

伸縮性を持つ渦糸の方程式に基づく輸送現象

日大・理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)*
富山大・工 角島 浩 (Hiroshi Kakuhata)**

* Department of Physics, College of Science and Technology,
Nihon University,

** University of Toyama

1 初めに

伸縮性を持つ渦糸の方程式を用い渦糸による運動量, 角運動量, 運動エネルギーなどの輸送及び渦糸から発生する音波の伝播について議論をする. 音波の伝播は, 渦糸による物理量の輸送と深く関わっていることが分かる. これらの現象の解析は, 現在まで局所誘導方程式を基に議論されてきた [1, 2, 3] が, ここでは伸縮性を伴う渦糸の従う運動方程式に基づいて議論し伸縮性を持たない渦糸による輸送現象と対比させて考察する.

そこで先ず, 伸縮性を持つ渦糸の運動方程式と局所誘導方程式との関係を復習する [4].

局所誘導方程式を

$$\mathbf{r}'_t = \mathbf{r}'_{s'} \times \mathbf{r}'_{s's'} \quad (1)$$

で与え, 伸縮性を持つ渦糸に対する運動方程式を

$$\mathbf{r}_t = \frac{\mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{ss}}{|\mathbf{r}_s|^3} \quad (2)$$

で与える. ここで, t は時間を, s' は渦糸に沿っての弧長を, s は伸縮をする渦糸に沿ってのパラメータをそれぞれ表す. 二つの運動方程式の関係は

$$ds' = g ds \quad (3)$$

で与えられる. ここで, g は

$$g = \sqrt{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_s} \quad (4)$$

で定義されたメトリックである. (3) を積分をする.

$$s' = f(s) \quad (5)$$

これらの関係を使うと伸縮性を持つ渦糸に対する運動方程式の解は、局誘導方程式の解を用いて

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}'(f(s), t) \quad (6)$$

で与えられることが分かる。

具体的に伸縮性を持つ渦糸ソリトンの解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \sin 2(\lambda_R f(s) - \omega_R t) \operatorname{sech} 2(\lambda_I f(s) - \omega_I t), \\ y &= -\frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \cos 2(\lambda_R f(s) - \omega_R t) \operatorname{sech} 2(\lambda_I f(s) - \omega_I t), \\ z &= f(s) - \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \tanh 2(\lambda_I f(s) - \omega_I t) \end{aligned} \quad (7)$$

で与えられる。ここで、 $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ と $\omega = 2\lambda^2$ はソリトンの形状で決まるパラメーターである。

この報告の構成は次の通りである。次の章で非圧縮性で回転を持つ流体の基礎方程式から伸縮性を持つ渦糸の方程式を導出する。第3章で、第2章の導出過程の議論を使い3次元空間で定義されている運動量、角運動量と運動エネルギーを伸縮性を持つ1次元渦糸に対するそれぞれ量の表示を与える。第4章では、渦糸の運動量、角運動量と運動エネルギーの時間依存性を議論し、伸縮性を持つ渦糸ソリトンに対するそれらの輸送量を計算する。第5章では伸縮性を持つ渦糸から発生する音波を議論する。伸縮性を持つ渦糸は、伸縮性を持たない渦糸では見られなかった伸縮性に伴う固有の音波を発生することを示す。最後にまとめを行う。

2 非圧縮性で回転を持つ流体の運動方程式の導出

非圧縮性で回転を持つ流体の運動方程式を [5]

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (8)$$

で与える。ここで、 \mathbf{u} と $\boldsymbol{\omega}$ は流体の速度と渦度である。(8)を解き流速は

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV(\mathbf{r}') \quad (9)$$

で与えられる.

本報告では, 無限小の断面と有限の渦の強さを持つ渦糸を考えるので体積要素を

$$dV = dS \cdot dl \quad (10)$$

のように渦糸の断面積 dS と渦糸に沿っての線要素 dl に分ける. 渦度は線要素に平行であると考え.

$$\boldsymbol{\omega} \parallel d\boldsymbol{l} \quad (11)$$

更に, 渦糸の強さ κ を

$$\int \boldsymbol{\omega} \cdot d\boldsymbol{S} = \kappa \quad (12)$$

で与えると3次元空間で定義された流速 (9) は, 1次元空間での渦糸の流速として

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \times d\boldsymbol{l}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \quad (13)$$

と書き表すことができる.

