数理解析研究所講究録
第 1594 巻 2008 年 105-120

非等スペクトル線形問題について

富山県立大学・工学部　戸田 晃一 (Kouichi TODA) *
Faculty of Engineering,
Toyama Prefectural University

概要

通常，非線形可積分系に付随する線形問題（Lax 対）に現れるスペクトル変数は，その系の時空変数（独立変数）に対して**定数**である．これを等スペクトル線形問題と呼ぶ．それでは，いつでもスペクトル変数は定数であることが要求されるのであろうか，というのはごく自然な問題意識であろう．

本稿では，スペクトル変数がその系の時空変数に対して**定数**でない場合，つまり**非等スペクトル線形問題**と，関連する可積分な高次元 KdV 階層の一つである Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 階層を紹介する．

1 はじめ

もともと「可積分（性）」とは，有限自由度の Hamilton 力学系に対して確立された概念であった．すなわち, Liouville-Arnold の定理 [1]:

> 自由度 N の Hamilton 系に N 個の保存量があり, それが Poisson 括弧に関して互いに可換ならば, 初期値問題は有限回の求積[1]によって解ける

が成り立つ系, つまり**初期値問題が求積操作の有限回の繰り返しで解けるのが可積分系**である．それではソリトン方程式に代表される非線形な無限自由度の連続系に関してはどうだろうか？ 実はかなり怪しくなる[2]．現時点では,（少なくとも可積分系の研究者の間では,）考えている力学系が以下の性質（証拠）；

1. **線形化可能**:
適当な変数変換により線形化できる．
2. **逆散乱法で解ける時** [2]:
「『適当な境界条件の下で初期値問題を解くこと』が『線形の積分方程式を解くこと』に帰着できる」というのが, 逆散乱法のポイントである．

*kouichi@yukawa.kyoto-u.ac.jp
[2]離散力学系となると更に怪しくなる．

3. Lax 対の存在 [3]:
ほとんどの場合, 逆散乱法の手順にのる.

4. Liouville-Arnold の意味での「可積分性」:
適当な Poisson 構造の下で無限個の互いに可換な保存量が存在する. (または対称性が存在する.)

5. (反) 自己双対 Yang-Mills 方程式からの次元還減 [4]:
4 次元時空上の (反) 自己双対 Yang-Mills 方程式に対して,「適当に」ゲージ群を固定し, 場の量 や 空間次元に「適当な」制約を加えることで, 非線形可積分系を導出できることが知られている. そして, おそらく全ての可積分方程式が導出できるであろうと信じられている (**Ward 予想**).

6. bi-Hamilton 構造 [5]:
異なる Poisson 構造をもつ二通りの Hamilton 系として定式化できる. これから Liouville-Arnold の意味での「可積分性」に従うことがいえる.

7. 厳密解の存在 [6, 7]:
広田の直接法などにより, 広いクラスの特殊解 (N-ソリトン解のような厳密解) の表式を逐次的 かつ 具体的に求めることができる.

8. Bäcklund 変換の存在 [6]:
これがあれば大体簡単な解から逐次的にソリトン解 (やそれに類する解) が構成できる.

9. Painlevé 性 [8]:
非線形常微分方程式の級数解のもつ「初期値に伴って動く特異点は高々極のみ」という性質のことである. そして, 非線形偏微分方程式に対しても類似の概念が提唱されている.

のどれか一つでももてば「非線形可積分系」(の候補) であると考えられている [9]. 本稿では, 非等スペクトル線形問題なるものを紹介するが, それは上記に挙げた 9 つの性質 (証拠) のどれと関係しているのかというと, **3.Lax 対の存在**である.

2 次元時空上の (形式的) 波動関数ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ に対する線形問題:

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{X}\psi, \\ \psi_t = \mathcal{T}\psi \end{cases} \tag{1}$$

を考える. 但し, 行列演算子 $\mathcal{X}$ および $\mathcal{T}$ を, 2 次正方行列が

$$\begin{cases} \mathcal{X} = -i\eta\sigma_3 \; + \; u\sigma_+ \; - \; \sigma_-, \\ \mathcal{T} = \frac{1}{2}(i\eta u - 2u_x)\,\sigma_3 \; + \; \frac{1}{4}(2i\eta u_x - u_{xx} - 2u^2)\,\sigma_+ \; + \; \frac{1}{2}u\sigma_- \end{cases} \tag{2}$$

で与えられているとする．ここで，

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\qquad \sigma_+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\qquad \sigma_-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \tag{3}$$

