数理解析研究所講究録
第1599巻 2008年 148-153

コーダルサンドイッチの列挙，ランダム生成，数え上げについて

京都大学 数理解析研究所　来嶋 秀治 (Shuji Kijima)
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科　清見 礼 (Masashi Kiyomi)
School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology

東京工業大学 大学院情報理工学研究科　岡本 吉央 (Yoshio Okamoto)
Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology

国立情報学研究所　宇野 毅明 (Takeaki Uno)
National Institute of Informatics

概要

本稿では枝制約をもつコーダルグラフの列挙，ランダム生成，数え上げについて議論する．対象とする集合中のコーダルグラフは，枝制約が包含関係にあるグラフの対として与えられ，与えられたグラフ対の一方の部分グラフであり，かつもう一方を部分グラフとして含む．本稿では，与えられるグラフ対の一方がコーダルであることを仮定する．この対象設定は，コーダル補完あるいはコーダル縮小の自然な一般化になっている．この枝制約つきコーダルグラフ集合に対して，列挙，ランダム生成，数え上げについて議論する．本研究の目標は，統計学，データマイニング，数値計算などの様々な分野で個々に現れる実用的な諸問題に対して，アルゴリズム理論の立場に基づいた統一的な視点を与えることである．

1　はじめに

グラフが**コーダル**であるとは，長さ4以上の誘導サイクル (induced cycle) を持たないことである．コーダルグラフは，統計学，最適化，数値計算，計算理論など様々な分野で起因する多くの問題に対して，扱いやすい対象としてしばしば現れる．これらの分野においては，対象とするグラフをコーダルグラフで近似して，コーダルグラフに対する効率的なアルゴリズムをしばしば適用する．このような「コーダル近似」の「良さ」の評価は，応用に依存する．例えば，統計学のグラフィカルモデリングの文脈では，良いコーダル近似の指標として，AIC (Akaike's Information Criterion), BIC (Bayesian Information Criterion), MDL (Minimum Description Length) などの最小化が考えられる [18, 24, 29]．あるいは，数値計算の文脈では，加える枝の最小化 (minimum fill-in 問題) が考えられる [20, 21, 27, 4]．また離散最適化の文脈では，最大クリーク最小化 (treewidth 問題) が考えられる [19, 12, 13, 3]．

このような多様な評価基準に対して，最適解の探索はしばしば NP 困難であり，効率的な列挙，ランダム生成は探索支援の汎用手法となり得る．すなわち，全列挙による探索は，厳密解法を実現し，また，ランダム生成を利用した探索は，(乱択) 近似解法を実現し得る．本研究の目的は，(コーダル) グラフ探索のための効率的な列挙法，ランダム生成法の開発，あるいは問題の難しさの解析である．

グラフ G のコーダル近似として，例えば，G に何本か枝を加えて得られるコーダルグラフ，あるいは G から何本か枝を取り除いて得られるコーダルグラフ，という近似解空間を考えることが

できる．前者はグラフ G の**コーダル補完**（*chordal completion*），後者はグラフ G の**コーダル縮小**（*chordal deletion*）と呼ばれる．与えられたグラフ G のコーダル補完，あるいはコーダル縮小を対象とした様々な問題が考られる．

本稿では，より一般化された問題を扱う．具体的には，グラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ は同一の頂点集合を持ち，$\overline{G}$ が $\underline{G}$ を包含し，少なくとも一方はコーダルとする．このとき，$\overline{G}$ に含まれ，$\underline{G}$ を含むようなコーダルグラフを考える．グラフ $\overline{G}$ がコーダルのとき，対象はコーダル補完の一般化に相当し，$\underline{G}$ がコーダルの場合はコーダル縮小の一般化である．

