接場解と遠方場解の接合を通して得られる(3.3節).

### 3.3. 解の接合

近接場の解( $\hat{\phi}_C, \hat{\eta}_C$ )と遠方場の解( $\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F$ )を接合する. 近接場( $|X| \ll 1$ )においては遠方場の解を  $X (= \varepsilon x)$  に関して展開する必要がある.

$$\hat{h}_{F_n} = (\hat{h}_{F_n})_0 + \varepsilon x \left( \frac{\partial \hat{h}_{F_n}}{\partial X} \right)_0 + \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \hat{h}_{F_n}}{\partial X^2} \right)_0 + \dots$$

ここに  $\hat{h}$  は ( $\hat{\phi}, \hat{\eta}$ ) を表し,  $(\dots)_0$  は括弧内の量を  $X=0$  上で評価することを意味する. この展開後, ( $\hat{\phi}_F, \hat{\eta}_F$ ) を  $\varepsilon$  について再整理すると, 再構成関数 ( $\hat{\phi}_{F_n}^*, \hat{\eta}_{F_n}^*$ ) が得られる. 例えば,  $\varepsilon^3$  のオーダーにおける  $\hat{\phi}_F$  (つまり  $\varepsilon^3 \hat{\phi}_{F_3}$ ) は  $\varepsilon^3 (\hat{\phi}_{F_3})_0 + \varepsilon^3 x (\partial \hat{\phi}_{F_2} / \partial X)_0$  となる. その上で, 近接場解の構成関数 ( $\hat{\phi}_{C_n}, \hat{\eta}_{C_n}$ ) を遠方場解のそれ ( $\hat{\phi}_{F_n}^*, \hat{\eta}_{F_n}^*$ ) (再構成したもの) と接合する. 接合条件は,

$$\hat{\phi}_{C_n} \rightarrow \hat{\phi}_{F_n}^*, \quad \hat{\eta}_{C_n} \rightarrow \hat{\eta}_{F_n}^* \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty \quad (3.46)$$

である.

$n=2$  のとき,  $\hat{\phi}_{F_2}^* = (\hat{\phi}_{F_2})_0$  であるから,  $\hat{\phi}_{C_2}$  に対する  $x \rightarrow \infty$  および  $x \rightarrow -\infty$  における接合条件はそれぞれ

$$\begin{aligned} q_2 &= \left[ \Phi_b - \frac{\Phi_a}{v - v_0} \right]_{x \rightarrow \infty} \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau} + \frac{d[\Phi]_{x \rightarrow \infty}}{dv} \frac{dp_1}{d\tau} \\ &= \frac{v_0}{2} \left\{ \frac{-v}{dE/dv} \frac{d(v + v_0)M}{dv} \frac{dvM}{dv} - \frac{v + v_0}{v - v_0} M + \frac{3v^2}{2(v - v_0)} \frac{dM}{dv} \right\} \frac{d\Phi_{sc1}}{d\tau}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$q_2 + \left[ \frac{\Phi_a}{v-v_0} - \Phi_b \right]_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\Phi_{sC1}}{d\tau} - \frac{d[\Phi_a]_{x \rightarrow -\infty}}{dv} \frac{dp_1}{d\tau} = f_2((v-v_0)\tau) + g_2((v+v_0)\tau). \quad (3.48)$$

ただし, (3.20), (3.44a)を用いた.

$n=3$  のとき,  $\hat{\phi}_{F3}^* = (\hat{\phi}_{F3}^*)_0 + x(\partial\hat{\phi}_{F2}^*/\partial X)_0$  であるから,  $x$  に依らない項と  $x$  に比例する項が現れ, それぞれに対して接合条件が得られる. ここでは  $x$  に比例する項に対して, (3.28)でその具体値が与えられている  $[\hat{u}_{C3}]_{x \rightarrow \pm\infty}$  により表すことにしよう. つまり, (3.28), (3.44a), (3.45a)より,

$$(1-v^2)r_3 + v \frac{dq_2}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( -M_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{dM}{dv} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + M_b \frac{d^2 \Phi_{C1}}{d\tau^2} \right) = 0, \quad (3.49)$$

$$(1-v^2)r_3 + v \frac{dq_2}{d\tau} - \frac{1}{2} \left( -M_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{dM}{dv} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + M_b \frac{d^2 \Phi_{C1}}{d\tau^2} \right) = -v_0 \frac{df_2((v-v_0)\tau)}{d\tau} + v_0 \frac{dg_2((v+v_0)\tau)}{d\tau}. \quad (3.50)$$