ここで, \boldsymbol{r} を渦糸上に取り, 時間変数 t とパラメータ s を用いて $\boldsymbol{r}(s, t)$ と表す. その位置から少し離れた渦糸に沿って位置ベクトル \boldsymbol{r}' をパラメータ δ を用いて $\boldsymbol{r}(s + \delta, t)$ と表すと $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ と $d\boldsymbol{l}$ は [6]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r}(s, t) - \boldsymbol{r}(s + \delta, t) \\ &= -\frac{\partial \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial s} \delta - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial s^2} \delta^2 + \dots, \\ d\boldsymbol{l} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial s} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}(s, t)}{\partial s^2} \delta + \dots \right) d\delta \end{aligned} \quad (14)$$

と展開できる. 従って, 渦糸上での位置 \boldsymbol{r} での速度 \boldsymbol{u} は渦糸の速度となり (13) は

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial s^2}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \right|^3} \int \frac{d\delta}{|\delta|} \quad (15)$$

と書き換えることができる. 積分の範囲を $\varepsilon \leq |\delta| \leq l$ に限定する局所誘導近似を用いて積分を行う

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} = \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial s^2}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \right|^3} \log \frac{l}{\varepsilon} + \mathcal{O}(1). \quad (16)$$

この導出過程で s は渦糸に沿ってのパラメーターで、弧長に限定してないことを注意しておく。時間を規格化して書き直すと

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial s^2}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right|^3} \quad (17)$$

の伸縮性を許す渦糸に対する運動方程式を得る。

3 運動量, 角運動量, エネルギー輸送

3次元流体での運動量 P , 角運動量 M と運動エネルギー T を

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\rho}{2} \int \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} dV, \\ M(t) &= \frac{\rho}{3} \int \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV, \\ T(t) &= \rho \int \mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV \end{aligned} \quad (18)$$

で定義する。

前章の議論を踏まえ3次元空間でのこれらの輸送量を1次元空間のパラメーター s を用いて渦糸の運動量, 角運動量 と運動エネルギーに書きかえると次のように与えられる

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{\kappa\rho}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} ds, \\ M(t) &= \frac{\kappa\rho}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) ds, \\ T(t) &= \kappa\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right) ds. \end{aligned} \quad (19)$$

更に, 渦糸の全長を

$$L(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \right| ds \quad (20)$$

で与える。

伸縮性を持つ渦糸に対する運動方程式(2)を持ちいて運動量などの諸量

の時間依存性を計算すると次のように与えられる

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial P}{\partial t} &= \kappa\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|} \right) ds, \\
 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\kappa\rho}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_t) - \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|} \right) ds, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} &= -\kappa\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \left(\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_s}{|\mathbf{r}_s|} \right) ds, \\
 \frac{\partial L(t)}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_{st}}{|\mathbf{r}_s|} ds.
 \end{aligned} \tag{21}$$

これらの結果から境界条件を用いると渦糸に対し P , M と T は運動の保存量であることが分かる。従って、渦糸は、これらの量を一定量運ぶことが分かった。また、運動方程式を用いると $\mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}_{st} = 0$ であることから全長も一定であることが示された。

伸縮性を持つ渦糸に対するソリトン解(7)を用いて運動量などを計算すると次の値が得られる

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\kappa\rho\lambda_R\lambda_I}{(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)^2} \mathbf{e}_z, \\
 M &= \frac{\kappa\rho\lambda_I(\lambda_I^2 - 3\lambda_R^2)}{6(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)^3} \mathbf{e}_z, \\
 T &= \frac{\kappa\rho\lambda_I(\lambda_I^2 + 5\lambda_R^2)}{(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

運動量, 角運動量, 運動エネルギーの局所密度 $\mathbf{r} \times \mathbf{r}_s$, $\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_s)$, $\mathbf{r}_t \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_s)$ は伸縮性を与える任意関数 $f(s)$ に依存するが, 積分を実行したグローバルな量は, その任意関数に依存しないことが分かった。これら(22)の値は, 局所誘導方程式から求めた値と一致する。

4 音波の発生

伸縮性を持つ渦糸から発生する音波について考察する。音波を表す基礎方程式を圧力と渦に対する Helmholtz の方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p &= \rho \nabla \cdot \mathbf{L}, \\
 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{L} &= 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

で与える. ここで, p は音波の圧力を表し, c は音波の伝播速度を表す. ここで, L は

$$L = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (24)$$

で与える.

