

疎フーリエ表現アルゴリズムの一実装*

八木谷 允
Masashi YAGITANI
yagi@act-w.nagaokaut.ac.jp

武井 由智
Yoshinori TAKEI
takei@nagaokaut.ac.jp

長岡技術科学大学 電気系
Department of Electrical Engineering, Nagaoka University of Technology

1 はじめに

信号に含まれる周波数成分の、エネルギーの大きい上位数個を探索することは、信号の特徴を抽出するために有用である。基本的な探索方法として、FFT を用いてフーリエ係数を求め、エネルギーの大きいものを見つけるという方法がある。しかし、この方法では N 点からなる信号に対し、計算コストが $\Theta(N \log N)$ がかかるため、信号長 N が大きくなると計算コストが大きくなる問題がある。その問題を解決するために、ランダムに信号をサンプリングし、確率的にエネルギーの上位 B 個を推定する疎フーリエ表現アルゴリズム [1] が 2002 年 Gilbert, Guha, Indyk, Muthukrishnan, Strauss によって提案された。また、2005 年には、Zou, Gilbert, Strauss, Daubechies がそのアルゴリズムの改良と実装を行い、 $B = 8$ 項の主要なフーリエ係数を得るのに、およそ信号長 10^5 点以上では通常の FFT より効率的であると報告している [2]。この文献 [2] のアルゴリズムは、RAISFA (Randomized Algorithm for Sparse Fourier transform Analysis) と命名されている。本稿では、その起源である文献 [1] のアルゴリズムを含めて、RAISFA と呼ぶことにする。これらのアルゴリズムの走行時間の N への依存性は、 $\log N$ の多項式 (特に [2] 版では $\log N$ の低い次数の多項式) で、巨大な信号から比較的少数のフーリエ係数をとり出すことに大変効率的であり、巨大信号の特徴抽出・要約に有効な手段となることが期待される。

RAISFA の実用化に向け、各種パラメータが実行時間や成功確率・精度に与える影響のより詳細な調査が必要である。そのため本研究では RAISFA を独自に実装し、使用するデジタルフィルタ等のパラメータ設定の数値実験的・具体的調査を行っている。昨年夏の LA シンポジウムにて、この実装についての中間報告を行った [5]。実装は GP/PARI [3] 数式処理システムを用いて行っている。

本稿では、[5] にひき続き、この RAISFA の実装とそれを用いた実験による性能解析について報告する。特に、実験に基づき、同アルゴリズムの主要周波数同定処理 (Identification) で使用している BoxCar フィルタの等リプルフィルタへの変更を提案する。

*本研究の一部は平成 19 年度科学研究補助金 基盤研究 (C) 課題番号 18500008 により実施された。

2 RAISFA の概要

フーリエ変換の基本的性質の記述から始める。 $S(n)$ を長さ N の複素数値離散信号とする。 $S(n)$ は、長さ N の周期信号であると考え。つまり、 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ で $\text{mod } N$ の整数の環を表すとき、時間域を $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ と同一視して、 $S : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \ni n \mapsto S(n) \in \mathbb{C}$ であると考え。以下、簡単のため N が奇素数のときを考える。 S のフーリエ変換 \hat{S} が

$$\hat{S}(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} S(n) e^{-2\pi\sqrt{-1}kn/N} \quad (1)$$

で定義される。周波数 $k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ に対し、 $\hat{S}(k) \in \mathbb{C}$ は $S(n)$ のフーリエ係数である。 $|\hat{S}(k)|^2$ をフーリエ係数のエネルギーという。フーリエ逆変換

$$S(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \hat{S}(k) e^{2\pi\sqrt{-1}kn/N} \quad (2)$$

により、 $\{\hat{S}(k) : k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ から $\{S(n) : n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}\}$ が再生される。また、

$$\|S\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |S(n)|^2, \quad (3)$$

$$\|\hat{S}\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} |\hat{S}(k)|^2 \quad (4)$$

を、それぞれ S および \hat{S} の総エネルギーと呼ぶ。これらは互いに等しい:

$$\|S\|_2^2 = \|\hat{S}\|_2^2 \quad (5)$$

(パーセバルの等式)。また、以下では、 M を

$$\|S\|_2^2 \leq M \quad (6)$$

が保証される十分に大きな上界とする。次に

$$(R_{a,b}f)(n) = e^{-2\pi\sqrt{-1}bn/aN} f(n/a) \quad (7)$$

とするとき (a は $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ で可逆とする)、

$$(\widehat{R_{a,b}f})(k) = \hat{f}((k-b)/a) \quad (8)$$

が成り立つ。つまり、周波数域での b シフト, a 倍拡大 (dilation) が時間域での a 倍拡大と $e^{-2\pi\sqrt{-1}bn/aN}$ による変調 (modulation) とで実現できる。この関係は RAISFA の至るところで利用される。また, ある信号 f, g に対し,

$$(f * g)(n) := \sum_{t \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} f(t)g(n-t) \quad (9)$$