(3.48)-(3.50)の3式を  $r_3$ ,  $f_2$ ,  $g_2$  に対して解いて,

$$r_3 = \frac{1}{v^2-1} \left[ v \frac{dq_2}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( -M_a \frac{dr_2}{d\tau} + \frac{dM}{dv} \frac{d^2 p_1}{d\tau^2} + M_b \frac{d^2 \Phi_{C1}}{d\tau^2} \right) \right] \quad (3.51)$$

$$= \frac{v_0}{2(v^2-1)} \left\{ \frac{-v}{dE/dv} \frac{d(v+v_0)M}{dv} \left[ vM + (v^2+1) \frac{dM}{dv} \right] - \frac{v^2+v_0v+2}{v-v_0} M + \frac{3v(v^2+1)}{2(v-v_0)} \frac{dM}{dv} \right\} \frac{d^2 \Phi_{C1}}{d\tau^2},$$

$$f_2((v-v_0)\tau) = -\frac{P_S}{v-v_0} \frac{d\Phi_{C1}}{d\tau}, \quad (3.52)$$

$$g_2((v+v_0)\tau) = -\frac{P_R}{v-v_0} \frac{d\Phi_{C1}}{d\tau}. \quad (3.53)$$

ここに,

$$P_S = -\frac{3v_0E + (v+v_0)M}{dE/dv} \frac{d}{dv} \left( \frac{v+v_0}{2} M \right) + \left( \frac{5}{4} v v_0 + \frac{3}{2} \right) M, \quad (3.54)$$

$$P_R = -\frac{3v_0E + (v+v_0)M}{dE/dv} \frac{d}{dv} \left( \frac{v-v_0}{2} M \right) + \left( \frac{5}{4} v v_0 - \frac{1}{2} \right) M. \quad (3.55)$$

(3.47)(3.51)を(3.32)に代入すると,  $p_2$  に対する次式が得られる:

$$p_2 = P_{20} \frac{d\Phi_{C1}}{d\tau}. \quad (3.56)$$

ただし,

$$P_{20} = \frac{-v}{v-v_0} \left\{ \frac{3v_0E + (v+v_0)M}{(dE/dv)^2} \frac{dM}{dv} \frac{d(vM)}{dv} - \frac{1}{dE/dv} \left[ \left( \frac{9v_0v^2 + 4v + 2v_0}{4v} M + \frac{3v_0}{2v} E \right) \frac{dM}{dv} + v_0 M^2 \right] + \frac{v_0}{v} M \right\}. \quad (3.57)$$

また, (3.52), (3.53)を(3.44a), (3.45a)に代入すると, 最低次の遠方場解  $(\hat{\phi}_{F2}, \hat{\eta}_{F3})$  が得られる.

$$\hat{\phi}_{F2} = \begin{cases} 0 & \text{for } X > 0, \\ -\frac{\partial\Phi_{s1}(X+(v-v_0)\tau)}{\partial X} p_S - k \frac{\partial\Phi_{s1}([X+(v+v_0)\tau]/k)}{\partial X} p_R & \text{for } X < 0, \end{cases} \quad (3.58a)$$

$$\hat{\eta}_{F3} = \begin{cases} 0 & \text{for } X > 0, \\ -\frac{\partial H_{s2}(X+(v-v_0)\tau)}{\partial X} p_s + \frac{\partial H_{s2}([X+(v+v_0)\tau]/k)}{\partial X} p_R & \text{for } X < 0, \end{cases} \quad (3.58b)$$