であり[3]，また，$u=u(t,x)$ および スペクトル変数 $\eta=\eta(t)$ としている．この線形問題 (1) は，**Ablowitz-Kaup-Newell-Segur（AKNS）階層**[10] を与える．それをみていく．

両立条件（可積分条件）：

$$(\psi_x)_t=(\psi_t)_x \iff [\partial_x,\ \partial_t]=0 \tag{4}$$

より，線形問題 (1) は可換条件：

$$[\partial_x-\mathcal{X},\ \partial_t-\mathcal{T}]=0 \iff \mathcal{X}_t-\mathcal{T}_x+[\mathcal{X},\ \mathcal{T}]=0 \tag{5}$$

と等価となる[4]．そして，スペクトル変数 η が

$$\eta_t=0 \tag{6}$$

を満たすとすると，（可積分な）ソリトン方程式の代表である，Korteweg-de Vries（KdV）方程式 [11]：

$$u_t+\frac{1}{4}u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x=0 \tag{7}$$

と可換条件 (5) が等価となる．このとき条件 (6) を **等スペクトル（*isospectral*）条件**，線形問題 (1) を**等スペクトル線形問題**，そして可換条件 (5) を**（等スペクトル）Lax 方程式**とそれぞれ呼ぶ．つまり，等スペクトル条件 (6) は，可換条件 (5) と KdV 方程式 (7) が等価となるために要求された条件に過ぎないのである[5]．それでは，スペクトル変数は時空変数（独立変数）に対して定数であることがいつでも要求されるのであろうか，というのはごく自然な問題意識であろう．

これまでにも断続的に非等スペクトル線形問題は研究されてきた [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22]．本稿では，これまでの非等スペクトル線形問題に関する研究成果を踏まえて，$(1+1)$ 次元等スペクトル線形問題の空間高次元化による非等スペクトル線形問題の定式化（処方）を，天下り的にではあるが，与える．そして，AKNS 階層の空間高次元化を例にとり，その有効性を具体的な計算過程と結果を通して紹介したい．

---

[3] $sl(2)$ の生成元である．付録 A を参照．

[4] $\mathcal{X}$ と $\mathcal{T}$ に少し手を加えると，modified KdV，Zakharov, sine-Gordon 方程式などと等価になることが知られている．

[5]「過ぎない」とは本当はいい過ぎである．多くの可積分系で同様に等スペクトル条件が要求されるのは事実である．また，等スペクトル線形問題が現在では数理科学 や 数理物理学の様々な研究分野に登場してくる．しかし，本稿で考察される問題意識の立場からあえてこのように書いた．

(記号) 簡単のため, 本稿中の演算子記号として,

$$f_x(x) \equiv \partial_x f(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

$$\partial_x^{-1} f(x) \equiv \int_{\infty}^{x} f(s)ds,$$

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{B}] \equiv \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}$$

と約束しておく. このとき, 明らかに

$$\partial_x \partial_x^{-1} f(x) = \partial_x^{-1} \partial_x f(x) = 1,$$

$$[\mathcal{A},\ \mathcal{A}] = 0$$

である.

2. 非等スペクトル線形問題について

3 次元時空上の $GL(n)$-値（形式的）波動関数 $\psi = \psi(t, x, z)$ に対して

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi = \mathcal{N}\psi, \qquad j \in \pm\mathbb{N} \end{cases} \tag{8}$$

と与えられる線形問題について考察する[6]. ここで, $\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ は適当な演算子[7]であり, ξ は **スペクトル変数**であり, $\xi = \xi(t, z)$ とする. そして, 両立条件（可積分条件）:

$$\left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi_x = \partial_x \left\{\left(\partial_t - \xi^j \partial_z\right)\psi\right\} \iff \left[\partial_x,\ \partial_t - \xi^j \partial_z\right] = 0 \tag{9}$$

より, 線形問題 (8) は可換条件:

$$\left[\partial_x - \mathcal{M},\ \partial_t - \xi^j \partial_z - \mathcal{N}\right] = 0 \iff \mathcal{M}_t - \mathcal{N}_x + [\mathcal{M},\ \mathcal{N}] - \xi^j \mathcal{M}_z = 0 \tag{10}$$

と等価となる. そして, スペクトル変数 ξ が非線形偏微分方程式:

$$\xi_t = \mathcal{F}(\xi, \xi_z) \tag{11}$$

を満たしうることに注意したい[8]. この非線形偏微分方程式 (11) を **非等スペクトル（*non-isospectral*）条件**と呼びたい. そしてそれに合わせて, 線形問題 (8) を**非等**

---

[6]この線形問題の二つ目の左辺に注目してもらいたい. ベクトル場 ∂_z と スペクトル変数 ξ が積の形で現れている. これは KdV 階層などの通常の可積分なソリトン階層とは 決定的に異なる 点である. 高崎氏はこの形こそがこの線形問題から出てくる可積分階層が,（反）自己双対 Yang-Mills 階層と Bogomolny 階層の中間に位置するのであると主張している.