Möhring の議論を用いると渦糸に対する音波は [7]

$$p = \frac{1}{4\pi r} \left[-\frac{\mathbf{r}}{cr} \cdot \frac{d^3 \mathbf{P}(t^r)}{dt^3} + \frac{r_i r_j}{c^2 r^2} \frac{d^3 Q_{ij}(t^r)}{dt^3} - \frac{1}{3} \frac{d^3 T(t^r)}{dt^3} \right] \quad (25)$$

で与えられる. ここで Q_{ij} は

$$Q_{ij} = \frac{\kappa \rho}{3} \int r'_i (\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s})_j ds \quad (26)$$

で定義される. t^r は

$$t^r = t - \frac{r}{c} \quad (27)$$

で与えられ遅延時間を表し, \mathbf{r} と t は音波の観測点での位置と時刻である. c は音速を表す. ちなみに, 角運動量は Q_{ij} を用いて

$$\begin{aligned} M &= \frac{\kappa \rho}{3} \int \mathbf{r}' \times (\mathbf{r}' \times \frac{\partial \mathbf{r}'}{\partial s}) ds \\ &= (Q_{23} - Q_{32}) \mathbf{e}_x + (Q_{31} - Q_{13}) \mathbf{e}_y + (Q_{12} - Q_{21}) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (28)$$

と書くことができる.

(25) で \mathbf{P} と T は運動の保存量であるので時間微分をすると消え, これらの項は (25) の音波には効かない. Q_{ij} を伸縮性を持つソリトン解 (7) を

用いて具体的に計算をする

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} [4\lambda_I f \operatorname{sech}^2 \Theta - f_s \sin 2\Omega \operatorname{sech}^2 \Theta] ds, \\
 Q_{22} &= -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} [4\lambda_I f \operatorname{sech}^2 \Theta + f_s \sin 2\Omega \operatorname{sech}^2 \Theta] ds, \\
 Q_{33} &= 8\lambda_R \gamma \int_{-\infty}^{\infty} f \operatorname{sech}^2 \Theta ds, \\
 Q_{12} &= -\gamma \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_s \cos 2\Omega \operatorname{sech}^2 \Theta ds + \frac{3\lambda_R^2 - \lambda_I^2}{\lambda_I(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)} \right\}, \\
 Q_{21} &= -\gamma \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_s \cos 2\Omega \operatorname{sech}^2 \Theta ds - \frac{3\lambda_R^2 - \lambda_I^2}{\lambda_I(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)} \right\}, \quad (29) \\
 Q_{13} &= 4 \frac{\lambda_R \gamma}{\lambda_I} \int_{-\infty}^{\infty} f_s \sin \Omega \operatorname{sech} \Theta ds, \\
 Q_{31} &= 4 \frac{\lambda_R \gamma}{\lambda_I} \int_{-\infty}^{\infty} f_s \sin \Omega \operatorname{sech} \Theta ds, \\
 Q_{23} &= -4 \frac{\lambda_R \gamma}{\lambda_I} \int_{-\infty}^{\infty} f_s \cos \Omega \operatorname{sech} \Theta ds, \\
 Q_{32} &= -4 \frac{\lambda_R \gamma}{\lambda_I} \int_{-\infty}^{\infty} f_s \cos \Omega \operatorname{sech} \Theta ds.
 \end{aligned}$$

ここで, γ, Ω, Θ は

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{\lambda_I^2}{12(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)^2}, \\
 \Omega &= 2\lambda_R f - 2\omega_R t^r + \delta, \\
 \Theta &= 2\lambda_I f - 2\omega_I t^r + \epsilon
 \end{aligned} \quad (30)$$

で与えられる.

次のことを注意しておく. f の s 微分 f_s を含む項は, $f_s ds = df$ と変数変換をすると f についての積分と置き換わることができ, 渦糸が伸縮性を持たない場合と同じ値となり, 伸縮性の効果は陽に表れてこない. 伸縮性の効果が表れるのは Q_{11}, Q_{22}, Q_{33} の3項の f の積分に依存する部分のみである.