ここに,

$$k = \frac{v+v_0}{v-v_0}. \quad (3.59)$$

#### 4. 物理的考察

3節で得られた解の物理的考察を試みる. 近接場解は,  $O(\varepsilon^2)$  までの解(3.12), (3.15)が有限振幅孤立波の位相のずれ ( $x$  方向) と変調 ( $v$ ,  $a$ ,  $b$  に関して) を表す. つまり,

$$\Phi(x, y) + \Phi_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau, y) + \hat{\phi}_c = \Phi^E(x - p(\tau), y) \Big|_{V=v+\Delta V, a=\Delta a, b=1+\Delta b} + O(\varepsilon^3), \quad (4.1a)$$

$$H(x) + H_s(X + [v - v_0(1 + \varepsilon^2)]\tau) - 1 + \hat{\eta}_c = H^E(x - p(\tau)) \Big|_{V=v+\Delta V, a=\Delta a, b=1+\Delta b} + O(\varepsilon^3). \quad (4.1b)$$

ここに  $(\Phi^E, H^E)$  は拡張された孤立波解 (付録を見よ) であり,

$$p(\tau) = -\varepsilon p_1(\tau) - \varepsilon^2 p_2(\tau), \quad \Delta V = -\varepsilon^2 \frac{dp_1}{d\tau}, \quad \Delta a = \varepsilon^2 r_2(\tau), \quad \Delta b = -\varepsilon^2 \frac{d\Phi_{s1}}{d\tau}, \quad (4.2)$$

は  $p(\tau)$  が位相のずれ,  $\Delta V$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  がそれぞれ有限振幅孤立波の  $V$ ,  $a$ ,  $b$  に関する変調の程度を表す. (3.23)(3.32)より, 相互作用による有限振幅孤立波の最終的な位相のずれ  $p(\infty)$  は,

$$p(\infty) = \frac{4\sqrt{6}}{3} P_{10} v_0 \varepsilon. \quad (4.3)$$

ただし, 位相のずれは孤立波が  $x$  の正方向へシフトするときを正にとる. Table 1 に, (4.3) で与えられる  $p(\infty)$  を様々な有限振幅孤立波の最大波高  $H(0) - 1$  (小振幅孤立波の最大波高は  $2\varepsilon^2$ ) に対して示した.  $p(\infty)$  は, 正面衝突 ( $v_0 = -1$ ) のときは常に負となり, 追い越し ( $v_0 = 1$ ) のときは常に正となることがわかる. つまり有限振幅孤立波は, 正面衝突によって後方へ, 追い越しによって前方へ  $O(\varepsilon)$  だけ位相がずれるのである. また位相のずれの大きさ  $|p(\infty)|$  は, 正面衝突のときには  $H(0)$  の増加とともに大きくなるが, 追い越しのときには  $H(0)$  の増加に伴って小さくなる.

(4.1)における  $\Delta V$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  は, 拡張された有限振幅孤立波の相互作用前における状態  $V = v$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  からのパラメータ  $V$ ,  $a$ ,  $b$  のずれを表し, いずれも大きさは  $O(\varepsilon^2)$  である. これらは, (4.2) および (2.15d), (3.16), (3.23) より,  $X = 0$  における小振幅孤立波の表面変位  $\varepsilon^2 H_{s2}((v - v_0)\tau)$  によって次の形に表すことができる.

$$\begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta a \\ \Delta b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{10} v_0 (v - v_0) \\ v_0 \\ -v_0 (v - v_0) \end{pmatrix} \varepsilon^2 H_{s2}((v - v_0)\tau). \quad (4.4)$$

$\Delta V$ ,  $\Delta a$ ,  $\Delta b$  の符号はそれぞれ, 正面衝突 ( $v_0 = -1$ ) のときは常に負, 負, 正となり, 追い越し ( $v_0 = 1$ ) のときは正, 正, 負となる.

(3.58a,b) で与えられる遠方場の解は, その右辺第1項は, 小振幅孤立波が相互作用によって  $p_s$  の位相のずれを受けることを示す. Table 1 に様々な有限振幅孤立波の最大波高  $H(0) - 1$  に対する  $p_s$  の値を示した. 多くの場合  $p_s$  の符号は  $v_0$  のそれとは逆である. つまり小振幅孤立波は自らの進行方向とは逆の方向 (後方) へずれる. ところが有限振幅孤立波の振幅が大きいと

Table 1 正面衝突 ( $v_0 = -1$ ), 追い越し ( $v_0 = 1$ ) による有限振幅孤立波の位相のずれ  $p(\infty)$  と小振幅孤立波の位相のずれ  $p_s$  を, 有限振幅孤立波の最大波高  $H(0) - 1$  の関数として示したもの (孤立波が  $x$  の正方向へずれるときが正). 小振幅孤立波の最大波高は  $2\varepsilon^2 \ll 1$  である.  $H(0) - 1 = 2\delta^2$  ( $\varepsilon \ll \delta \ll 1$ ) の結果は, 有限振幅孤立波の最大波高が小さいときの結果.