[7]微分演算子でも行列でもよいが, 以下では行列の場合を考える.

[8]行列 $\mathcal{M}$ の成分が ξ を含めば, 可換条件 (10) の $\xi^j \mathcal{M}_z$ から出てくる.

スペクトル線形問題と，可換条件 (10) を**非等スペクトル Lax 方程式**と呼ぶことにする.

ここで，次元還元について少しコメントしておきたい. $\psi_z = \psi_x$（つまり $z = x$）という条件の下で，非等スペクトル（*non-isospectral*）線形問題 (8) は

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ \psi_t = (\xi^j \mathcal{M} + \mathcal{N})\,\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{12}$$

となり，$\psi_z = \psi_t$ という条件で，

$$\begin{cases} \psi_x = \mathcal{M}\psi, \\ (1-\xi^j)\,\psi_t = \mathcal{N}\psi, \qquad j \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{13}$$

とそれぞれ次元逓減[9]される. これらはともに等スペクトル（*isospectral*）線形問題となり，前者は Korteweg-de Vries(KdV) 階層を，後者は Ablowitz-Kaup-Newell-Segur 型浅水波階層を与える.

これまでが，非等スペクトル線形問題の統一的な定式化の話である. これから $j \in \mathbb{N}$ の場合の Ablowitz-Kaup-Newell-Segur(AKNS) 階層を例にとり，詳しく非等スペクトル（*non-isospectral*）線形問題 (8) について考察する.

2 具体例： 非等スペクトル高次元 AKNS 階層

AKNS 階層は，2 成分波動関数ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ に対する行列演算子 $\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$ が 2 次正方行列[10]：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = -i\xi\sigma_3 \;+\; q\sigma_+ \;+\; r\sigma_-, \\ \mathcal{N} = A\sigma_3 \;+\; B\sigma_+ \;+\; C\sigma_- \end{cases} \tag{14}$$

で与えられる. 但し，$q = q(t,x,z)$，$r = r(t,x,z)$，$A = A(\xi; q, r, q_x, r_x, \ldots.)$，$B = B(\xi; q, r, q_x, r_x, \ldots.)$，$C = C(\xi; q, r, q_x, r_x, \ldots.)$ である[11]. このとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の交換子積は

$$\begin{aligned} [\mathcal{M},\, \mathcal{N}] &= [-i\xi\sigma_3 + q\sigma_+ + r\sigma_-,\; A\sigma_3 + B\sigma_+ + C\sigma_-] \\ &= (qC - Br)\,\sigma_3 - 2\,(i\xi B + qA)\,\sigma_+ + 2\,(i\xi C + rA)\,\sigma_- \end{aligned} \tag{15}$$

[9] 次元還元ともいう.
[10] 付録 B を参照.
[11] ここで，q，r，A，B および C はスカラーとする. 行列とすることもできる.

であるので，非等スペクトル（*non-isospectral*）Lax 方程式 (10) より，以下の連立方程式：

$$A_x - qC + Br + i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0, \tag{16}$$

$$q_t - B_x - \xi^j q_z - 2i\xi B - 2qA = 0, \tag{17}$$

$$r_t - C_x - \xi^j r_z + 2i\xi C + 2rA = 0 \tag{18}$$

をえる．ここで，$A \sim C$ を次のような ξ の冪展開：

$$A = \sum_{k=j_a}^{j_A} A_k \xi^k, \tag{19}$$

$$B = \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k \xi^k, \tag{20}$$

$$C = \sum_{k=j_c}^{j_C} C_k \xi^k \tag{21}$$

をすることにより，非等スペクトル高次元 AKNS 階層がえられる．但し，$A_j = A(q, r, q_x, r_x, ...)$，$B_j = B(q, r, q_x, r_x, ...)$ および $C_j = C(q, r, q_x, r_x, ...)$ である．そして，これらの冪展開 (19) - (21) を連立方程式 (16) - (18) に代入する．方程式 (16) より，

$$\sum_{k=j_a}^{j_A} (A_k)_x \xi^k - \sum_{k=j_c}^{j_C} qC_k \xi^k + \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k r \xi^k = i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right), \tag{22}$$