4.1 伸縮性を持たない渦糸ソリトン

$f(s) = s$ のときの Q_{ij} を求める

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= -\gamma \left[\frac{2}{\lambda_I} (2\omega_I t^r - \epsilon) - \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \sin 2\Delta \right], \\
 Q_{22} &= -\gamma \left[\frac{2}{\lambda_I} (2\omega_I t^r - \epsilon) + \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \sin 2\Delta \right], \\
 Q_{33} &= 4\gamma \frac{\lambda_R}{\lambda_I^2} (2\omega_I t^r - \epsilon), \\
 Q_{12} &= \gamma \left[-\frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \cos 2\Delta - \frac{3\lambda_R^2 - \lambda_I^2}{\lambda_I(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)} \right], \\
 Q_{21} &= \gamma \left[-\frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \cos 2\Delta + \frac{3\lambda_R^2 - \lambda_I^2}{\lambda_I(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)} \right], \\
 Q_{13} &= 2\gamma \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{sech} \frac{\lambda_R \pi}{2\lambda_I} \sin \Delta, \\
 Q_{31} &= 2\gamma \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{sech} \frac{\lambda_R \pi}{2\lambda_I} \sin \Delta, \\
 Q_{23} &= -2\gamma \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{sech} \frac{\lambda_R \pi}{2\lambda_I} \cos \Delta, \\
 Q_{32} &= -2\gamma \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{sech} \frac{\lambda_R \pi}{2\lambda_I} \cos \Delta
 \end{aligned} \tag{31}$$

で与えられる。ここで、

$$\Delta = 4(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)t^r - \frac{1}{\lambda_I}(\lambda_R \delta - \lambda_I \epsilon). \tag{32}$$

図1のように渦糸が伝播する方向に θ 、それと垂直な方向に ϕ の座標軸をとると音波は

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{1}{4\pi c^2 r^3} \sum_{i,j} r_i r_j \frac{d^3 Q_{ij}}{dt^3} \\
 &= -\frac{8\lambda_R(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)}{3c^2 r} \left[4 \operatorname{cosec} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \sin \theta \cos(2\Delta - 2\phi) \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sech} \frac{\lambda_R \pi}{2\lambda_I} \sin 2\theta \cos(\Delta - \phi) \right]
 \end{aligned} \tag{33}$$

で与えられる。

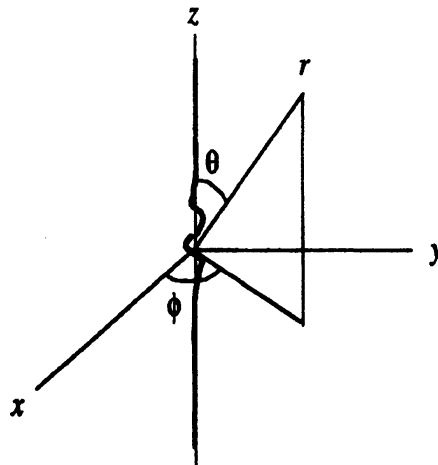


図 1: 渦糸からの音波の伝播方向座標

λ として以前実験の解析から得た値 [8]

$$\lambda = 0.75 + 0.37i \quad (34)$$

を用いて $\theta = \pi/2$ の方向に放出される音波を図 2 に示す. θ 方向の音波は, 渦糸ソリトンの回転に伴って渦巻状に伝播していくことが分かる. 従って, θ が一定の方角にたいしては正弦波として伝播している.

4.2 伸縮性を持つ渦糸ソリトン

一般的な $f(s)$ のときの Q_{ij} を求める. 前に注意をしたように Q_{11} , Q_{22} , Q_{33} の f に依存する項を除いて (31) の結果がそのまま使える. そこでこの 3 項のみを示す

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -\gamma \left[\int_{-\infty}^{\infty} 4\lambda_I f \operatorname{sech}^2 \Theta \, ds - \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \sin 2\Delta \right], \\ Q_{22} &= -\gamma \left[\int_{-\infty}^{\infty} 4\lambda_I f \operatorname{sech}^2 \Theta \, ds + \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I^2} \operatorname{cosech} \frac{\lambda_R \pi}{\lambda_I} \sin 2\Delta \right], \\ Q_{33} &= 4\gamma \lambda_R \int_{-\infty}^{\infty} 4\lambda_I f \operatorname{sech}^2 \Theta \, ds. \end{aligned} \quad (35)$$

