

PARTITIONING A STATIONARY SET IN $\mathcal{P}(\lambda)$

名古屋大学大学院情報科学研究科
薄葉 季路 (Toshimichi Usuba)
Graduate School of Information Science
Nagoya University

ABSTRACT. A を空でない集合とする. $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ が $\mathcal{P}(A)$ で **stationary** とは, 任意の $f: [A]^{<\omega} \rightarrow A$ に対してある $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $f''x \subseteq x$ となるものが存在することである. この論文では $\mathcal{P}(A)$, 特に A が uncountable cardinal λ の場合の $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の stationary set の基本的な分割定理を証明する: $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ が stationary で, ある regular uncountable cardinal $\kappa \leq \lambda$ で $\{x \in S: x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary であるとする. このとき, S は κ 個の互いに素な stationary set に分割可能である.

1. 導入

まず, 空でない集合 A に対して, $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set の概念を導入する:

Definition 1.1. A を空でない集合とする. $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ が $\mathcal{P}(A)$ で **stationary** とは, 任意の $f: [A]^{<\omega} \rightarrow A$ に対して, ある $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $f''[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものが存在することである.

この定義は, ある一点を除いて Woodin による stationary tower forcing の stationary と同じものである (stationary tower forcing については Larson [10] を参照): Woodin による stationary では $\{A\}$ は $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set であるが, 我々の定義ではそうではない. $\{A\}$ は自明な意味で stationary であるが, 集合 $\{A\}$ の構造は非常に単純でありこれ以上分割することができない. よってこの論文では集合 $\{A\}$ は stationary とはしない.

また, $\{A\}$ を stationary と見なさないことにより, A が高々可算ならば $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set は存在しないことがわかる. よって, 我々は以後非可算集合上の stationary set, 特に uncountable cardinal 上の stationary set のみ扱うことにする.

先に定義した stationary の概念は, 次の意味で古典的な stationary の概念の一般化になっている:

- Fact 1.2.** (1) regular uncountable cardinal κ と $S \subseteq \kappa$ に対して, S が (古典的な意味で) κ で stationary $\iff S$ が (我々の意味で) $\mathcal{P}(\kappa)$ で stationary.
(2) regular uncountable cardinal κ , ordinal $\gamma \geq \kappa$ に対して, $\mathcal{P}_{\kappa}\gamma = \{x \subseteq \gamma: |x| < \kappa\}$ とする. このとき $S \subseteq \mathcal{P}_{\kappa}\gamma$ に対して, S が (Jech [8] の意味で) $\mathcal{P}_{\kappa}\gamma$ で stationary $\iff \{x \in S: x \cap \kappa \in \kappa\}$ が $\mathcal{P}(\gamma)$ で stationary.

さて, 次は古典的な stationary set に対してよく知られている定理である.

Fact 1.3. κ を regular uncountable cardinal, $\gamma \geq \kappa$ とする.

- (1) (Solovay [12]) κ 上の任意の stationary set は, κ 個の互いに素な stationary set に分割可能である.

(2) (Gitik [7]) $\mathcal{P}_{\kappa\gamma}$ 上の任意の stationary set は, κ 個の stationary set に分割可能である.

これより, 次のような自然な疑問が生じる: $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set S に対して, S は何個の stationary set に分割可能であるか?

Burke はこの疑問に対して次のような部分的な回答を得た:

Fact 1.4 (Burke [2]). A を uncountable set とする. このとき $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set は二つの互いに素な stationary set に分割可能である. よって特に可算個に分割可能である.

この論文では, 我々は非可算基数 λ に対する $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の stationary set の分割に関して, 基本となる次の定理を証明する.

Definition 1.5. $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set S と cardinal μ に対して, $\text{Part}(S, \mu)$ を次のような主張とする: S は μ 個の互いに素な stationary set に分割可能である.

Theorem 1.6. λ を uncountable cardinal とし, S を $\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set とする. $\kappa \leq \lambda$ を regular uncountable cardinal とし, $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary であるとする. このとき, $\text{Part}(S, \kappa)$ が成立する.

$\mathcal{P}(\lambda)$ 上の stationary set S に対して, regular uncountable cardinal $\kappa \leq \lambda$ で $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary となるものは常に存在することに注意.

2. 定義, 用語

一般的な定義, 用語は Kanamori [9] に従う. また, generic ultrapower と $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set の基本性質については Larson [10] を参照せよ.

この論文を通して, λ は常に uncountable cardinal, κ は regular uncountable cardinal を表すものとする. また, $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set を扱うときは常に A は非可算集合であると仮定する. また, stationary set $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して, $\mathcal{P}(A)$ が文脈から明らかなきは " $\mathcal{P}(A)$ で" 等の言葉を省略し単に " S は stationary" と書く.

Reg を regular cardinal 全体からなる class とする.

非可算集合 A と $C \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して, C が $\mathcal{P}(A)$ の club とはある function $f : [A]^{<\omega} \rightarrow A$ で $C = \{x \subseteq A : f"[x]^{<\omega} \subseteq x\}$ となることである. この club は strong club と呼ばれることもある.

次は H_θ の elementary submodel に関する基本的事実である.

Fact 2.1. θ を regular uncountable cardinal, $M \prec \langle H_\theta, \in \rangle$ とする.

- (1) ordinal $\alpha \in M$ で $M \cap \alpha \in \alpha$ となるならば, α は regular uncountable cardinal であり, $\forall x \in M (|x| < \alpha \Rightarrow x \subseteq M)$ が成立する.
- (2) 順序数 $\beta \in M$ に対し, $\text{ot}(M \cap \beta^+) \leq \text{ot}(M \cap \beta)^+$.
- (3) 非可算集合 $A \in M$ と $\mathcal{P}(A)$ の club $C \in M$ に対し, $M \cap A \neq A$ ならば $M \cap A \in C$ である.

ある固定された well-order が入っている可算言語の構造 $M = \langle B, \in, \dots \rangle$ と $x \subseteq B$ に対して, $SK^M(x)$ を x の M による Skolem Hull とする.

この論文では, ideal は常に無限集合上の non-principal proper ideal とする. A 上の ideal I に対して, I^* を I の dual filter, $I^+ = \mathcal{P}(A) \setminus I$ とする. I^+ の元は I -positive set と呼

ばれる。 $X \in I^+$ に対し、 $I|X$ を集合 $\{Y \in I : Y \cap X \in I\}$ とする。 $I|X$ は $I \cup \{A \setminus X\}$ によって生成される ideal となる。

ideal I に対して、 $\mathbb{P}_I = \langle I^+, \subseteq_I \rangle$ を標準的な generic ultrapower poset とする。ここで \subseteq_I は $X \subseteq_I Y \iff X \setminus Y \in I$ で定義されている。

3. STATIONARY SET の基本性質

この節では stationary set に関する基本的な性質を調べる。この節で扱うほとんどの性質は簡単であるか通常の stationary set に関する類推から得られるものであるので、証明は頻繁に省略する。

Lemma 3.1. S を $\mathcal{P}(A)$ の stationary set とする。このとき $\bigcup S = A$ 。

Lemma 3.2. 集合 A と $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対し、次は同値である：

- (1) S は $\mathcal{P}(A)$ で stationary.
- (2) 任意の function $f : [A]^{<\omega} \rightarrow [A]^{<\omega}$ に対して $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $\bigcup f''[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものが存在する。
- (3) θ を regular cardinal で $A \in H_\theta$ なる物とし、 $R \subseteq H_\theta$ とすると、 $M \prec \langle H_\theta, \in, R \rangle$ で $M \cap A \neq A$ かつ $M \cap A \in S$ となるものが存在する。