一般化した問題を考える理由は（少なくとも）2つある．ひとつは，問題が一般化されているということ自身が理由である．もうひとつは，より実用上の理由である．コーダル補完あるいはコーダル縮小を扱う際，対象の個数は一般に膨大であり，効率的な列挙アルゴリズムを設計しても，実際に列挙アルゴリズムを実行することは容易ではない．ランダムサンプリングを行うにしても，同様に対象の巨大さに起因して，真に重要な要素が出力される確率は極めて低くなりがちである．コーダルグラフの個数に関して，Wormald [30] は頂点数 n のラベルつきコーダルグラフの個数が漸近的に $\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}2^{r(n-r)}$ であることを示している．これは大まかに見積もって $2^{n^2/4+O(n\log n)}$ である．このように「コーダルグラフ全てを探索する」ことは非現実的であり，探索領域を何らかの方法で限定することは現実的な意味で重要である．所望のコーダル近似を目的として，限定された領域をヒューリスティクスや局所探索などと組み合わせて探索することができる．

主要な成果　本稿では，与えられたグラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ の少なくとも一方がコーダルである場合について，$\underline{G}$ を部分グラフとして含み，$\overline{G}$ に含まれるコーダルグラフの効率的な列挙法を提案する．

ランダム生成法に対しては，その難しさに関する2つの示唆を与える．ひとつ目の示唆として，グラフ $\underline{G}$ を含み，グラフ $\overline{G}$ に含まれるコーダルグラフの数え上げが，$\underline{G}$ をコーダルに制限した場合でも#P 完全であることを示す．この数え上げ困難性の結果は，自己帰着性を利用した素朴なランダム生成法では，多項式時間アルゴリズムが実現できないであろうことを示唆する．ふたつ目の示唆として，マルコフ連鎖モンテカルロ（MCMC）法に基づく議論を行う．MCMC 法は数え上げ困難な対象に対して，しばしば多項式時間ランダム生成法を実現し得る有効な手法である．本稿では，一様ランダム生成を目的とした自然なマルコフ連鎖を与えると共に，そのマルコフ連鎖の収束時間が最悪の場合に非常に遅くなることを示す．

関連研究　本稿で行う一般化は，Golumbic, Kaplan, Shamir [6] によって提案された**グラフサンドイッチ問題**（*graph sandwich problem*）の枠組みの特殊ケースに当たる．Golumbic, Kaplan, Shamir [6] は，コーダルグラフ，パーフェクトグラフ，区間グラフなどの多くのグラフクラスについて，グラフサンドイッチ問題が NP 完全であることを示している．

コーダルグラフの列挙に関して，Kiyomi, Uno [10]，Kiyomi, Kijima, Uno [11] の結果がある．Wormald [30] は n 頂点のコーダルグラフの漸近的個数を議論している．最小コーダル補完/縮小は共に著名な NP 困難問題であるが [28, 17]，多項式時間近似アルゴリズム，固定パラメータ容易性，指数時間厳密アルゴリズムに関する成果がある [16, 15, 3]．

2　準備

本稿で扱うグラフは全て無向単純とする．グラフ G に対して，G の頂点集合を $V(G)$ で，G の枝集合を $E(G)$ で表す．共通の頂点集合 V をもつグラフの対 G と H に対して，$E(G)\subset E(H)$（若しくは $E(G)\subseteq E(H)$）が成り立つとき，$G\subset H$（同様に $G\subseteq H$）と表記する．グラフ $G=(V,E)$

Procedure $A(\overline{G},\underline{G})$ ($\overline{G}$ がコーダルの場合)

begin
  find an edge $e \in \overline{E} \setminus \underline{E}$
    such that $\overline{G} - e$ is chordal
  If such e exists **do**
    output $\overline{G} - e$
    call $A(\overline{G}, \underline{G} + e)$
    call $A(\overline{G} - e, \underline{G})$
  otherwise halt
end.

Procedure $B(\overline{G},\underline{G})$ ($\underline{G}$ がコーダルの場合)

begin
  find an edge $e \in \overline{E} \setminus \underline{E}$
    such that $\underline{G} + e$ is chordal
  If such e exists **do**
    output $\underline{G} + e$
    call $B(\overline{G}, \underline{G} + e)$
    call $B(\overline{G} - e, \underline{G})$
  otherwise halt
end.