を畳み込みといい, 周波数域では

$$\widehat{f\hat{g}} = \frac{\widehat{f * g}}{\sqrt{N}} \quad (10)$$

が成立する。つまり, 各周波数 k で信号 $\hat{f}(k)$ を $\hat{g}(k)$ 倍したい場合は時間域で f に g を畳み込めばよい (いわゆる, フィルタ g によるフィルタ処理)。

2.1 RAISFA の入出力関係

ここでは, RAISFA の入出力と性能について述べる。入力は, 周期 N の複素数値離散信号 $S(n)$, 任意の $B(1 \leq B \leq N)$, $\epsilon(0 < \epsilon \leq 8/9)$, 経験的に選ばれた精度に関する比率 ι , 成功確率 $1 - \delta$, 信号のエネルギーの上界 M とする。これについて Zou 達の改良版が以下の性能をもつことが示されている [2]。

定理 2.1. [2] RAISFA は $S(n)$ からランダムに選ばれた高々 $O(B \log(N) \log(1/\delta) \log M/\epsilon^2)$ 点の値をサンプリングする。走行時間はその多項式である。そして, B 個のフーリエ係数の推定値 $c_{k_b}(b = 1, \dots, B)$ と対応する周波数 $k_b(b = 1, \dots, B)$ を出力する。この時, B 項による表現 $R(n) = \sum_{b=1}^B c_{k_b} e^{2\pi\sqrt{-1}k_b n/N}$ は, 少なくとも確率 $1 - \delta$ で

$$\|S - R\|_2^2 \leq (1 + \epsilon) \|S - R_{\text{Bopt}}\|_2^2. \quad (11)$$

ここで, B 項表現 R_{Bopt} は任意の B 項表現 R' に対して $\|S - R_{\text{Bopt}}\|_2^2 \leq \|S - R'\|_2^2$ となる最適な S の B 項フーリエ表現とする。

2.2 アルゴリズムの構成

このアルゴリズムは, 大きく分けて Identification と Estimation の 2 つのステップに分かれる。Identification は, 主要周波数同定処理で原信号において大きなエネルギーを占める周波数の識別をする。このステップでは, Isolation と Group Testing の小ステップに分かれ, 周波数を識別していく。Estimation は, Identification で識別された周波数のフーリエ係数を推定する。

RAISFA アルゴリズム Main

1. R を 0 に初期化し, 繰り返し回数 $T = B \log(N) \log(1/\delta) \log M/\epsilon^2$ をセットする。

2. $\|S - R\|_2^2 \leq \iota \|R\|_2^2$ であるなら, アルゴリズムは終了。そうでないなら, ステップ 3 へ
3. [Identification ステップ] 信号 $S - R$ において, 一番大きなエネルギーを占める周波数 k_b を識別
4. [Estimation ステップ] 周波数 k_b のフーリエ係数を推定
5. $\psi_{k_b}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi\sqrt{-1}k_b n/N}$, C_{k_b} を $(\widehat{S - R})(k_b)$ の推定値とし, $R = R + C_{k_b} \psi_{k_b}$ により R を更新する
6. T 回繰り返したら, R を返す。そうでないなら, ステップ 2 へ

3. の Identification ステップ, 4. の Estimation ステップともに確率的アルゴリズムであり, 失敗する可能性がある。Identification ステップが主要周波数 k_b を求める処理に失敗した場合 (± 1 のようなわずかな誤りでも), それに対する Estimation の結果は無意味になることに注意する。

2.3 Identification

記述の単純化のため, 本節では前節の RAISFA のステップ 3 に示した信号 $S - R$ を改めて S とする。入力を $S(n)$ とし, Identification は後の (16) を考慮した $\eta > 0$ に対し

$$|\hat{S}(k)|^2 \geq \eta \|S\|_2^2 \quad (12)$$

を満足するような周波数 k の周波数リスト Z を得る。このような周波数のことをメジャーな周波数という。ここでは, “Isolation” と “Group Testing” の二つのステップを通じて, 周波数 k のリストを出力する。まず, Isolation では, 原信号を分離し, 各々が主要な成分を高々一つしかもたない信号を構成する。また, 各メジャー周波数 k_b に対し, そのエネルギーが分離信号 F_i の中で, 圧倒的になるような F_i が一つ以上存在するということが満たされる。そして, Group Testing では, Isolation で構成した各信号の中で, 圧倒的なエネルギーに対応する周波数 k_b を識別する。