Lemma 3.3. S_0, S_1 を $\mathcal{P}(A)$ 上の non-stationary set とする。このとき $S_0 \cup S_1$ も non-stationary である。

Lemma 3.4. $A \subseteq B$ を集合とする。

- (1) 任意の $\mathcal{P}(A)$ の stationary set S に対して、 $\{y \subseteq B : y \cap A \in S\}$ は $\mathcal{P}(B)$ で stationary である。
- (2) $\mathcal{P}(B)$ の stationary set T に対して、もし $\forall y \in T (y \cap A \neq A)$ となるならば $\{y \cap A : y \in T\}$ は $\mathcal{P}(A)$ で stationary である。

Lemma 3.5 (Fodor's lemma). $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ を stationary set とする。この時任意の function $f : S \rightarrow A$ で $\forall x \in S (f(x) \in x)$ なるものに対して、 $a \in A$ で $\{x \in S : f(x) = a\}$ が stationary となるものが存在する。

Lemma 3.6. λ を singular cardinal とする。この時、集合 $\lambda = \{\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ は non-stationary である。

Proof. そうでないとする。 θ を大きな uncountable cardinal とする。 Lemma 3.2 より、 $M \prec \langle H_\theta, \in \rangle$ で $\lambda \in M$ かつ $M \cap \lambda < \lambda$ となるものが存在する。このとき Fact 2.1 より λ は regular でなくてはならないが、これは矛盾である。 \square

Lemma 3.7. $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ を stationary set とする。このとき regular uncountable cardinal $\kappa \leq \lambda$ で $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary となるものが存在する。

Proof. 大きい regular cardinal θ を固定する。 Lemma 3.2 より、 $S' = \{x \in S : \exists M_x \prec \langle H_\theta, \in, \lambda \rangle (M_x \cap \lambda = x)\}$ は stationary である。各 $x \in S'$ に対して、 $\kappa_x \in M_x$ で $M_x \cap \kappa_x \in \kappa_x$ となるものを選ぶ。このとき $\kappa_x \leq \lambda$ かつ、 Fact 2.1 より、 κ_x は regular uncountable cardinal である。

もし $\{x \in S' : \kappa_x = \lambda\}$ が stationary ならば、 λ が求める regular cardinal である。もし $S'' = \{x \in S' : \kappa_x < \lambda\}$ が stationary ならば、 Fodor's lemma より $\kappa < \lambda$ で

$\{x \in S'' : \kappa_x = \kappa\}$ が stationary となるものが取れる。このときこの κ が求めるものである。 \square

Lemma 3.8. $\mathcal{P}(\lambda)$ の任意の stationary set S に対して, $|S| \geq \lambda$ である。また, S が $\{x \subseteq \lambda : \sup(x) = \lambda\}$ の stationary subset ならば $|S| \geq \lambda^+$ である。

Proof. ある cardinal $\mu < \lambda$ で $|S| = \mu < \lambda$ となっているとする。必要なら S を削ることで, 任意の stationary set $T \subseteq S$ に対して $|T| = \mu$ となっているとしてよい。

もし $S_0 := \{x \in S : |x| \leq \mu\}$ が stationary ならば, $|\cup S_0| \leq \mu < \lambda$. よって $\cup S_0 \neq \lambda$ となり, 矛盾が生じる。

もし S_0 が non-stationary ならば, $S_1 := \{x \in S : |x| > \mu\}$ が stationary となる。 $|S_1| = \mu$ かつ各 $x \in S_1$ に対して $|x| > \mu$ となるので, 次のようにして injection $f : S_1 \rightarrow \lambda$ で $\forall x \in S_1 (f(x) \in x)$ となるものが構成できるが, これは Fodor's lemma に反する: $\langle x_\xi : \xi < \mu \rangle$ を S_1 の enumeration とする。 f を $\xi < \mu$ に関する induction で定義する。 $f \upharpoonright \{x_\eta : \eta < \xi\}$ が定義されたとする。 $\xi < \mu < |x_\xi|$ であるので, $f \upharpoonright \{x_\eta : \eta < \xi\} \neq x_\xi$. よって $\alpha \in x_\xi \setminus f \upharpoonright \{x_\eta : \eta < \xi\}$ が選べ, $f(x_\xi) = \alpha$ とすればよい。

次に, $S \subseteq \{x \subseteq \lambda : \sup(x) = \lambda\}$ と仮定する。もし $|S| = \lambda$ ならば, bijection $\pi : S \rightarrow \lambda$ を取り $g : S \rightarrow \lambda$ を $g(x) = \min(x \setminus \pi(x))$ と定義する。 Fodor's lemma を再び使うことにより, $\alpha < \lambda$ で $\{x \in S : g(x) = \alpha\}$ が stationary となる。このとき $\{x \in S : g(x) = \alpha\} \subseteq \{x \in S : \pi(x) \leq \alpha\}$, よって $|\{x \in S : g(x) = \alpha\}| \leq |\alpha| < \lambda$. これは矛盾である。 \square

ここで, $\mathcal{P}(A)$ 上の normal ideal の概念を導入する。

Definition 3.9. $I \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ が normal ideal over $\mathcal{P}(A)$ とは次を満たすこととする:

- (1) I は proper ideal over $\mathcal{P}(A)$.
- (2) 任意の $x \subseteq A$ に対して $\{x\} \in I$.
- (3) 任意の $a \in A$ に対して $\{x \subseteq A : a \notin x\} \in I$.
- (4) I は diagonal union に関して閉じている: 任意の $\langle X_a : a \in A \rangle \in {}^A I$ に対して, $\nabla_{a \in A} X_a = \{x \subseteq A : \exists a \in x (x \in X_a)\} \in I$.

(4) は次の (4)' と同値であることはすぐにわかる:

- (4)' 任意の $X \in I^+$ と任意の関数 $f : X \rightarrow A$ で $\forall x \in X (f(x) \in x)$ を満たすものに対して, $a \in A$ で $\{x \in X : f(x) = a\} \in I^+$ となるものが取れる。

Definition 3.10. $\text{NS}_{\mathcal{P}(A)}$ を $\mathcal{P}(A)$ 上の non-stationary set 全体とする。

Lemma 3.11. (1) $\text{NS}_{\mathcal{P}(A)}$ は $\mathcal{P}(A)$ 上の最小の normal ideal である。

(2) $\mathcal{P}(A)$ 上の任意の normal ideal は σ -complete である。

Lemma 3.12. $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ を stationary とする。このとき, 任意の可算個 of function $f_n : [A]^{<\omega} \rightarrow A$ ($n < \omega$) に対して, $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $\forall n \in \omega (f_n \upharpoonright [x]^{<\omega} \subseteq x)$ となるものが存在する。

ここで generic ultrapower に関する標準的な性質について議論する。 I を $\mathcal{P}(A)$ 上の normal ideal とする。 G を (V, \mathbb{P}_I) -generic filter とする。このとき, G は V -normal ultrafilter である:

- (1) 任意の $X \in (\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))^V$ に対して, $X \in G$ か $(\mathcal{P}(A))^V \setminus X \in G$ のどちらか一方が成立する。

(2) 任意の $X \in G$ と任意の $\mathcal{P}(A)$ 上の function $f \in V$ で $\forall x \in X (f(x) \in x)$ なるものに対して, ある $a \in A$ で $\{x \in X : f(x) = a\} \in G$ となる.