$H(0) - 1$	$v_0 = -1$ (head-on)		$v_0 = 1$ (overtaking)	
	$p(\infty)$	$p_s$	$p(\infty)$	$p_s$
$2\delta^2 \ll 1$	$-\sqrt{2/3}\varepsilon$	$\sqrt{2/3}\delta$	$4\varepsilon/(\sqrt{6}\delta^2)$	$-4/(\sqrt{6}\delta)$
0.1	$-0.870\varepsilon$	0.184	$34.0\varepsilon$	-7.13
0.2	$-0.911\varepsilon$	0.259	$17.4\varepsilon$	-4.80
0.3	$-0.946\varepsilon$	0.313	$11.7\varepsilon$	-3.59
0.4	$-0.978\varepsilon$	0.352	$8.63\varepsilon$	-2.68
0.5	$-1.01\varepsilon$	0.379	$6.56\varepsilon$	-1.79
0.6	$-1.05\varepsilon$	0.391	$4.74\varepsilon$	-0.672
0.7	$-1.16\varepsilon$	0.373	$1.93\varepsilon$	1.64

き ( $H(0) - 1 \geq 0.7$ ) には, 追い越し ( $v_0 = 1$ ) の際,  $p_s$  は  $v_0$  と同符号となる. つまり, 有限振幅孤立波の振幅が  $H(0) - 1 \geq 0.7$  を満たすほどに大きいときは, 追い越しによって小振幅孤立波はその進行方向 (前方) へずれることになる. このとき, 追い越す側の有限振幅孤立波も  $p(\infty)$  が正より同じ進行方向 (前方) へずれる. よって両孤立波の重心位置はいずれも前方 ( $x$  の正方向) へシフトする. 全体の重心位置は相互作用の直前と直後で保存される (変化しない) ので, 相互作用により発生する放射波のみが重心位置を後方 ( $x$  の負方向) へシフトさせる役割をもつことがわかる.

(3.58a,b) 右辺の第 2 項は, 相互作用によって発生する放射波を表している. この放射波は, その形を変化させることなく, 伝播速さ  $|v + v_0|$  で  $x$  の負方向へと伝播する. その表面波形は, 小振幅孤立波の表面波形の  $x$  方向微分と相似になる.

### 付録「拡張された孤立波解」

孤立波解(2.6)を次の形に拡張した解を考えよう.

$$\phi = -vx + \Phi^E(x, y), \quad \eta = H^E(x). \quad (\text{A1})$$

ただし, 無限遠方  $x \rightarrow \pm\infty$  で

$$\frac{\partial \Phi^E}{\partial x} \rightarrow a, \quad \frac{\partial \Phi^E}{\partial y} \rightarrow 0, \quad H^E \rightarrow h(a, b) \equiv b + va - \frac{a^2}{2} \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{A2})$$

を満たすものとする. ここではもとのパラメータである  $v$  に加えて新たに 2 つのパラメータ  $a, b$  を導入した. この拡張された解(A1)は,  $a = 0, b = 1$  のときにもとの孤立波解(2.6)と一致する. (A1), (A2)を(2.1)-(2.4)に代入すると,  $(\Phi^E, H^E)$  に対する以下の方程式系が得られる.

$$\frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial y^2} = 0 \quad \text{for } 0 < y < H^E, \quad (\text{A3})$$

$$\left(-v + \frac{\partial \Phi^E}{\partial x}\right) \frac{dH^E}{dx} = \frac{\partial \Phi^E}{\partial y} \quad \text{at } y = H^E, \quad (\text{A4})$$

$$-v \frac{\partial \Phi^E}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi^E}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi^E}{\partial y} \right)^2 \right] + H^E = b \quad \text{at } y = H^E, \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial \Phi^E}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, \quad (\text{A6})$$

$$\frac{\partial \Phi^E}{\partial x} \rightarrow a, \quad \frac{\partial \Phi^E}{\partial y} \rightarrow 0, \quad H^E \rightarrow h \quad \text{as } x \rightarrow \pm\infty. \quad (\text{A7})$$