方程式 (17) より，

$$\begin{aligned} q_t &= \sum_{k=j_b}^{j_B} (B_k)_x \xi^k + \xi^j q_z + 2i \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k \xi^{k+1} + 2 \sum_{k=j_a}^{j_A} qA_k \xi^k \\ &= \sum_{k=j_b}^{j_B} (B_k)_x \xi^k + \xi^j q_z + 2i \sum_{k=j_b+1}^{j_B+1} B_{k-1} \xi^k + 2 \sum_{k=j_a}^{j_A} qA_k \xi^k, \end{aligned} \tag{23}$$

方程式 (18) より，

$$\begin{aligned} r_t &= \sum_{k=j_c}^{j_C} (C_k)_x \xi^k + \xi^j r_z - 2i \sum_{k=j_c}^{j_C} C_k \xi^{k+1} - 2 \sum_{k=j_a}^{j_A} rA_k \xi^k \\ &= \sum_{k=j_c}^{j_C} (C_k)_x \xi^k + \xi^j r_z - 2i \sum_{k=j_c+1}^{j_C+1} C_{k-1} \xi^k - 2 \sum_{k=j_a}^{j_A} rA_k \xi^k \end{aligned} \tag{24}$$

となる．方程式 (22) に注目する．その左辺からは ξ の冪しかでてこないので，右辺にある項はそれ自身が零とならなければならない．つまり，スペクトラル変数 ξ は次の非線形偏微分方程式：

$$\xi_t - \xi^j \xi_z = 0 \tag{25}$$

を満たさなければならない．これが，AKNS 階層に対する**非等スペクトル条件**である．そして，このとき A, B, C に対する連立方程式:

$$0 = \sum_{k=j_a}^{j_A} (A_k)_x \xi^k - \sum_{k=j_c}^{j_C} qC_k\xi^k + \sum_{k=j_b}^{j_B} B_k r\xi^k, \tag{26}$$

$$q_t = \sum_{k=j_b}^{j_B} (B_k)_x \xi^k + \xi^j q_z + 2i \sum_{k=j_b+1}^{j_B+1} B_{k-1}\xi^k + 2\sum_{k=j_a}^{j_A} qA_k\xi^k, \tag{27}$$

$$r_t = \sum_{k=j_c}^{j_C} (C_k)_x \xi^k + \xi^j r_z - 2i \sum_{k=j_c+1}^{j_C+1} C_{k-1}\xi^k - 2\sum_{k=j_a}^{j_A} rA_k\xi^k \tag{28}$$

が**非等スペクトル AKNS 階層**を与える．

$j>0$ に対する各冪展開の上端 j_A, j_B, j_C および 下端 j_a,j_b, j_c を求める．方程式 (27) より

$$j_A = j_B + 1 = j, \quad j_a = j_b = 0 \tag{29}$$

方程式 (28) より

$$j_A = j_C + 1 = j, \quad j_a = j_c = 0 \tag{30}$$

なので，まとめると

$$j_A = j, \quad j_B = j_C = j-1, \quad j_a = j_b = j_c = 0 \tag{31}$$

である．これを連立方程式 (22) - (24) に代入し整理すると，最終的に

$$(A_j)_x \xi^j + \sum_{k=0}^{j-1} \{(A_k)_x - qC_k + B_k r\} \xi^k = 0, \tag{32}$$

$$\begin{aligned} &q_t - 2qA_0 - (B_0)_x \\ &\quad = (q_z + 2iB_{j-1} + 2qA_j)\xi^j + \sum_{k=1}^{j-1} \{(B_k)_x + 2iB_{k-1} + 2qA_k\} \xi^k, \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &r_t + 2rA_0 - (C_0)_x \\ &\quad = (r_z - 2iC_{j-1} - 2rA_j)\xi^j + \sum_{k=1}^{j-1} \{(C_k)_x - 2iC_{k-1} - 2rA_k\} \xi^k \end{aligned} \tag{34}$$

となる．よって，ξ の冪毎に，$1 \le k \le j-1$ かつ $0 \le k' \le j-1$ （$j, k, k' \in \mathbf{N}$）と

して，

$$A_j = \alpha_j(t,z), \tag{35}$$
$$B_{j-1} = iq\alpha_j(t,z) + \frac{i}{2}q_z, \tag{36}$$
$$C_{j-1} = ir\alpha_j(t,z) - \frac{i}{2}r_z, \tag{37}$$
$$A_{k'} = \partial_x^{-1}\left(qC_{k'} - B_{k'}r\right), \tag{38}$$
$$B_{k-1} = iqA_k + \frac{i}{2}\left(B_k\right)_x, \tag{39}$$
$$C_{k-1} = irA_k - \frac{i}{2}\left(C_k\right)_x \tag{40}$$