(1) より, G を用いた V の ultrapower が $V[G]$ で構成可能である. $\text{Ult}(V, G) = \langle V^*, \in^* \rangle$ を V の G による generic ultrapower とする. このとき, generic elementary embedding $j: V \rightarrow V^*$ が $j(x) = [c_x]_G$ と定義できる. ここで c_x は定数 x を取る $\mathcal{P}(A)$ 上の constant function であり, $[f]_G$ は f の equivalence class (modulo G) である. このとき, 任意の formula φ に対して $\langle V^*, \in^* \rangle \models \varphi([f_0]_G, \dots, [f_n]_G) \iff \{x \subseteq A : \varphi(f_0(x), \dots, f_n(x))\} \in G$ holds. が成立する.

$x \in V^*$ に対して, $\text{ext}(x) = \{a \in V^* : V^* \models a \in^* x\}$ とする. 次は G の V -normality より得られる:

Lemma 3.13. id を $\mathcal{P}(A)$ 上の *identity map* とする. このとき $\text{ext}([\text{id}]_G) = \{[c_a]_G : a \in A\} = j''A$.

I が **precipitous** とは任意の (V, \mathbb{P}_I) -generic filter G に対して, $\text{Ult}(V, G)$ が well-founded となることである. もし $\text{Ult}(V, G)$ が well-founded であるときは $\text{Ult}(V, G)$ とその transitive collapse $\langle M, \in \rangle$ を同一視することにする. このとき $[\text{id}]_G = j''A$ が成立することに注意.

Foreman [6] による次の **disjointing property** は normal precipitous ideal の解析に有用である:

Definition 3.14. I を ideal over $\mathcal{P}(A)$ とする. I が **disjointing property** をもつとは, 任意の \mathbb{P}_I の antichain \mathcal{A} に対して, $\{C_A : A \in \mathcal{A}\} \subseteq I^*$ で $\{A \cap C_A : A \in \mathcal{A}\}$ が互いに素となるものが存在することである.

次の lemma の証明は [6] を参照せよ.

Lemma 3.15. I を normal ideal over $\mathcal{P}(A)$ とする.

- (1) I が disjointing property をもつならば, I は precipitous かつ任意の (V, \mathbb{P}_I) -generic G に対して $\text{Ult}(V, G)$ は $V[G]$ の中で長さ $|A|^V$ の列に関して閉じている.
- (2) もし I が $|A|^+$ -saturated ならば, I は disjointing property をもつ.
- (3) cardinal $\mu \leq |A|$ に対して, I が μ -saturated \iff 互いに素な μ 個の I -positive set は存在しない.

ここで, 簡便のために次の定義を導入する.

Definition 3.16. I を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ とする. regular uncountable cardinal $\kappa \leq \lambda$ が I の **critical point** とは $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^+$ となることである. $\text{crit}(I)$ を I の critical point 全体とする.

$\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set S に対し, κ が S の **critical point** であるとは κ が $\text{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|S$ の critical point であることである. $\text{crit}(S) = \text{crit}(\text{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|S)$ とおく.

$\text{crit}(I)$ は常に空でないことに注意.

Lemma 3.17. normal precipitous ideal I over $\mathcal{P}(\lambda)$ に対し, $\kappa \in \text{crit}(I)$ とし G を (V, \mathbb{P}_I) -generic で $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in G$ なるものとする. j を G により生成される generic elementary embedding とする. このとき j の **critical point** は κ である. すなわち, 各 $\alpha < \kappa$ に対しては $j(\alpha) = \alpha$ だが $j(\kappa) > \kappa$ となる.

Lemma 3.18. I を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ とし, $\kappa \in \text{crit}(I)$ とする. このとき $I \setminus \{x : x \cap \kappa \in \kappa\}$ は κ -complete である.

Proof. $J = I \setminus \{x : x \cap \kappa \in \kappa\}$ とする. $\gamma < \kappa$ と $\langle X_\xi : \xi < \gamma \rangle \in {}^\gamma J$ を任意に取る. $X = \bigcup_{\xi < \gamma} X_\xi$ とし, $X \in J^+$ と仮定してみる. $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in J^*$ であるので, $Y := \{x \in X : \gamma \subseteq x\} \in I^+$ が成立する. ここで $f : Y \rightarrow \gamma$ を $f(x)$ が $x \in X_\xi$ となる最小の $\xi < \gamma$ となるよう定義する. f は regressive, よってある $\xi^* < \gamma$ で $\{x \in Y : f(x) = \xi^*\} \in I^+$ となる. このとき $\{x \in Y : f(x) = \xi^*\} \subseteq X_{\xi^*}$, よって $X_{\xi^*} \in I^+$. これは矛盾である. \square

Lemma 3.19. $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ を stationary set とし, $\kappa \in \text{crit}(S)$ とする. このとき任意の $f : [\lambda]^{<\omega} \rightarrow \mathcal{P}_\kappa \lambda$ に対して $x \in S$ で $x \cap \kappa \in \kappa$ かつ $\bigcup f''[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものが存在する.

Proof. 大きい regular cardinal θ を固定する. $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary なので, $M \prec \langle H_\theta, \in \rangle$ で $\lambda, \kappa, f \in M$, $M \cap \lambda \in S$, $M \cap \lambda \neq \lambda$ かつ $M \cap \kappa \in \kappa$ となるものが取れる. ここで $s \in [M \cap \lambda]^{<\omega}$ を取る. このとき $f(s) \in M$ であり, かつ $|f(s)| < \kappa$, $M \cap \kappa \in \kappa$ なので, $f(s) \subseteq M \cap \lambda$ が成立する. よって $\bigcup f''[M \cap \lambda]^{<\omega} \subseteq M \cap \lambda$ となる. \square

Lemma 3.20. λ を regular cardinal, I を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ とする. ある $\kappa \leq \lambda$ で $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ となっており, かつ I が κ -saturated であるとする. このとき,

- (1) $\{x \subseteq \lambda : x \text{ は } \text{sup}(x) \text{ の } \sigma\text{-club}\} \in I^*$.
- (2) (通常の意味での) stationary set $E \subseteq \{\alpha < \lambda : \text{cf}(\alpha) = \omega\}$ に対して, $\{x \subseteq \lambda : E \cap \text{sup}(x) \text{ は } \text{sup}(x) \text{ で stationary}\} \in I^*$.

Proof. 任意の (V, \mathbb{P}_I) -generic G を取り, $V[G]$ で議論する. I は κ -saturated かつ $\lambda \geq \kappa$ なので, I は precipitous である. $j : V \rightarrow M$ を G より生成される generic elementary embedding とする.

I の κ -saturation より, M は $V[G]$ で λ -列に関して閉じている. また, $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in G$ なので j の critical point は κ である. 次が成立するが, これは上の M の閉包性及び κ が j の critical point であることよりすぐに帰結できる.

- (a) 任意の ordinal α に対し, もし $(\text{cf}(\alpha))^{V[G]} = \omega$ ならば $(\text{cf}(\alpha))^M = (\text{cf}(\alpha))^V = \omega$.
- (b) 任意の ordinal α で $(\text{cf}(\alpha))^V = \omega$ となるものに対し, $j(\alpha) = \text{sup}(j''\alpha)$ である.