次の変数変換：

$$\tilde{v} = \frac{v-a}{\sqrt{h}}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{h}(x, y), \quad \tilde{\Phi} = \frac{\Phi^E - ax}{h^{3/2}}, \quad \tilde{H} = \frac{H^E}{h}, \quad (\text{A8})$$

を施すと、上記方程式系(A3)-(A7)はもとの孤立波解に対する方程式系(2.7)-(2.11)の  $x, y, v, \Phi, H$  をそれぞれ  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}, \tilde{H}$  へ書き換えたものに帰着する。この方程式系の孤立波解  $(\tilde{\Phi}, \tilde{H})$  の存在は、既に  $1 < |\tilde{v}| \leq 1.2942$  に対して示されている[5-7]ので、(A8)を通して関係付けられる拡張された孤立波解  $(\Phi^E, H^E)$  の存在条件は、

$$1 < \frac{|v-a|}{\sqrt{h}} \leq 1.294 \quad \text{and } h > 0. \quad (\text{A9})$$

以下では拡張された孤立波解  $(\Phi^E, H^E)$  の  $a$  および  $b$  による微分を  $a=0, b=1$  で評価したものを、 $v, x, y$  による微分のみを用いて表そう。

$$\begin{aligned} \Phi_a &\equiv \left. \frac{\partial \Phi^E}{\partial a} \right|_{a=0, b=1} = \left. \frac{\partial (h^{3/2} \tilde{\Phi} + ax)}{\partial a} \right|_{a=0, b=1} \\ &= \left[ x + \frac{3}{2} h^{1/2} \frac{\partial h}{\partial a} \tilde{\Phi} + h^{3/2} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial a} \right) \right] \Bigg|_{a=0, b=1} \end{aligned} \quad (\text{A10})$$

$$\begin{aligned} &= \left[ x + \frac{3}{2} h^{1/2} (v-a) \tilde{\Phi} - \frac{v-a}{h^{1/2}} \left( x \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} + y \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \right) - \left( \frac{v^2}{2} + b \right) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{v}} \right] \Bigg|_{a=0, b=1} \\ &= x + v \left( \frac{3}{2} \Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_a &\equiv \left. \frac{\partial H^E}{\partial a} \right|_{a=0, b=1} = \left. \frac{\partial h \tilde{H}}{\partial a} \right|_{a=0, b=1} = \left[ \frac{\partial h}{\partial a} \tilde{H} + h \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial a} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial a} \right) \right] \Bigg|_{a=0, b=1} \\ &= \left[ (v-a) \tilde{H} - \frac{v-a}{h} x \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} - \frac{1}{\sqrt{h}} \left( \frac{v^2}{2} + b \right) \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{v}} \right] \Bigg|_{a=0, b=1} \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

$$= v \left( H - x \frac{dH}{dx} \right) - \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial H}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}
\Phi_b &\equiv \left. \frac{\partial \Phi^E}{\partial b} \right|_{a=0, b=1} = \left. \frac{\partial (h^{3/2} \tilde{\Phi} + ax)}{\partial b} \right|_{a=0, b=1} \\
&= \left[ \frac{3}{2} h^{1/2} \frac{\partial h}{\partial b} \tilde{\Phi} + h^{3/2} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial b} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial b} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b} \right) \right]_{a=0, b=1} \\
&= \left[ \frac{3}{2} h^{1/2} \tilde{\Phi} - \frac{x}{h^{1/2}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{x}} - \frac{y}{h^{1/2}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} - \frac{v-a}{2} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{v}} \right]_{a=0, b=1} \\
&= \frac{3}{2} \Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{v}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial v},
\end{aligned} \tag{A12}$$

$$\begin{aligned}
H_b &\equiv \left. \frac{\partial H^E}{\partial b} \right|_{a=0, b=1} = \left. \frac{\partial h \tilde{H}}{\partial b} \right|_{a=0, b=1} = \left[ \frac{\partial h}{\partial b} \tilde{H} + h \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial b} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{v}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial b} \right) \right]_{a=0, b=1} \\
&= \left[ \tilde{H} - \frac{x}{h} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}} - \frac{v-a}{2\sqrt{h}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{v}} \right]_{a=0, b=1} \\
&= H - x \frac{dH}{dx} - \frac{v}{2} \frac{\partial H}{\partial v}.
\end{aligned} \tag{A13}$$