なる連立漸化式[12]と，スカラー場 q および r が満たす連立非線形偏微分方程式：

$$\begin{cases} q_t - 2qA_0 - (B_0)_x = 0, \\ \\ r_t + 2rA_0 - (C_0)_x = 0 \end{cases} \tag{41}$$

をえる．

与えられた $j \in \mathbb{N}$ に対して，帰納的に A_k，B_k，C_k が求まり，そして最終的に，スカラー場 q および r が満たす連立非線形偏微分方程式求まる．それでは，次に $j = 2$ $(2n)$ の場合と $j = 1$ $(2n-1)$ の場合について具体的にみていく．前者が非等スペクトル高次元 KdV 方程式（階層）を，後者が非等スペクトル高次元 NLS 方程式（階層）を与えることが分かる．

2.1　$j = 2$ の場合

$j = 2$ の場合，連立漸化式 (35) - (40) より，

$$A_2 = \alpha_2, \tag{42}$$
$$B_1 = iq\alpha_2 + \frac{i}{2}q_z, \tag{43}$$
$$C_1 = ir\alpha_2 - \frac{i}{2}r_z, \tag{44}$$
$$A_1 = -\frac{i}{2}\partial_x^{-1}\left(qr\right)_z, \tag{45}$$
$$B_0 = \frac{q}{2}\partial_x^{-1}\left(qr\right)_z - \frac{\alpha_2}{2}q_x - \frac{q_{xz}}{4}, \tag{46}$$
$$C_0 = \frac{r}{2}\partial_x^{-1}\left(qr\right)_z + \frac{\alpha_2}{2}r_x - \frac{r_{xz}}{4}, \tag{47}$$
$$A_0 = \alpha_2 rq + \frac{1}{4}\partial_x^{-1}\left(rq_{xz} - qr_{xz}\right), \tag{48}$$

[12]普通の漸化式は，$0 \to j$ のように，下から上にあがっていくが，今回は上から下にさがっていく．

をえ，このとき連立方程式 (41) は

$$\begin{cases} q_t + \dfrac{q_{xxz}}{4} - \dfrac{1}{2}\left\{q\partial_x^{-1}(qr)_z\right\}_x - \dfrac{q}{2}\partial_x^{-1}(rq_{xz} - qr_{xz}) + \alpha_2\left(\dfrac{q_{xx}}{2} - 2rq^2\right) = 0, \\ r_t + \dfrac{r_{xxz}}{4} - \dfrac{1}{2}\left\{r\partial_x^{-1}(qr)_z\right\}_x + \dfrac{r}{2}\partial_x^{-1}(rq_{xz} - qr_{xz}) + \alpha_2\left(2r^2q - \dfrac{r_{xx}}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{49}$$

となる．非等スペクトル条件は

$$\xi_t - \xi^2\xi_z = 0 \tag{50}$$

である．もう少し具体的に方程式を見てみよう．

- $\alpha_2 = 0$ および $r = -1$ とすると，Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [14, 15, 16, 17, 23, 24, 25]：

$$q_t + \frac{1}{4}q_{xxz} + qq_z + \frac{1}{2}q_x\partial_x^{-1}q_z = 0 \tag{51}$$

  および 非等スペクトル Lax 対：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = -i\xi\sigma_3 + q\sigma_+ - \sigma_-, \\ \mathcal{N} = \frac{1}{4}(2i\xi\partial_x^{-1}q_z - q_z)\sigma_3 + \frac{1}{4}(2i\xi q_z - q_{xz} - 2q\partial_x^{-1}q_z)\sigma_+ + \frac{1}{2}(\partial_x^{-1}q_z)\sigma_- \end{cases} \tag{52}$$

  をえる．$z = x$ なる次元逓減により，方程式 (51) は KdV 方程式 (7) となる[13]．

- $\alpha_2 = 0$ および $r = -q$ とすると[14]，modified Calogero-Bogoyavlenskii-Schiff 方程式 [14, 23]：

$$q_t + q^2q_z + \frac{1}{2}q_x\partial_x^{-1}(q^2)_z + \frac{1}{4}q_{xxz} = 0 \tag{53}$$