(1). $j''\lambda$ が σ -closed であることを示せば十分である. これを示すために, $a \subseteq j''\lambda$ で $\text{ot}(a) = \omega$ となるものを取る. $b = j^{-1}''a$ とおく. 明らかに $\text{ot}(b) = \omega$ である. $\alpha = \text{sup}(a)$ かつ $\beta = \text{sup}(b)$ とする. このとき $V[G]$ で $\text{cf}(\beta) = \omega$ となるので, V でもそうになっている. 特に $\beta < \lambda$ である. $j(\beta) = \text{sup}(j''\beta) = \text{sup}(j''b) = \text{sup}(a) = \alpha$, よって $\text{sup}(a) \in j''\lambda$ となる.

(2). stationary set $E \subseteq \{\alpha < \lambda : \text{cf}(\alpha) = \omega\}$ を取る. $j(E) \cap \text{sup}(j''\lambda)$ が stationary in $\text{sup}(j''\lambda)$ であることを示せばよい. \mathbb{P}_I は κ -c.c. を満たすので, E は $V[G]$ でも λ の stationary set のままである. $j(E) \cap \text{sup}(j''\lambda)$ が stationary であることを示すため, $\text{sup}(j''\lambda)$ の σ -club C を任意に取る. $j''\lambda$ は σ -club なので, $C \subseteq j''\lambda$ と仮定してよい. $D = j^{-1}''C$ とおく. D は λ で unbounded である. E が stationary なので, $\alpha \in E$ で $\alpha \in \lim(D)$ となるものが取れる. よって $j(\alpha) \in j(E)$. さらに, $\alpha \in \lim(D)$ かつ C は σ -club なので, $\text{sup}(j''\alpha) \in C$ かつ $\text{sup}(j''\alpha) = j(\alpha) \in C$ が成立する. よって $j(\alpha) \in j(E) \cap C$ である. \square

最後に, projection ideal の概念を導入する.

Definition 3.21. I を normal ideal over $\mathcal{P}(A)$ とする. uncountable subset $B \subseteq A$ で $\{x \subseteq A : x \cap B \neq B\} \in I^*$ となっているものに対して, projection ideal of I onto B を次を満たす $Y \subseteq \mathcal{P}(B)$ 全体とする: $\{x \subseteq A : x \cap B \in Y\} \in I$. $p_B(I)$ を projection of I onto B と表すものとする. $p_B(I)$ が normal ideal over $\mathcal{P}(B)$ となること, 及び I が μ -saturated ならば $p_B(I)$ も μ -saturated であることはすぐにわかる.

4. 証明

これより Theorem 1.6 の証明に入る. 証明は大きく二つの部分に分かれる. まず, $\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set S が理論上最小の濃度をもっているならば $\text{Part}(S, \kappa)$ が成立することを示す. 次に $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の normal ideal で強い saturation をもつものがあれば, そのときその ideal の measure one set で理論上最小の濃度をもつものが存在することを示す. この二つをあわせて, 定理を証明する.

Proposition 4.1. $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ を stationary set とする. $\kappa \in \text{crit}(S)$ に対し, 次のどちらかが成立しているとする:

- (1) $|S| = \lambda$, または
- (2) λ は $\text{cf}(\lambda) < \kappa$ なる singular cardinal で $\forall \gamma < \lambda (|\{x \cap \gamma : x \in S, \gamma \in x\}| \leq \lambda)$ となっている.

このとき $\text{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が成立する.

Proof. 必要ならば S を削ることにより任意の $x \in S$ に対して $x \cap \kappa \in \kappa$ となっているとしてよい.

まず (1) を仮定する. bijection $\pi : S \rightarrow \lambda$ を一つ固定する. 各 $x \in S$ に対し, $S_x = \{y \cap x : y \in S, \pi(y) \in x, y \cap \kappa < x \cap \kappa\} (\subseteq \mathcal{P}(x))$ とおく. $T_1 = \{x \in S : S_x \text{ が } \mathcal{P}(x) \text{ で non-stationary}\}$ とする. まず T_1 が stationary であることを示す.

Claim 4.2. T_1 は stationary.

Proof of Claim. 任意に $f : [\lambda]^{<\omega} \rightarrow \lambda$ を取る. $x \in T_1$ で $f''[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものを探したい. まず, 可算個の function $\langle f_n : n < \omega \rangle$ を $n < \omega$ に関する induction で定義する.

- (1) $f_0 = f$.
- (2) $f_1 : \lambda \rightarrow [\lambda]^{<\omega}$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対し,
 - (a) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が f_0 に関して閉じていないならば, $f_1(\alpha)$ は $[\pi^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ の元 s で $f_0(s) \notin \pi^{-1}(\alpha)$ となっているものとする.
 - (b) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が f_0 に関して閉じているならば, $f_1(\alpha) = 0$ とする.
- (3) $f_2 : \lambda \rightarrow \lambda$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対して,
 - (a) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が f_1 に関して閉じていないならば, $f_2(\alpha)$ は $\pi^{-1}(\alpha)$ の元 β で $f_1(\beta) \notin \pi^{-1}(\alpha)$ となっているものとする.
 - (b) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が f_1 に関して閉じているならば, $f_2(\alpha) = 0$ とする.
- (4) $n > 1$ に対して, f_n が $\text{dom}(f_n) = \lambda$ となっているように定義されているとする. このとき $f_{n+1} : \lambda \rightarrow \lambda$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対し,
 - (a) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が f_n に関して閉じていないならば, $f_{n+1}(\alpha)$ は $\pi^{-1}(\alpha)$ の元 β で $f_n(\beta) \notin \pi^{-1}(\alpha)$ となっているものとする.
 - (b) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が f_n に関して閉じているならば, $f_{n+1}(\alpha) = 0$ とする.

Lemma 3.12 より, $x \in S$ で x が全ての f_n に関して閉じているものが存在する. $x^* \in S$ で, $x^* \cap \kappa$ がそのようなものの中で最小であるものを取る. このとき, 任意の $y \in S$ に関して, もし $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$ ならばある $n < \omega$ で y は f_n に関して閉じていない. この $x^* \in S$ に対して, S_{x^*} が $\mathcal{P}(x^*)$ で non-stationary となっていることを示す. これより $x^* \in T_1$ かつ $f''[x^*]^{<\omega} \subseteq x^*$ となる. $y \in S$ で $\pi(y) \in x^*$ かつ $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$ となるものを取る. $n < \omega$ で $y \cap x^*$ が f_n に関して閉じていないものがあることを示せば十分である. x^* の取り方より, $n < \omega$ で y が f_n で閉じていないものがある. まず, y が f_0 に関して閉じていないとする. $s = f_1(\pi(y))$ とおく. f_1 の定義より, $s \in [y]^{<\omega}$ だが $f_0(s) \notin y$ である. $\pi(y) \in x^*$ かつ x^* は f_1 で閉じているので, $s \in [x^*]^{<\omega}$ となる. よって $s \in [y \cap x^*]^{<\omega}$ だが $f_0(s) \notin [y \cap x^*]^{<\omega}$ となる. 同様の議論で, 各 $n < \omega$ に対して, もし y が f_n に関して閉じていないならば $y \cap x^*$ はやはり f_n に関して閉じていないことがいえる. \square [Claim]

T_1 が stationary であることを示した. ここで $x \in T_1$ に対して, $g_x : [x]^{<\omega} \rightarrow x$ を x が T_1 の元であることを証左する function であるとする. ここで次を示すが, それにより $\text{Part}(T_1, \kappa)$ が容易に帰結できる. よって特に $\text{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が成立する.

Claim 4.3. ある $s \in [\lambda]^{<\omega}$ で $|\{\alpha < \lambda : \{x \in T_1 : g_x(s) = \alpha\} \text{ は } \mathcal{P}(\lambda) \text{ で stationary}\}| \geq \kappa$.