図 1: 列挙アルゴリズムの手続き.

と頂点対 $e = \{v_1, v_2\} \in (\binom{V}{2}) \setminus E)$ に対して，グラフ $(V, E \cup \{e\})$ を $G + e$ と表記する．同様にグラフ $G = (V, E)$ と枝 $e \in E$ に対して，$(V, E \setminus \{e\})$ を $G - e$ と表記する．与えられたグラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ が $\underline{G} \subset \overline{G}$ を満たすとき，$\overline{G}$ と $\underline{G}$ に挟まれるコーダルグラフ全体の集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ を

$$\Omega_C(\overline{G},\underline{G}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{G \mid G \text{ はコーダル, } \underline{G} \subseteq G \subseteq \overline{G}\} \tag{1}$$

と定義する．集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ 中のグラフを $\overline{G}$ と $\underline{G}$ に対する**コーダルサンドイッチ**と呼び，$\overline{G}$ と $\underline{G}$ それぞれを集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ の**上限グラフ**および**下限グラフ**と呼ぶ.

集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ 中のグラフは「ラベル」がついていることに注意が必要である．すなわち，相異なる枝集合を持つ $G \in \Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ と $G' \in \Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ は，たとえ同型写像を持つ場合でも，相異なるグラフとして扱う.

本稿では，与えられたグラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ のうち，少なくとも一方はコーダルグラフであることを仮定する．便宜のため，この仮定を次の条件として記述する.

条件 1 グラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ は $\underline{G} \subset \overline{G}$ を満たし，かつ $\overline{G}$ と $\underline{G}$ の少なくとも一方はコーダル.

次は本稿の鍵となる命題で，Rose, Tarjan, Lueker [21] の結果から導かれる.

命題 2.1 与えられたコーダルグラフの対 $\overline{G} = (V, \overline{E})$ と $\underline{G} = (V, \underline{E})$ は $\underline{G} \subset \overline{G}$ を満たすとし，また $k = |\overline{E} \setminus \underline{E}|$ とする．このときコーダルグラフの列 $G_0, G_1, \ldots, G_k$ が存在して，$G_0 = \underline{G}$，$G_k = \overline{G}$ かつ，各 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ について適切な枝 $e_i \in \overline{E} \setminus \underline{E}$ が存在して $G_{i+1} = G_i + e_i$ を満たす. ■

命題2.1 はコーダルサンドイッチ集合が枝集合の包含関係に関して**階層的半順序集合** (*graded poset*) になること意味する.

3 コーダルサンドイッチ列挙

本節では与えられたグラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ が条件 1 を満たす場合について，集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ 中のコーダルサンドイッチの列挙アルゴリズムを与える.

まず上限グラフ $\overline{G}$ がコーダルの場合を考える．このとき，命題2.1 より，もし $\Omega_C(\overline{G},\underline{G}) \setminus \{\overline{G}\} \neq \emptyset$ ならば $\overline{G} - e$ がコーダルとなるような枝 $e \in \overline{E} \setminus \underline{E}$ が存在する．枝 e に対して，2つの集合 $\Omega_C(\overline{G} - e, \underline{G})$ と $\Omega_C(\overline{G}, \underline{G} + e)$ を考えると，コーダルサンドイッチ集合の定義より，集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ 中のグラフ

で枝 e を含まないものは $\Omega_C(\overline{G}-e,\underline{G})$ に属し，集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ 中のグラフで枝 e を含むものは $\Omega_C(\overline{G},\underline{G}+e)$ に属す．すなわち，集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ に対して次の 2 分割が得られる．

$$\Omega_C(\overline{G},\underline{G})=\Omega_C(\overline{G}-e,\underline{G})\cup\Omega_C(\overline{G},\underline{G}+e),\ \text{かつ}\ \Omega_C(\overline{G}-e,\underline{G})\cap\Omega_C(\overline{G},\underline{G}+e)=\emptyset.$$