  および 非等スペクトル Lax 対：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = -i\xi\sigma_3 + q\sigma_+ - q\sigma_-, \\ \mathcal{N} = \frac{1}{2}i\xi\partial_x^{-1}(q^2)_z\sigma_3 + \frac{1}{4}\left\{2i\xi q_z - q_{xz} - 2q\partial_x^{-1}(q^2)_z\right\}\sigma_+ \\ \qquad + \frac{1}{4}\left\{2i\xi q_z + q_{xz} + 2q\partial_x^{-1}(q^2)_z\right\}\sigma_- \end{cases} \tag{54}$$

  をえる．$z = x$ なる次元逓減により，方程式 (53) は modified KdV 方程式となる．

[13] $q = u$, $\xi = \eta$ と書き直すと，$\mathcal{M} = \mathcal{X}$ および $\mathcal{N} = \mathcal{T}$ となる．

[14] $r = -1$ と $r = -q$ を結ぶゲージ変換（Miura 変換）があるはず....

2.2 $j=1$の場合

$j=2$の場合と同様にして，高次元可積分方程式 [26]：

$$\begin{cases} iq_t + q_{xz} - 2q\partial_x^{-1}(qr)_z = 0, \\ ir_t - r_{xz} + 2r\partial_x^{-1}(rq)_z = 0 \end{cases} \tag{55}$$

をえる．これは高次元 Zakharov 方程式と呼ばれる．$r = \pm q^*$ とすれば，高次元 Nonlinear Schrödeinger (NLS) 方程式（高次元 reduced Zakharov 方程式 [14, 15, 16, 17, 27, 28, 29, 30, 31]：

$$q_t - iq_{xz} \pm 2iq\partial_x^{-1}(|q|^2)_z = 0 \tag{56}$$

である．$z=x$ なる次元逓減により，方程式 (55) は Zakharov 方程式と，方程式 (56) は NLS 方程式（reduced Zakharov 方程式）となる．

3 まとめ

本稿では，これまでに断続的に考察されてきた非等スペクトル線形問題の一般的な定式化を与えた．そして，AKNS 階層を例にとり，その有効性を具体的な計算過程と結果を通して紹介した．

本稿では触れていないが既に得られている結果としては，

- 典型的な導出法による（形式的な）保存量の導出 [32, 33, 34]
- Drinfeld-Sokolov 階層の非等スペクトル線形問題

がある．

現在行っている課題としては，

- $j \in -\mathbb{N}$ の場合[15] に対応した非等スペクトル高次元可積分階層の導出
- （AKNS 階層以外の）2 次 および 3 次正方行列で表現される可積分階層の非等スペクトル線形問題
- 非等スペクトル線形問題と関連する，自己双対 Yang-Mills 階層，拘束系，無分散可積分系 や 行列型可積分系の導出

[15] 等スペクトル問題の場合で考えると，sine-Gordon 階層にあたる．

- 非等スペクトル線形問題の 擬微分演算子による 表現

がある.

まだ手つかずであるが,

- 非等スペクトル線形問題に対する 逆散乱法による解析学的解法の実現性の検証
- 非等スペクトル線形問題を考えることで 初めて得られる新しい知見 の発見

が行えればおもしろい.

謝辞

本研究集会で発表する機会を与えて下さいました世話人の矢野 猛先生（北海道大学大学院工学研究科[16]）に御礼を申し上げます.

本稿を書くにあたり有益な情報 や 参考文献を教えて下さった紺野 公明氏（日本大学・理工）および 土田 隆之氏（岡山光量子科学研究所）に感謝します. 普段の有益な議論に対して, 中村 厚氏（北里大学・理）, 小林 匡氏（ROHM LSI）および 高崎 金久氏（京都大学・人環）の各氏に感謝します.

著者は, 2007年2月から3月まで京都大学・基礎物理学研究所に, アトム型研究員（短期滞在プログラム）として, 滞在中に本研究を開始しました. 滞在の機会を与えていただきました佐々木 隆氏（基礎物理学研究所）に深く感謝します.

日本学術振興会 および ブラジル科学アカデミーの招聘により, 著者の一人（KT）はサンパウロ大学サンカルロス校物理学教室に滞在することができました. この滞在中に本稿中の結果の多くをえることができました. 著者は日本学術振興会, ブラジル科学アカデミー, および 滞在中に議論に付き合って下さった L. A. Ferreira 氏（サンパウロ大学）に深く感謝します.

本研究は, **平成19年度富山県高等教育振興財団助成事業**の補助により進められたものであることを附記します.