Proof of Claim. そうでないとする. 各 $s \in [\lambda]^{<\omega}$ に対して, $z_s = \{\alpha < \lambda : \{x \in T_1 : g_x(s) = \alpha\} \text{ は stationary}\}$ とおく. 仮定より $|z_s| < \kappa$ である. 各 $\alpha \in \lambda \setminus z_s$ に対して, club $C_{s,\alpha}$ で $\{x \in T_1 : g_x(s) = \alpha\}$ と素になっているものを取る.

T_1 は stationary で $\forall x \in T_1 (x \cap \kappa \in \kappa)$ なので, Lemma 3.19 より $T'_1 = \{x \in T : \forall s \in [x]^{<\omega} \forall \alpha \in x \setminus z_s (z_s \subseteq x \wedge x \in C_{s,\alpha})\}$ が stationary となる. よって $x, y \in T'_1$ で $y \cap \kappa < x \cap \kappa$ かつ $\pi(y) \in x$ となるものが取れる. 定義より $y \cap x \in S_x$ である. このときある $s \in [y \cap x]^{<\omega}$ で $\alpha := g_x(s) \notin y \cap x$ となっている. $z_s \subseteq x$ なので $\alpha \notin z_s$ となる. しかし $x \in C_{s,\alpha}$ なので, これは $C_{s,\alpha}$ の取り方に矛盾する. \square [Claim]

仮定 (2) の下での証明は (1) の場合とほぼ同様に行われる. まず ordinal の上昇列 $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\lambda) \rangle$ で λ に収束するものを取る. 各 $x \in S$ に対して $x \cap \kappa \in \kappa$ なので, $\text{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|S$ は κ -complete. よって, 全ての $x \in S$ に対して $\{\lambda_i : i < \text{cf}(\lambda)\} \subseteq x$ となっているとしてよい. $\bar{S} = \{x \cap \lambda_i : x \in S, i < \text{cf}(\lambda)\}$ とおく. 仮定より $|\bar{S}| = \lambda$ である. bijection $\bar{\pi} : \bar{S} \rightarrow \lambda$ を固定する. 各 $x \in S$ に対し, $S_x = \{y \cap x : y \in S, y \cap \kappa < x \cap \kappa, \forall i < \text{cf}(\lambda) (\bar{\pi}(y \cap \lambda_i) \in x)\}$ とする. (1) のように, $T_2 = \{x \in S : S_x \text{ is non-stationary in } \mathcal{P}(x)\}$ が stationary であることを示す.

Claim 4.4. T_2 は stationary.

Proof of Claim. $g : [\lambda]^{<\omega} \rightarrow \lambda$ を任意に取る. $x \in T_2$ で g に関して閉じているものを探す. (1) のように, inductive に関数 $\langle g_n : n < \omega \rangle$ を定める.

まず $g_0 = g$ とする. $g_1 : \lambda \rightarrow [\lambda]^{<\omega}$ を次の用に定める: $\alpha < \lambda$ に対し, もし $s \in [\bar{\pi}^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ で $g_0(s) < \sup(\bar{\pi}^{-1}(\alpha))$ だが $g_0(s) \notin \bar{\pi}^{-1}(\alpha)$ となるものがあれば, $g_1(\alpha)$ をそのような s とする. もしそのような $s \in [\bar{\pi}^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ がないならば, $g_1(\alpha) := 0$ とする. $n > 1$ とし, g_n with the domain λ が定義されているとする. $g_{n+1} : \lambda \rightarrow \lambda$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対し, もし $s \in [\bar{\pi}^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ で $g_n(s) < \sup(\bar{\pi}^{-1}(\alpha))$ だが $g_n(s) \notin \bar{\pi}^{-1}(\alpha)$ となるものがあれば, $g_{n+1}(\alpha)$ をそのような s に, そのような s がないならば $g_{n+1}(\alpha) = 0$ とする.

(1)と同様, $x^* \in S$ で x^* は全ての g_n に関して閉じており, また $y \in S$ で $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$ かつ y が全ての g_n について閉じているものが存在しないようにとる. このとき S_{x^*} が $\mathcal{P}(x^*)$ で non-stationary であることを見る. $y \in S$ で $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa, \forall i < \text{cf}(\lambda) (\pi(y \cap \lambda_i) \in x^*)$ となるものをとる. まず y が g_0 に関して閉じていないと仮定してみる. $s \in [y]^{<\omega}$ で $g_0(s) \notin y$ となるものが取れる. $\{\lambda_i : i < \text{cf}(\lambda)\}$ が λ で unbounded であり $\{\lambda_i : i < \text{cf}(\lambda)\} \subseteq y$ なので, $\{\sup(y \cap \lambda_i) : i < \text{cf}(\lambda)\}$ はやはり unbounded である. $i < \text{cf}(\lambda)$ で $g_0(s) < \sup(y \cap \lambda_i)$ となるものを固定する. このとき, $s \in [y \cap \lambda_i]^{<\omega}, g_0(s) < \sup(y \cap \lambda_i)$ だが $g_0(s) \notin y \cap \lambda_i$ となっている. よって, $t = f_1(\pi^{-1}(y \cap \lambda_i)) \in [y \cap \lambda_i]^{<\omega}$ としたとき, $g_0(t) < \sup(\pi(y \cap \lambda_i))$ かつ $g_0(t) \notin \pi(y \cap \lambda_i)$ となっている. x^* は g_1 に関して閉じているので, $t \in [x^*]^{<\omega}$ となる. ゆえに $t \in [y \cap x^*]^{<\omega}$ だが $g_0(t) \notin [y \cap x^*]^{<\omega}$ となる. 同様の議論で, 各 $n < \omega$ に対して, もし y が g_n について閉じていないならば $y \cap x^*$ は g_n は閉じていないことが帰結できる. \square [Claim]

残りは (1) と同じ議論により, $\text{Part}(T_2, \kappa)$ が帰結できる. \square

次に, もし $\mathcal{P}(\lambda)$ が強い saturation をもつ normal ideal をもつとき, 小さな measure one set が存在することを示す.

Proposition 4.5. λ を regular uncountable cardinal とし, $\kappa \leq \lambda$ を regular uncountable cardinal とする. I を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ とする. もし I が κ -saturated かつ $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ となっているならば, ある $X \in I^*$ で $\forall x, y \in X (\sup(x) = \sup(y) \Rightarrow x = y)$ となっているものが存在する. 特に, $|X| = \lambda$ かつ $\{x : \sup(x) < \lambda\} \in I^*$ となっている.

Proof. $\{\alpha < \lambda : \text{cf}(\alpha) = \omega\}$ の互いに素な stationary subset $(E_\xi : \xi < \lambda)$ を固定する. Lemma 3.20 より, 次が成立する:

(1) $X := \{x \subseteq \lambda : x \text{ は } \sup(x) \text{ の } \sigma\text{-club}\} \in I^*$.

(2) $Y_\xi := \{x \subseteq \lambda : E_\xi \cap \sup(x) \text{ は } \sup(x) \text{ で stationary}\} \in I^* (\xi < \lambda)$.

$f : \lambda \rightarrow \lambda$ を $f(\alpha) = \xi \iff \alpha \in E_\xi$ と定義する. もし $\alpha \notin \bigcup_{\xi < \lambda} E_\xi$ ならば, $f(\alpha) = 0$ としておく. ここで $Z = \{x \subseteq \lambda : x \in X, \forall \xi \in x (x \in Y_\xi), x \text{ は } f \text{ に関して閉じている}\}$ とする. I の normality より, $Z \in I^*$ である.