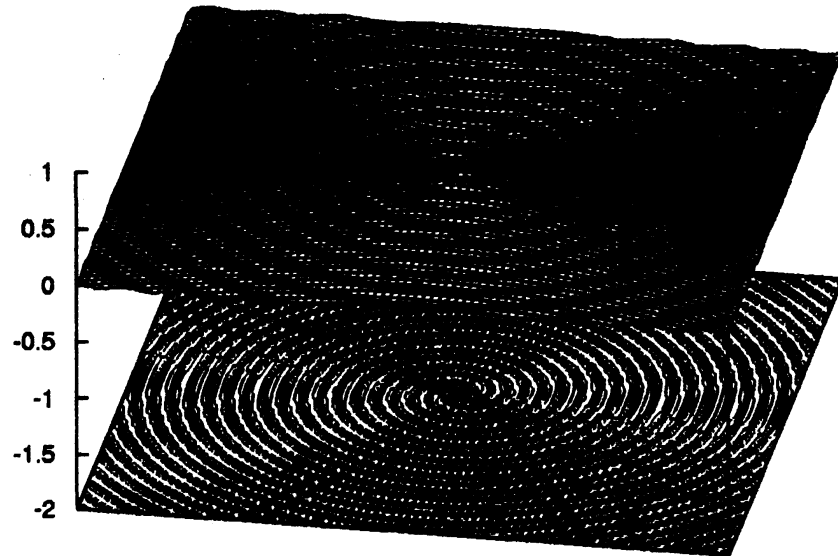


図 2: 伸縮性を持たない渦糸ソリトンによる音波の伝播 $\lambda = 0.75 + 0.37i$,
 $-6 \leq t^r \leq 5$, $\theta = \pi/2$

(35) を用いると音波は

$$\begin{aligned}
 p = & -\frac{8\lambda_R(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)}{3c^2r} \\
 & \times \left\{ 4\operatorname{cosec} \frac{\lambda_R\pi}{\lambda_I} \sin \theta \cos(2\Delta - 2\phi) + \operatorname{sech} \frac{\lambda_R\pi}{2\lambda_I} \sin 2\theta \cos(\Delta - \phi) \right. \\
 & \left. + \frac{128\lambda_R^2\lambda_I^4}{\pi(\lambda_R^2 + \lambda_I^2)^3} [\lambda_I(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - \lambda_R\hat{z}^2] \int_{-\infty}^{\infty} f(s) [\operatorname{sech}^2 - 6\operatorname{sech}^4\Theta] \tanh\Theta ds \right\}
 \end{aligned} \tag{36}$$

で与えられる。ここで、 \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} は次のように定義され、音波の伝播方向を表す。

$$\hat{x} = \frac{x}{r}, \quad \hat{y} = \frac{y}{r}, \quad \hat{z} = \frac{z}{r}. \tag{37}$$