[16]現在 大阪大学大学院工学研究科

付録 A

Pauli（のスピン）行列：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を選ぶ[17]. このとき，

$$\sigma_+ \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_- \equiv \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定義すると，$\sigma_\pm$ と σ_3 は $sl(2)$ の生成元となっている．各々の交換子積が

$$[\sigma_3,\ \sigma_+] = 2\sigma_+, \qquad [\sigma_+,\ \sigma_-] = \sigma_3, \qquad [\sigma_-,\ \sigma_3] = 2\sigma_- \tag{57}$$

および

$$[\sigma_i, \sigma_i] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (i = 3,\ \pm) \tag{58}$$

を満たすことはすぐに確かめることができる.

付録 B

天下り的に，AKNS 階層を $sl(2)$ としたが，実はそれについてコメントがある.

2 成分波動関数ベクトル $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ に対する行列演算子 $\mathcal{M}$ および $\mathcal{N}$が，2 次正方行列：

$$\begin{cases} \mathcal{M} = \begin{pmatrix} -i\xi & q \\ r & i\xi \end{pmatrix}, \\ \\ \mathcal{N} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{cases} \tag{59}$$

で与えられるとする．ここで $q = q(t,x,z)$，$r = r(t,x,z)$，$A = A(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$，$B = B(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$，$C = C(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$，$D = D(\xi; q, r, q_x, r_x, ...)$ とす

[17] $\sigma_j = i\hat{\sigma}_j$ としたものを，Pauli（のスピン）行列とする場合もある.

る[18]. このとき，$\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の交換子積が

$$[\mathcal{M},\ \mathcal{N}] = \begin{pmatrix} qC - Br & -2i\xi B + qD - Aq \\ 2i\xi C + rA - Dr & rB - Cq \end{pmatrix} \tag{60}$$

なので，非等スペクトル Lax 方程式 (10) から，以下の連立方程式：

$$A_x - qC + Br + i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0, \tag{61}$$

$$D_x + Cq - rB - i\left(\xi_t - \xi^j \xi_z\right) = 0, \tag{62}$$

$$q_t - B_x - \xi^j q_z - 2i\xi B + qD - Aq = 0, \tag{63}$$

$$r_t - C_x - \xi^j r_z + 2i\xi C + rA - Dr = 0 \tag{64}$$

をえる．ここで今は $\underline{A \sim D\text{をスカラー}}$ としているので，連立方程式 (61) と (62) を両辺足すと，

$$\partial_x (A + D) = 0 \iff A + D = \gamma(\xi; t, z) \tag{65}$$

となる．当面は一部の例外を除いて簡単のために，積分により生じる**積分関数** $\gamma(\xi; t, z)$ [19] は零にとる．この場合に $sl(2)$ となっている．もし，$\gamma(\xi; t, z) \neq 0$ とすると，円筒高次元 KdV 方程式 や **より一般的な独立変数が係数に依存した**高次元可積分方程式を導出することができる [21, 22].

参考文献

[1] この定理についての文献はいろいろある．ここでは可積分系について詳しく論述しているものを紹介しておく： 大貫 義郎・吉田 春夫,「力学」(岩波講座現代の物理学 1), 岩波書店 (1994).

[2] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura: *Phys. Rev. Lett.*, **Vol. 19**, 1095 (1967).

[3] P. D. Lax: *Comm. Pure. Appl. Math.*, **Vol. 21**, 467 (1968).

[4] （反）自己双対 Yang-Mills 方程式と可積分系との関係は, その深層に Twistor 幾何学がある:

- R.S. Ward: *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A*, **Vol. 315**, 451 (1985).

- L.J. Mason and N.M. Woodhouse: *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society monographs, new series: 15), Oxford UP (1996).

---

[18] ここでも，q，r，A，B，C および D はスカラーとしている．

[19] これは積分定数にちなんだ勝手な造語である．**被積分関数**のことではない．

- L. Mason and Y. Nutku: *Integrability, Self-Duality, and Twistor Theory* (London Mathematical Society Lecture Note Series 295), Cambridge UP (2003).

- 高崎 金久： ツイスターの世界，共立出版 (2005).

[5] M. Blaszak, 「*Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems*」, Springer-Verlag (1998).

[6] 広田 良吾,「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店 (1992).

[7] 佐藤理論に関する基本的な文献である：

- 佐藤 幹夫（述），野海 正俊（記）: ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学数学講究録 no.18 (1984).

- 梅田 亨（記）: 佐藤幹夫講義録, 数理解析レクチャー・ノート (1989).

- 三輪 哲二, 神保 道夫, 伊達 悦朗： ソリトンの数理, 岩波書店 (2007).