このとき，集合 $\Omega_C(\overline{G},\underline{G}+e)$ の上限グラフ $\overline{G}$ はコーダルであり，集合 $\Omega_C(\overline{G}-e,\underline{G})$ の上限グラフ $\overline{G}-e$ もまた，枝 e の選び方より，コーダルグラフである．すなわち，集合中の要素が 1 つになるまで，2 分割を再帰的に行うこととことができる．詳細には，アルゴリズムははじめに $\overline{G}$ を出力し，図 1 の Procedure $A(\overline{G},\underline{G})$ を呼び出す．

このアルゴリズム全体の計算量は，Rose, Tarjan, Lueker [21] もしくは Tarjan, Yannakakis [23] によるグラフのコーダル判定に関する線形時間アルゴリズムを用いることで，$O(k(n+m)\cdot|\Omega_C(\overline{G},\underline{G})|)$ となる．ただし，$n=|V|$，$m=|\overline{E}|$，$k=|\overline{E}\setminus\underline{E}|$ とする．詳細は [9] を参照されたい．

下限グラフ $\underline{G}$ がコーダルの場合についても同様のアルゴリズムが得られる．具体的には図 1 の再帰的な Procedure $B(\overline{G},\underline{G})$ を呼び出す．この場合も，計算量は上限グラフ $\overline{G}$ がコーダルの場合と同様に $O(k(n+m)\cdot|\Omega_C(\overline{G},\underline{G})|)$ となる．

4 コーダルサンドイッチ数え上げの困難性

本節では，コーダルサンドイッチ数え上げの計算困難性について議論する．

定理 4.1 コーダルサンドイッチ数え上げ，$|\Omega_C(\overline{G},\underline{G})|$ の計算は入力される下限グラフ $\underline{G}$ が連結コーダルに制限された場合でさえ#P 完全である． ■

定理 4.1 は，#P 完全問題のひとつであるグラフ中の森（forest）の数え上げ [26] からの帰着により，証明できる．証明の詳細は [9] に譲る．この帰着は parsimonious であり，すなわちコーダルサンドイッチ数え上げに対する近似計算法があれば，グラフ中の森数え上げに対しても近似比を保存する計算法が存在する．なお，グラフ中の森数え上げに対する全多項式時間乱択近似計算法（FPRAS）の存在性は大きな未解決問題である．

次に，コーダル縮小数え上げの困難性について議論する．グラフ G のコーダル縮小の集合はコーダルサンドイッチ集合 $\Omega_C(G,I_n)$ と見ることができる．ただし，I_n は n 頂点からなる枝無しグラフを表す．

定理 4.2 $|\Omega_C(G,I_n)|$ の計算は#P 完全である． ■

証明は森数え上げ問題からの Cook-reduction によって得られるが，詳細は [9] に譲る．したがって，個数計算はこの帰着によって近似比が保存されない．

これらの結果から，コーダルグラフの一様ランダムサンプリングが容易ではないことが，従来の数え上げとランダムサンプリングの関係に関する多くの先行研究（例として [22] 参照）に基づいて示唆される．

5 素朴なマルコフ連鎖と収束の速さ

本節では，条件 1 の仮定の下で，$\Omega_C(\overline{G},\underline{G})$ 上での一様ランダム生成法について議論する．本稿では素朴で自然なマルコフ連鎖を与える．非一様分布に対しても，Metropolis-Hastings 法を適用することで，同様のマルコフ連鎖が容易に定義されることに注意されたい．

マルコフ連鎖 $\mathcal{M}$ は条件 1 を仮定した集合 $\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ を状態空間として持ち，現在の状態 $G \in \Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ から次の時刻の状態 G' への推移は以下のように定義される．まず，枝 $e \in \overline{E} \setminus \underline{E}$ を一様ランダムに選択する．次に，以下の 3 つの場合を考える．