始めの例として渦糸の伸縮性を

$$f(s) = s + 0.7\operatorname{sech} s \tag{38}$$

で与え音波の解析する. (36) の積分を数値的に計算する. (36) で渦糸の伸

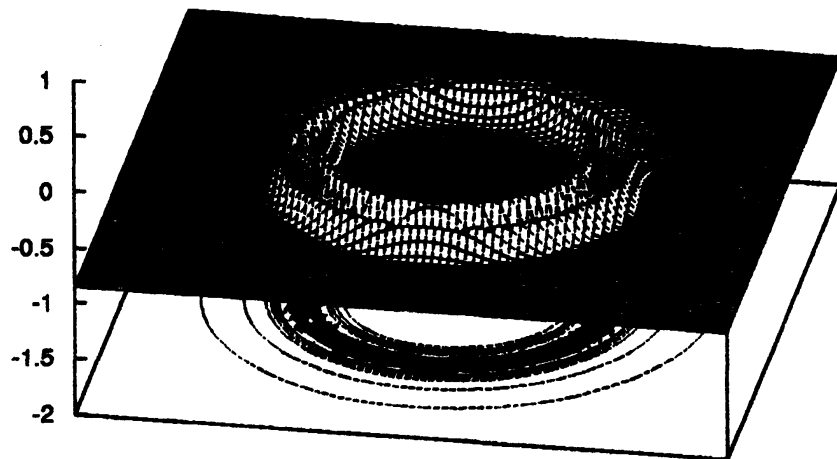


図 3: sech 型の伸縮性を持つ渦糸ソリトン解を用いた (36) の伸縮性が陽に表れる積分項の寄与による音波の伝播 $\lambda = 0.75 + 0.37i$, $\theta = \pi/2$, $-6 \leq t^r \leq 5$

縮性が陽に表れる積分を含む右辺第 3 行目の項のみの寄与を図 3 に示す. 音波の伝播から伸縮のある場所と形状が明らかに見えることが分かる. また, この音波は ϕ の依存性を持たない. 第 3 図のソリトンの伸縮が陽に現われる効果と第 2 図の陽に現われない効果の和として全体の寄与 (36) を図 4 に示す. 両者の干渉はない.

次に, 渦糸の伸縮性を

$$f(s) = s + 0.7 \tanh s \quad (39)$$

にとり解析する. (36) の f に依存する項の積分は数値的に行う. 先ず, (36) の渦糸の伸縮性が陽に現われる音波の伝播を図 5 に示す. 渦糸ソリトンの伸縮性が音波に顕著に現われていることが分かる. 角度依存性との

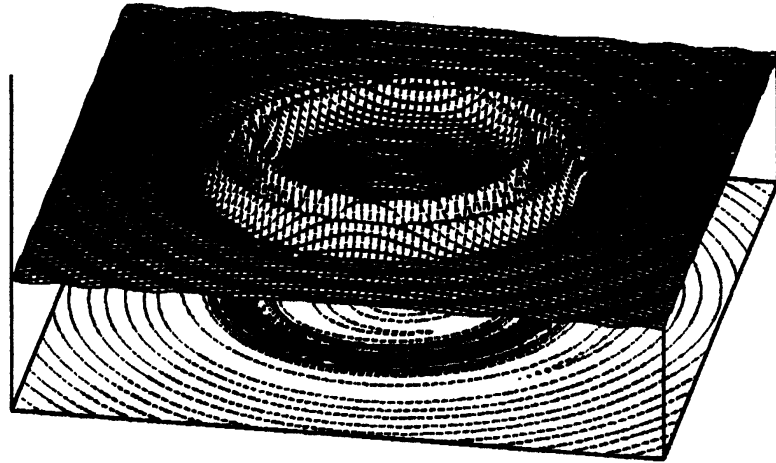


図 4: sech 型の伸縮性を持つ渦糸ソリトンによる音波の伝播 $\lambda = 0.75 + 0.37i$, $\theta = \pi/2$, $-6 \leq t^r \leq 5$

特徴として音波は ϕ の依存性を持たないことが分かる. 全体の寄与を図 6 に示す.

5 まとめ

非圧縮性で回転を持つ流体の方程式から伸縮性を持つ渦糸に対する運動方程式の導出した. その導出過程での知識を使い伸縮性を持つ渦糸に対する運動量, 角運動量と運動エネルギーの表示を求めた.

この表示を用いて伸縮性を持つ渦糸に対する運動方程式を基に運動量, 角運動量と運動エネルギーの時間依存性を調べた. それらの量が時間に依存しない保存量であることが分かった. そのため渦糸は一定量のそれらの物理量を輸送していることが分かった. 伸縮性を持つソリトン解を用いてそれらの量を具体的に計算した. 得られた量は, 伸縮を表す関数 $f(s)$