[8] Painlevé 性 および Painlevé 方程式に関する文献はたくさんあるが, 筆者がいつも参考にするもののみ挙げることにする:

- J. Weiss, M. Tabor and G. Carnevale: *J. Math. Phys.*, **Vol. 24**, 522 (1983).

- 岡本 和夫:「パンルヴェ方程式序説」(上智大学数学講究録 N0. 19), 上智大学数学教室 (1985).

- A. Ramani, B. Grammaticos and T. Bountis : *Phys. Rep.*, **Vol. 180**, 159 (1989).

- M. J. Ablowitz and P. A. Clarkson: 「Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering」, 516pages, Cambridge University Press (1991).

- 川原 琢治:「ソリトンからカオスへ」, 朝倉書店 (1993).

- R. Conte（編）: 「*The Painlevé Property One Century Later*」, Springer-Verlag (2000).

- 戸田 晃一: Painlevé 性–可積分判定法という観点から–, 慶應義塾大学 日吉紀要 自然科学, **第 32 巻**, pp.1-37 (2002).

[9] これらの定義についての文献もいろいろある. 代表的なものを挙げておく：

- V. E. Zakharov（編）, 「What Is Integrability?」, Springer-Verlag (1990).

- 和達 三樹,「非線形波動」(岩波講座現代の物理学 14), 岩波書店 (1992).

- 戸田 盛和,「波動と非線型問題の 30 講」(物理学 30 講シリーズ 3), 朝倉書店 (1995).
- 高崎 金久： 可積分系の世界, 共立出版 (2001).
- 戸田 盛和： 非線形波動とソリトン, 日本評論社 (2000).

[10] M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell and H. Segur : *Studies in Appl. Math.*, **Vol. 53**, 249 (1974).

[11] D. J. Korteweg and G. de Vries : *Phil. Mag.*, **Vol. 39**, 4221 (1895).

[12] S. P. Burtsev, V. E. Zakharov and A. V. Mikhairov : *Theor. Math. Phys.* **Vol. 70**, 227 (1987).

[13] F. Calogero : *Lett. Nuovo Cim.*, **Vol. 14**, 443 (1975).

[14] O. I. Bogoyavlenskii : *Russian Math. Surveys*, **Vol. 45**, 1 (1990).

[15] J. Tafel: *J. Math. Phys.* **Vol. 30**, 706 (1989).

[16] J. Tafel: *J. Math. Phys.* **Vol. 31**, 1234 (1990).

[17] J. Schiff : *NATO ASI* Ser. B, **Vol. 278** (Plenum, New-York), 393 (1992).

[18] P. A. Clarkson, P. R. Gordoa and A. Pickering : *Inverse Problems*, **Vol. 13**, 1463 (1997).

[19] P. R. Gordoa and A. Pickering : *Vol. J. Math. Phys.*, **Vol. 40**, 5749 (1999).

[20] P. G. Estévez : *Inverse Problems*, **Vol. 17**, 1043 (2001).

[21] T. Kobayash and K. Toda: *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **Vol. E88-A**, 2548 (2005).

[22] T. Kobayash and K. Toda : *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **Vol. 2**, paper063 (2006).

[23] S-J Yu, K. Toda, N. Sasa and T. Fukuyama : *Vol. J. Phys.* A, **31**, 3337 (1998).

[24] K. Toda, S.-J. Yu and T. Fukuyama : *Vol. Rep. Math. Phys.*, **Vol. 44**, 247 (1999).

[25] T. Ikeda and K. Takasaki : *International Mathematics Research Notices*, **Vol. 7**, 329 (2001).

[26] V. E. Zakharov: in Solirons, edited by R. K. Bullough and P. J. Caudrey (Springer, Berlin, 1980).

[27] I. A. B. Strachan: *J. Math. Phys.*, **Vol. 33**, 2477 (1992).

[28] I. A. B. Strachan: *Inverse Problems*, **Vol. 8**, L21 (1992).

[29] I. A. B. Strachan: *J. Math. Phys.*, **Vol. 34**, 243 (1993).

[30] Z. Jiang and R. K. Bullough: *Phys. Lett. A*, **Vol. 190**, 249 (1994).

[31] S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki: *Annales Henri Poincaré*, **Vol. 3**, 817 (2002).

[32] K. Konno, H. Sanuki and Y. H. Ichikawa: *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 52**, 886 (1974).

[33] M.Wadati, H. Sanuki and K. Konno: *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 53**, 419 (1975).

[34] K. Konno and M.Wadati: *Prog. Theor. Phys.*, **Vol. 53**, 1652 (1975).