1. もし $e \notin E(G)$ かつ $G+e$ がコーダルなら，$H = G+e$ とする．
2. もし $e \in E(G)$ かつ $G-e$ がコーダルなら，$H = G-e$ とする．
3. それ以外の場合，$H = G$ とする．

最後に，確率 1/2 で $G' = H$ とし，それ以外の場合は $G' = G$ とする．明らかに $G' \in \Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ が成り立つ．

条件 1 の下で，集合 $\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ は階層的半順序集合になることから，マルコフ連鎖 $\mathcal{M}$ は既約である．また，$\mathcal{M}$ は明らかに非周期的であり，従ってエルゴード的である．マルコフ連鎖 $\mathcal{M}$ は，任意の状態対 $G \in \Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ と $G' \in \Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ に対して詳細均衡方程式 $P(G,G') = P(G',G)$ を満たすことから，唯一の定常分布は $\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ 上の一様分布となる．命題 2.1 から，$\mathcal{M}$ の直径は高々 $2k$ である．ただし，$k = |\overline{E} \setminus \underline{E}|$ である．

マルコフ連鎖 $\mathcal{M}$ に対して，次の命題が成り立つ．詳細は [9] を参照されたい．

命題 5.1 入力グラフの対 $\overline{G}$ と $\underline{G}$ は $\underline{G} \subseteq \overline{G}$ を満たすものとしたとき，$\overline{G}$ と $\underline{G}$ を共にコーダルグラフに制限した場合でさえ，$\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ 上のマルコフ連鎖 $\mathcal{M}$ の混交時間が n に関して指数的となる例が無限個存在する．ただし，n は $\overline{G}$（と $\underline{G}$）の頂点数である． ■

6 まとめ

本稿では，下限グラフがコーダルの場合に，コーダルサンドイッチ数え上げ問題が#P 完全である事を示した．上限グラフがコーダルの場合の#P 困難性は未解決である．さらに，コーダル補完（すなわち，上限グラフが完全グラフのコーダルサンドイッチ）数え上げも#P 完全であると我々は予想している．別のグラフクラスに対して，我々は区間グラフサンドイッチ数え上げが#P 完全であることを示している（詳細は [9] 参照）．

本稿では，コーダルサンドイッチ集合 $\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ 上の一様ランダム生成に対して自然なマルコフ連鎖を与え，そのマルコフ連鎖の混交時間は $\overline{G}$ と $\underline{G}$ を共にコーダルに制限した場合でさえ，指数的となる例が存在することを示した．コーダルサンドイッチ集合に対して，多項式時間の（近似）一様ランダム生成法の存在は未解決である．提案したマルコフ連鎖では，$\overline{G}$ と $\underline{G}$ が条件 1 を満たすとき $\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ が階層的半順序集合になることを利用した．しかし，$\overline{G}$ と $\underline{G}$ が共にコーダルグラフである場合に制限しても，$\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ は一般には束になるとは限らない．集合 $\Omega_{\mathrm{C}}(\overline{G},\underline{G})$ が束となるような $\overline{G}$ と $\underline{G}$ の対の特徴づけは今後の課題である．

参考文献

[1] G. A. Dirac, On rigid circuit graphs, Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, **25** (1961), 71–76.

[2] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices and interval graphs, Pacific Journal of Mathematics, **15** (1965), 835–855.

[3] F. V. Fomin, D. Kratsch, and I. Todinca, Exact (exponential) algorithms for treewidth and minimum fill-in. Lecture Notes in Computer Science, **3142** (2004), 568–580.

[4] M. Fukuda, M. Kojima, K. Murota, and K. Nakata, Exploiting sparsity in semidefinite programming via matrix completion I: General framework, SIAM Journal on Optimization, **11** (2000), 647–674.

[5] M. C. Golumbic, Algorithmic graph theory and perfect graphs, Academic Press, New York, 1980.