ここに $(\Phi_a, H_a)$ は(3.4)-(3.7)の同次解であり,  $(\Phi_b, H_b)$ は(3.4)-(3.7)において非同次項を $F_n = 0$ ,  $G_n = 1$ としたときの解であることを留意しておく.  $a, b$ に関する2階微分も次のようにして得られる.

$$\begin{aligned}
\Phi_{aa} &\equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial a^2} \right|_{a=0, b=1} = \frac{3}{2} \left( \frac{v^2}{2} - 1 \right) \Phi + (1-v^2)x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (1-v^2)y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{3}{2} v \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
&\quad + v^2 \left( x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2v^2 xy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + v(v^2 + 2) \left( x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial v} + y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial v} \right),
\end{aligned} \tag{A14}$$

$$H_{aa} \equiv \left. \frac{\partial^2 H^E}{\partial a^2} \right|_{a=0, b=1} = -H + x \frac{dH}{dx} - \frac{v}{2} \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial H}{\partial v} + v^2 x^2 \frac{d^2 H}{dx^2} + (v^2 + 2) vx \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} + \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}, \tag{A15}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{ab} &\equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial a \partial b} \right|_{a=0, b=1} = \frac{3}{4} v \Phi - vx \frac{\partial \Phi}{\partial x} - vy \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \left( 1 + \frac{3}{4} v^2 \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
&\quad + v^2 \left( x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{v}{2} \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2vxy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + (v^2 + 1) \left( x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial v} + y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial v} \right),
\end{aligned} \tag{A16}$$

$$H_{ab} \equiv \left. \frac{\partial^2 H^E}{\partial a \partial b} \right|_{a=0, b=1} = -\frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial H}{\partial v} + vx^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + (v^2 + 1)x \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} + \frac{v}{2} \left( \frac{v^2}{2} + 1 \right) \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}, \tag{A17}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{bb} &\equiv \left. \frac{\partial^2 \Phi^E}{\partial b^2} \right|_{a=0, b=1} = \frac{3}{4} \Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{3}{4} v \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\
&\quad + x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{v^2}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} + 2xy \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + v \left( x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial v} + y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial v} \right),
\end{aligned} \tag{A18}$$

$$H_{bb} \equiv \left. \frac{\partial^2 H^E}{\partial b^2} \right|_{a=0, b=1} = -\frac{v}{4} \frac{\partial H}{\partial v} + x^2 \frac{d^2 H}{dx^2} + \frac{v^2}{4} \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} + vx \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v}. \tag{A19}$$



## 参考文献

- [1] Oikawa, M. & Yajima, N. 1973 Interactions of solitary waves—A perturbation approach to nonlinear systems—*J. Phys. Soc. Jpn.* **34**, 1093-1099.
- [2] Whitham, G. B. *Linear and nonlinear waves*. Wiley: Interscience. p.580.
- [3] Byatt-Smith, J. G. B. 1989 The head-on interaction of two solitary waves of unequal amplitude. *J. Fluid Mech.* **205**, 573-579.
- [4] Craig, W., Guyenne, P., Hammack, J., Henderson, D. & Sulem, C. 2006 Solitary water wave interactions. *Phys. Fluids* **18**, 057106.
- [5] Byatt-Smith, J. G. & Longuet-Higgins, M. S. 1976 On the speed and profile of steep solitary waves. *Proc. R. Soc. Lond. A* **350**, 175-189.
- [6] Tanaka, M. 1986 The stability of solitary waves. *Phys. Fluids* **29**, 650-655.
- [7] Longuet-Higgins, M. S. & Tanaka, M. 1997 On the crest instabilities of steep surface waves. *J. Fluid Mech.* **336**, 51-68.