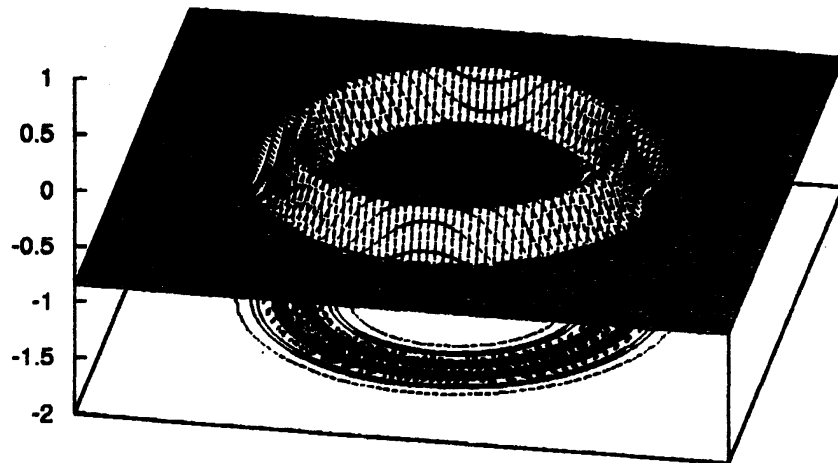


図 5: \tanh 型の伸縮性を持つ渦糸ソリトン解を用いた (36) の伸縮性が陽に表れる積分項の寄与による音波の伝播 $\lambda = 0.75 + 0.37i$, $\theta = \pi/2$, $-6 \leq \nu \leq 5$

には依存せず、陽に伸縮の効果を表すものでなかった。

次に、伸縮性を有する渦糸からの音波の発生を議論した。音波を観測すると、もし渦糸が伸縮性を持つとすると、その収縮している場所と形状が音波から特定できることが分かった。伸縮性を持つ渦糸から発生する音波は、その角度依存性に特徴を持つ。その一つとして伸縮性が無いときには表れなかった $\theta = 0$ の方向、即ち、渦糸が伝播する方向にも音波が伝わる。また、それに垂直な xy 方向の角度 ϕ の依存性が無いことが分かった。

まとめると、運動量、角運動量、運動エネルギーなど運動の保存量に関する量は、伸縮性を陽に表すことは無く、局所誘導方程式で記述される伸縮性を持たない渦糸と同じであった。しかし、音波には保存量でない項からの寄与が含まれ、その項の効果として渦糸の伸縮効果が陽に見ることができた。音波が実験により測定されることがあれば渦糸の伸縮効果を測

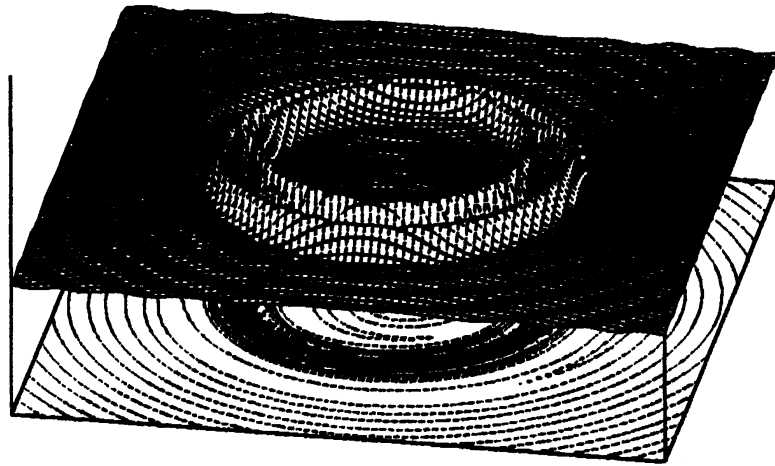


図 6: \tanh 型の伸縮性を持つ渦糸ソリトンによる音波の伝播 $\lambda = 0.75 + 0.37i$, $\theta = \pi/2$, $-6 \leq t^* \leq 5$

定でき, 渦糸について新しい性質が加わることが期待できる.

参考文献

- [1] Y. Kimura, Journal of the Physical Society of Japan **55**, (1986) 1787.
- [2] Y. Fukumoto, Journal of the Physical Society of Japan **56**, (1987) 4207.
- [3] Y. Kimura, Physica **D37**, (1989) 485.
- [4] K. Konno and H. Kakuhata, Journal of the Physical Society of Japan **76**, (2006) 023001.

- [5] G.K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1973.
- [6] R.J. Arms and F.R. Hama, *Phys. Fluids* **8** (1965) 553.
- [7] W. Möhring, *J. Fluid Mech.* **85**, (1978) 685.
- [8] K. Konno and Y.H. Ichikawa, *Journal of the Physical Society of Japan* **63**, (1994) 1754.