Claim 4.6. 各 $x \in Z$ と $\xi < \lambda$ に対して, $\xi \in x \iff E_\xi \cap \sup(x)$ が $\sup(x)$ で stationary.

Proof of Claim. $x \in Z$ と $\xi < \lambda$ をとる. Z の定義より, $\xi \in x$ ならば $E_\xi \cap \sup(x)$ は $\sup(x)$ で stationary である. 逆に, $E_\xi \cap \sup(x)$ が stationary としてみる. x は σ -club なので, x と E_ξ は交わりを持つ. $\alpha \in x \cap E_\xi$ をとると, $\xi = f(\alpha) \in x$ である. \square [Claim]

次に $\forall x, y \in Z (\sup(x) = \sup(y) \Rightarrow x = y)$ をチェックする. これより題意が成立することがわかる. $\xi \in x$ に対し, $E_\xi \cap \sup(x)$ が stationary とする. $\sup(x) = \sup(y)$ なので, $E_\xi \cap \sup(y)$ も stationary である. claim より, $\xi \in y$ が得られる. 逆も同様である. \square

次に, λ が singular の場合を扱う. このケースは regular の場合に比べて証明が複雑になっている.

Lemma 4.7. λ に対し, $\mathcal{P}(\lambda)$ の club C で次を満たすものが存在する:

(1) 各 $x \in C$ に対して, $\sup(x \cap \text{cf}(\lambda)) = \text{cf}(\lambda) \iff \sup(x) = \lambda$,

(2) 各 $x, y \in C$ に対して, $\sup(x) = \sup(y) \iff \sup(x \cap \text{cf}(\lambda)) = \sup(y \cap \text{cf}(\lambda))$.

Proof. 十分大きい regular cardinal θ をとる. $C = \{M \cap \lambda : M \prec \langle H_\theta, \in, \lambda \rangle\}$ とすると, C は club を含み, またこの C が主張の性質を満たすことはすぐにわかる. \square

Proposition 4.8. λ を singular cardinal で κ を regular cardinal で $\kappa \leq \text{cf}(\lambda)$ なるものとする. このとき, κ -saturated normal ideal I over $\mathcal{P}(\lambda)$ で $\{x \subseteq \lambda : \sup(x) = \lambda, x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ となるものは存在しない.

Proof. I を κ -saturated normal ideal で $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ なるものとする. $\{x : \sup(x) = \lambda\} \in I^*$ と仮定してみる. Lemma 4.7 より, $C \in I^*$ で各 $x \in C$ に対して, $\sup(x \cap \text{cf}(\lambda)) = \text{cf}(\lambda) \iff \sup(x) = \lambda$ となるものがある. よって $S' := \{x \in S : \sup(x \cap \text{cf}(\lambda)) = \text{cf}(\lambda)\} \in I^*$. また, $\text{cf}(\lambda) \geq \kappa$ より $x \in S'$ に対して $x \cap \text{cf}(\lambda) \neq \text{cf}(\lambda)$ である. ここで projection ideal J of I onto $\text{cf}(\lambda)$ を考える. J は κ -saturated normal ideal over $\mathcal{P}(\text{cf}(\lambda))$, $\{y \subseteq \text{cf}(\lambda) : y \cap \kappa \in \kappa\} \in J^*$, かつ $\{y \subseteq \text{cf}(\lambda) : \sup(y) = \text{cf}(\lambda)\} \in J^*$ となっている. しかしこれは Proposition 4.5 に反している. \square

Proposition 4.9. λ を singular cardinal で $\kappa < \lambda$ を regular uncountable cardinal とする. I を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ で $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ なるものとする. もし I が κ -saturated で $\kappa \leq \text{cf}(\lambda)$ ならば, $X \in I^*$ で $|X| = \lambda$ となるものが存在する.

この proposition を証明するために, Shelah による pcf theory を用いる. まず pcf theory の基本的な定義及び事実を列挙する. pcf についてのより詳しい情報は, Abraham-Magidor [1], Cummings [3], Cummings-Foreman-Magidor [4], Eisworth [5], Shelah [11] 等を参照せよ.

D を regular cardinal の集合とする. $\Pi D = \{f : f \text{ は } D \text{ 上の function, } \forall \mu \in D (f(\mu) \in \mu)\}$ とする. D 上の proper ideal I に対して, ΠD 上の二項関係 $<_I$ と \leq_I を次のように定義する:

- $f <_I g \iff \{\mu \in D : f(\mu) \geq g(\mu)\} \in I$.
- $f \leq_I g \iff \{\mu \in D : f(\mu) > g(\mu)\} \in I$.

関係 $<_I$ と \leq_I は ΠD 上の partial order である. また, $< = <_\emptyset$ とする: すなわち $f < g \iff \forall \mu \in D (f(\mu) < g(\mu))$. もし ΠD 上に $<_I$ -increasing, $<_I$ -cofinal な列が存在するとき, $\Pi D/I$ は true cofinality をもつと呼ぶことにする. $\Pi D/I$ が true cofinality をもつとき, $\text{tcf}(\Pi D/I)$ で ΠD の $<_I$ -increasing $<_I$ -cofinal subset の最小濃度を表すことにする. もし I が maximal ideal の時は, $<_I$ は total order となり, $\Pi D/I$ は常に true cofinality をもつことに注意する.

D と I を先のようなものとする. γ を ordinal で $\langle f_\xi : \xi < \gamma \rangle$ を ΠD の \leq_I -increasing な列とする. $g \in \Pi D$ が exact upper bound for $\langle f_\xi : \xi < \gamma \rangle$ (略して eub) とは,

- (1) 全ての $\xi < \gamma$ に対して $f_\xi \leq_I g$.
- (2) 全ての $h \in \Pi D$ に対して, もし $h <_I g$ ならばある $\xi < \gamma$ で $h \leq_I f_\xi$ となる.

eub for $\langle f_\xi : \xi < \gamma \rangle$ は modulo I の意味で一意に決まることに注意する: もし g と g' が eub for $\langle f_\xi : \xi < \gamma \rangle$ ならば, $\{\mu \in D : g(\mu) = g'(\mu)\} \in I^*$.

regular cardinal の集合 D と集合 x に対して, characteristic function $\chi_x^D \in \Pi D$ を, もし $\sup(x \cap \mu) < \mu$ ならば $\chi_x^D(\mu) = \sup(x \cap \mu)$, もし $\sup(x \cap \mu) = \mu$ ならば $\chi_x^D(\mu) = 0$ と定義する.

regular cardinal の集合 D で, D が最大元を持たないものに対して, J_D^{bd} で bounded ideal over D をあらわす: すなわち, $J_D^{bd} := \{X \subseteq D : \sup(X) < \sup(D)\}$.

singular cardinal μ に対して,

$\text{pp}(\mu) = \sup\{\text{tcf}(\Pi D/I) : D \subseteq \mu \cap \text{Reg}, |D| = \text{cf}(\mu), \sup(D) = \mu, I \text{ は } J_D^{bd} \text{ の拡張である maximal ideal over } D\}$.

Fact 4.10. Singular cardinal μ に対して, $\mu^+ \leq \text{pp}(\mu) \leq \mu^{\text{cf}(\mu)}$.

Fact 4.11 (Shelah [11]). uncountable cofinality を持つ singular cardinal μ に対して, もし $\{\alpha < \mu : \alpha \text{ は singular cardinal, } \text{pp}(\alpha) = \alpha^+\}$ が μ で stationary ならば $\text{pp}(\mu) = \mu^+$.