[6] M. C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir, Graph sandwich problems, Journal of Algorithms, **19** (1995), 449–473.

[7] P. Heggernes, Minimal triangulations of graphs: A survey, Discrete Mathematics, **306** (2006), 297–317.

[8] P. Heggernes, K. Suchan, I. Todinca, and Y. Villanger, Characterizing minimal interval completions: towards better understanding of profile and pathwidth, Lecture Notes in Computer Science, **4393** (2007), 236–247.

[9] S. Kijima, M. Kiyomi, Y. Okamoto, and T. Uno, On counting, sampling, and listing of chordal graphs with edge constrains, RIMS-1610, 2007, available from `http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1610.pdf`

[10] M. Kiyomi and T. Uno, Generating chordal graphs included in given graphs, IEICE Transactions on Information and Systems, **E89-D** (2006), 763–770.

[11] M. Kiyomi, S. Kijima, and T. Uno, Listing chordal graphs and interval graphs, Lecture Notes in Computer Science, **4271** (2006), 68–77.

[12] T. Kloks, H. L. Bodlaender, H. Müller, and D. Kratsch, Computing treewidth and minimum fill-in: All you need are the minimal separators, Lecture Notes in Computer Science, **726** (1993), 260-271.

[13] T. Kloks, H. L. Bodlaender, H. Müller, and D. Kratsch, Erratum to the ESA' 93 proceedings, Lecture Notes in Computer Science, **855** (1994), 508.

[14] C. G. Leckerkerker and J. C. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line, Fund Math, **51** (1962), 45–64.

[15] D. Marx, Chordal deletion is fixed-parameter tractable, Lecture Notes in Computer Science, **4271** (2006), 37–48.

[16] A. Natanzon, R. Shamir, and R. Sharan, A polynomial approximation algorithm for the minimum fill-in problem, SIAM Journal on Computing, **30** (2000), 1067–1079.

[17] A. Natanzon, R. Shamir, and R. Sharan, Complexity classification of some edge modification problems, Discrete Applied Mathematics, **113** (2001), 109–128.

[18] T. Pedersen, R. F. Bruce, and J. Wiebe, Sequential Model Selection for Word Sense Disambiguation, Proceedings of the Fifth Conference on Applied Natural Language Processing (ANLP 1997), 388–395.

[19] N. Robertson and P. Seymour, Graph minors II. Algorithmic aspects of tree-width, Journal of Algorithms, **7** (1986), 309–322.

[20] D. J. Rose, A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations, in: R.C. Read (Ed.), Graph Theory and Computing, Academic Press, New York, 1972, pp. 183–217.

[21] D. J. Rose, R. E. Tarjan, and G. S. Lueker, Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs, SIAM Journal on Computing, **5** (1976), 266–283.

[22] A. Sinclair, Algorithms for Random Generation and Counting: A Markov Chain Approach, Birkhäuser, Boston, 1993.

[23] R. E. Tarjan and M. Yannakakis, Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs, SIAM Journal on Computing, **13** (1984), 566–579.

[24] A. Takemura and Y. Endo, Evaluation of per-record identification risk and swappability of records in a microdata set via decomposable models, arXiv:math.ST/0603609.

[25] V. G. Valiant, The complexity of computing the permanent, Theoretical Computer Science, **8** (1979), 189–201.

[26] V. G. Valiant, The complexity of enumeration and reliability problems, SIAM Journal on Computing, **8** (1979), 410–421.

[27] N. Yamashita, Sparse quasi-Newton updates with positive definite matrix completion, Mathematical Programming, 2007, published online at `http://www.springerlink.com/content/28271224t1nt3580/`

[28] M. Yannakakis, Computing the minimum fill-in is NP-complete, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods, **2** (1981), 77–79.

[29] J. Whittaker, Graphical models in applied multivariate statistics, Wiley, New York, 1990.

[30] N. C. Wormald, Counting labeled chordal graphs, Graphs and Combinatorics, **1** (1985), 193–200.