これより Proposition 4.9 の証明に入る.

Proof. 各 regular $\mu < \lambda$ に対して, I_μ を projection of I onto μ とする. I_μ は κ -saturated normal ideal over $\mathcal{P}(\mu)$ で $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I_\mu^*$. Proposition 4.5 より, $X_\mu \in I_\mu^*$ で $\forall x, y \in X_\mu (\sup(x) = \sup(y) \Rightarrow x = y)$ かつ $\forall x \in X_\mu (\sup(x) < \mu)$ となるものが取れる. ここで $X = \{x \subseteq \lambda : \sup(x) < \lambda, \forall \mu \in \text{Reg} \cap x \setminus \kappa (x \cap \mu \in X_\mu)\}$ とする. Proposition 4.8 と I の normality より, $X \in I^*$ である. X の定義より各 $x, y \in X$ と $\mu \in \text{Reg} \cap x \cap y$ に対して, $\sup(x \cap \mu) = \sup(y \cap \mu) \Rightarrow x \cap \mu = y \cap \mu$ が成立することに注意.

Claim 4.12. 各 singular cardinal ν で $\kappa < \nu < \lambda$ なるものに対して, $\text{pp}(\nu) = \nu^+$.

Proof. Fact 4.11 より, countable cofinality を持つ ν のみ調べればよい. projection ideal I_{ν^+} of I onto ν^+ を考える. I_{ν^+} は κ -saturated で $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I_{\nu^+}^*$. よって $S \in I_{\nu^+}^*$ ですべての $x, y \in S$ に対して,

- $\sup(x) = \sup(y) \Rightarrow x = y$.
- すべての regular $\mu \in (x \cap y) \cup \{\nu^+\}$ に対して $\sup(x \cap \mu), \sup(y \cap \mu) < \mu$.

特に $|S| = \nu^+$ である. $\text{pp}(\nu) = \nu^+$ を示すために, $D \subseteq \nu \cap \text{Reg}$ で $|D| = \omega$ かつ $\sup(D) = \nu$ となるものと maximal ideal K over D で $J_D^{bd} \subseteq K$ となるものを任意に取る. $F \subseteq \Pi D$ で $|F| = \nu^+$ かつ F が cofinal in $\langle \Pi D, <_K \rangle$ となるものを見つけたい. しかし $\{\chi_x^D : x \in S\}$ が cofinal で濃度 ν^+ となることはすぐにわかる. □[Claim]

unbounded subset $D \subseteq \lambda \cap \text{Reg}$ で $|D| = \text{cf}(\lambda)$, $\sup(D) = \lambda$, かつ $\min(D) > \text{cf}(\lambda)$ となるものを固定する. $\mathcal{M} = \langle H_\theta, \in, \Delta, \lambda, D \rangle$ とする. $Y = \{x \in X : SK^{\mathcal{M}}(x) \cap \lambda = x\}$ とすると, 明らかに $Y \in I^*$ である.

Claim 4.13. 各 $x, y \in Y$ に対して, もし $\sup(x) = \sup(y)$ ならば $x \cap D = y \cap D$ である.

Proof of Claim. Δ -least increasing bijection map $\pi : \text{cf}(\lambda) \rightarrow D$ をとる. $x \in Y$ に対して, $\text{cf}(\lambda) \in x$ かつ $\pi^{\text{“}}(x \cap \text{cf}(\lambda)) = x \cap D$ となる. $x, y \in Y$ で $\sup(x) = \sup(y)$ なるものを任意にとると, $\sup(x \cap \text{cf}(\lambda)) = \sup(y \cap \text{cf}(\lambda))$ である. X の定義より $x \cap \text{cf}(\lambda) = y \cap \text{cf}(\lambda)$ が成立する. ゆえに $x \cap D = \pi^{\text{“}}(x \cap \text{cf}(\lambda)) = \pi^{\text{“}}(y \cap \text{cf}(\lambda)) = y \cap D$ である. □[claim]

$E = \{\sup(x) : x \in Y\}$ とする. 次に注意:

- (1) E は λ 未満の singular cardinal の集合である.
- (2) E は λ で unbounded かつ $|E| = \text{cf}(\lambda)$ である.

直前の claim より, 各 $\nu \in E$ に対して一意な $D_\nu \subseteq D \cap \nu$ で $\forall x \in Y (\sup(x) = \nu \Rightarrow x \cap D = D_\nu)$ となるものが取れる. D_ν は ν で unbounded であることに注意.

Claim 4.12 より, すべての $\nu \in E$ に対して $\text{pp}(\nu) = \nu^+$ である. よって maximal ideal K_ν over D_ν で $J_{D_\nu}^{bd}$ を拡張し, $\text{tcf}(\Pi D_\nu/K_\nu) = \nu^+$ となるものが取れる: bounded set $d \subseteq D_\nu$ で $|d| = \text{cf}(\nu)$ を固定し, $J_{D_\nu}^{bd}$ を拡張する maximal ideal K_ν で $d \in K_\nu^*$ となるものを取ればよい.

ΠD_ν の $\langle K_\nu$ -increasing $\langle K_\nu$ -cofinal な列 $\langle f_\xi^\nu : \xi < \nu^+ \rangle$ をとる. $x \in Y$ を取り, $\nu = \sup(x)$ とする. ここで $e_x \leq \nu^+$ を $e_x = \sup\{\xi < \nu^+ : f_\xi^\nu <_{K_\nu} \chi_x^{D_\nu}\}$ と定義する. すべての $\mu \in D_\nu$ に対して $\sup(x \cap \mu) < \mu$ なので, $e_x < \nu^+$ である.

さらに $Z = \{x \in Y : \chi_x^{D_{\sup(x)}} \text{ は eub for } \langle f_\xi^{\sup(x)} : \xi < e_x \rangle\}$ とおく.

Claim 4.14. $Z \in I^*$.

Proof. 矛盾を出すために $W := Y \setminus Z \in I^+$ と仮定する. $x \in W$ をとり, $\nu = \sup(x)$ とする. このとき, $\chi_x^{D_\nu}$ は eub for $\langle f_\xi^\nu : \xi < e_x \rangle$ ではない. よって $g_x \in \Pi D_\nu$ で $g_x < \chi_x^{D_\nu}$ だがすべての $\xi < e_x$ に対して $g_x \not<_{K_\nu} f_\xi^\nu$ となるものが存在する.

j を (V, \mathbb{P}_I) -generic により生成される generic elementary embedding の \mathbb{P}_I -name とする. ここで $W \Vdash "D_{\sup(j^\lambda)} = j^\lambda D, \forall j(\mu) \in D_{\sup(j^\lambda)} (g_{j^\lambda(j(\mu))} < \sup(j^\lambda \cap j(\mu)) = \sup(j^\lambda \mu))"$ となることに注意する. \mathbb{P}_I の κ -c.c. ness より, $\langle \alpha_\mu : \mu \in D \rangle$ で $\alpha_\mu < \mu$ かつ $W \Vdash "g_{j^\lambda(j(\mu))} \leq j(\alpha_\mu)"$ となるものが取れる. $g \in \Pi D$ をすべての $\mu \in D$ に対して $g(\mu) = \alpha_\mu$ と定義する. 明らかに $W \Vdash "g_{j^\lambda} < j(g) | D_{\sup(j^\lambda)}"$ が成立する. よって $W' := \{x \in W : g_x < g | D_{\sup(x)}\} \in I^+$ となる. $E' = \{\sup(x) : x \in W'\} \subseteq E$ とおく. 各 $\nu \in E'$ に対して, $\eta_\nu < \nu^+$ で $g | D_\nu <_{K_\nu} f_{\eta_\nu}$ となるものを選ぶ. さらに各 $\mu \in D$ に対して $\beta_\mu = \sup\{f_{\eta_\nu}(\mu) + 1 : \mu \in D_\nu, \nu \in E'\}$ とする. $|E'| = \text{cf}(\lambda) < \min(D)$ なので, $\beta_\mu < \mu$ である. 最後に $h \in \Pi D$ を $h(\mu) = \beta_\mu$ と定義する. 明らかに $\nu \in E'$ に対して $f_{\eta_\nu} <_{K_\nu} h | D_\nu$ となる.

$W' \in I^+$ で I は normal なので, $x \in W'$ で $\forall \mu \in x \cap D (\beta_\mu \in x)$ となるものが取れる. この時, $\nu := \sup(x)$ とおけば $h | D_\nu < \chi_x^{D_\nu}$ となる. ゆえに $g_x < g | D_\nu <_{K_\nu} f_{\eta_\nu} <_{K_\nu} h | D_\nu < \chi_x^{D_\nu}$ となる. 以上より $g_x <_{K_\nu} f_{\eta_\nu}$ だが $\eta_\nu < e_x$ であり, これは g_x のとり方に矛盾する. \square [claim]

最後に次を示す. これより明らかに $|Z| \leq \lambda$ となる.

Claim 4.15. 各 $x, y \in Z$ で $\sup(x) = \sup(y)$ なるものに対して, もし $e_x = e_y$ ならば $x = y$ である.

Proof of Claim. $x, y \in Z$ で $\sup(x) = \sup(y)$ かつ $e_x = e_y$ なるものをとる. $\nu = \sup(x) = \sup(y)$ で $\eta = e_x = e_y$ とおく. このとき D_ν は $x \cap y$ の unbounded subset である. 定義より, $\chi_x^{D_\nu}$ と $\chi_y^{D_\nu}$ は eub for $\langle f_\xi^\nu : \xi < \eta \rangle$ となる. eub は modulo K_ν で一意なので, $\{\mu \in D_\nu : \sup(x \cap \mu) = \sup(y \cap \mu)\}$ は ν で unbounded となる. $\mu \in D_\nu$ で $\sup(x \cap \mu) = \sup(y \cap \mu)$ なるものに対して, $\mu \in D_\nu \subseteq x \cap y$ となる. よって X の定義より, $x \cap \mu = y \cap \mu$ が成立する. このような μ は ν で unbounded に存在するので, $x = y$ となる. \square [Claim]

\square

以上より, 次のような結論が得られる.

Corollary 4.16. λ を uncountable cardinal で S を $\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set とする. このとき各 $\kappa \in \text{crit}(S)$ に対して, $\text{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が成立する. 特に $\text{Part}(S, \kappa)$ が成立する.

Proof. そうでないと仮定する. $\text{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が不成立なので, ideal $I := \text{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)} \restriction \{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ は κ -saturated となる.

Case 1. $\text{cf}(\lambda) < \kappa$. regular cardinal の上昇列 $\langle \lambda_i : i < \text{cf}(\lambda) \rangle$ で λ に収束し, $\kappa < \lambda_0$ となるものをとる. J_i を projection of I onto λ_i とする. J_i は κ -saturated で $\{y \subseteq \lambda_i :$

$y \cap \kappa \in \kappa\} \in J_i^*$. よって Lemma 3.20 より, $X_i \in J_i^*$ で $|X_i| = \lambda_i$ となるものが取れる. $S' = \{x \in S : \forall i < \text{cf}(\lambda) (x \cap \lambda_i) \in X_i\} \in I^*$ とする. S' は S の stationary subset で, すべての $\gamma < \lambda$ に対して $|\{x \cap \gamma : \gamma \in x, x \in S'\}| < \lambda$ となる. これは Proposition 4.1 に反する.

Case 2. $\kappa \leq \text{cf}(\lambda)$. Proposition 4.5 と Proposition 4.9 より, stationary subset $T \subseteq \{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ で $|T| = \lambda$ となるものが取れる. このとき Proposition 4.1 より $\text{Part}(T, \kappa)$ が成立し, やはり矛盾である. \square

Corollary 4.17. 任意の非可算集合 A と $\mathcal{P}(A)$ の stationary set S に対して $\text{Part}(S, \omega_1)$ が成立する.

5. 問題

我々は stationary set S と $\kappa \in \text{crit}(S)$ に対して $\text{Part}(S, \kappa)$ が成立することを示した. 一方で $\lambda > \kappa$ であっても κ^+ 個の分割は一般に帰結できない: Gitik [7] は適当な巨大基数公理の仮定の下で, ある inaccessible κ と stationary $S \subseteq \{x \subseteq \kappa^+ : x \cap \kappa \in \kappa, |x| < \kappa\}$ で $\text{Part}(S, \kappa^+)$ が成立しない model を作っている. これより次のような自然な疑問が生じる:

Question 1. ある $\kappa < \lambda$ と stationary $S \subseteq \{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa, |x| \geq \kappa\}$ で $\text{Part}(S, \kappa^+)$ が成立しないことは consistent か? 特に $\kappa = \omega_1$ と $\lambda = \omega_2$ の場合はどうであろうか?

ここで次に注意しておく:

Fact 5.1. $\kappa < \lambda$ に対して次は同値である:

- (1) $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa, |x| \geq \kappa\}$ が $\mathcal{P}(\lambda)$ で stationary.
- (2) $\langle \lambda, \kappa \rangle \rightarrow \langle \kappa, < \kappa \rangle$.

特に $\{x \subseteq \omega_2 : x \cap \omega_1 \in \omega_1, |x| = \omega_1\}$ が stationary であることと Chang's conjecture は同値である.

REFERENCES

- [1] U. Abraham, M. Magidor, *Cardinal Arithmetic*. To appear in Handbook of Set Theory.
- [2] D. Burke, *Splitting stationary subsets of $\mathcal{P}(\chi)$* . unpublished.
- [3] J. Cummings, *Notes on singular cardinal combinatorics*. Notre Dame J. Formal Logic 46 (2005), no. 3, 251–282.
- [4] J. Cummings, M. Foreman, M. Magidor, *Squares, scales and stationary reflection*. J. Math. Log. 1 (2001), no. 1, 35–98.
- [5] T. Eisworth, *Successors of singular cardinals*. To appear in Handbook of Set Theory.
- [6] M. Foreman, *Potent axioms*. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), no. 1, 1–28.
- [7] M. Gitik, *Nonsplitting subset of $P_\kappa(\kappa^+)$* , J. Symbolic Logic 50 (1985), no. 4, 881–894 (1986).
- [8] T. Jech, *Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals*, Ann. Math. Logic 5 (1973), 165–198.
- [9] A. Kanamori, *The higher infinite*. Large cardinals in set theory from their beginnings. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [10] P. Larson, *The stationary tower*. Notes on a course by W. Hugh Woodin. University Lecture Series, 32. American Mathematical Society.
- [11] S. Shelah, *Cardinal arithmetic*. Oxford Logic Guides, 29. Oxford Science Publications. 1994.
- [12] R. Solovay, *Strongly compact cardinals and the GCH*. Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), pp. 365–372.

E-mail address: `usuba@info.human.nagoya-u.ac.jp`

GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE, NAGOYA UNIVERSITY, NAGOYA, 464-8601, JAPAN