2.3.1 Isolation

$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ 上の信号 F_i ($i = 0, \dots, \log(1/\delta)$) を構成する。ただし, 各 i について全 N 点を計算するのではなく, 所望の性質を持つ F_i をサンプリングするためのパラメータ算出が実際の処理である。文献 [1] と [2] で若干構成法が異なるが, ここでは [2] 版についてのべる。

フィルタ H_m を

$$H_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{2m+1} & (n = -m, \dots, m) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (13)$$

で定義する。これは、その振幅の周波数特性 $|H_m(e^{2\pi\sqrt{-1}k/N})|$ が

$$|H_m(e^{2\pi\sqrt{-1}k/N})| > \frac{2}{\pi} \quad (|k| \leq \frac{N}{2(2m+1)}) \quad (14)$$

を満たす、周波数 $|k|$ が 0 に近い成分を通過させる低域通過フィルタである。時間域において式 (13) のような等しい大きさのインパルスを持つため、Box-Car フィルタと呼ばれる。一方、 (σ_i, θ_i) ($i = 0, \dots, \log(1/\delta)$) を $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times \times \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ から一様ランダムに選ぶ $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times$ は可逆元の集合。各 i について、 $k \mapsto \sigma_i k + \theta_i$ は周波数領域上の pairwise independent permutations になる。

信号 F_i は

$$F_i = H_m * R_{\sigma_i, \theta_i} S \quad (15)$$

として構成する。式 (8) と式 (10) により、 \hat{F}_i は、 \hat{S} を σ_i, θ_i でランダムに置換したのち、式 (14) 付近の周波数成分を通過させたものになる。 m を充分大きく、

$$m \geq \frac{12.25(1-\eta)\pi^2}{\eta} \quad (16)$$

ととれば、式 (14) の通過域の幅が狭まることにより、次の性質が保証できる: [2] 式 (12) の意味でメジャーな各周波数 k_0 に対し、少くとも一つの i が存在し、 $\|F_i\|_2^2$ において $|F_i(k_0)|^2$ が圧倒的 (98%以上) となる。

2.3.2 Group Testing

Group testing は、最上位ビットを求める MSB アルゴリズムと、ノルムを推定するアルゴリズムをサブルーチンとして用い、 F_i の中で最大エネルギーを占める周波数 k_0 を特定する。これは、フィルタ処理と間引きを交互に繰り返すことによる周波数領域での 2 分探索により実現されている。

以下に示す v は、周波数 k_0 が存在する可能性がある周波数領域の中心周波数である。この中心周波数を特定することは、 k_0 の MSB を特定するのと同値であるので、 v を最上位ビットと呼ぶ事にする。

Group Testing アルゴリズム

$p = 0, F_i^{(p)} = F_i$ と初期化する。

- G1. MSB アルゴリズムにより最上位ビット v を求め、結果を v_p にストア
- G2. $2^p > N$ になれば、ステップ G5 へ
- G3. $F_i^{(p)}$ を変調し拡張したものを $F_i^{(p+1)}$ にストア
- G4. $p = p + 1$, ステップ G2 へ戻る
- G5. $v_0, \dots, v_{\log N}$ より、周波数 k を算出し、 k を出力

MSB アルゴリズム

ここでは、閾値 η を $0 < \eta < 1$ とし $j = 0, \dots, 8m+3$ とする。

- M1. $G_j(n) = (F * e^{2\pi\sqrt{-1}jn/4(2m+1)} H_m)(n)$, $j = 0, \dots, 8m+3$ とする
- M2. 各 j に対し、 G_j のノルムを後述 (2.3.3 節) のノルム推定アルゴリズムにより推定し、結果を e_j とする
- M3. e_j の最大値を e_i とする
- M4. $e_j < \eta e_i$ となる e_j をリストする
- M5. リスト中で最も長く連続した e_j の真ん中の周波数を v_s とし、この連続領域に属さないバンドの総数を c_s とする
- M6. 最上位ビット v は、 $v = ((v_s + 2(2m+1)) \bmod (4(2m+1)+1)) \frac{N}{4(2m+1)}$ とする
- M7. 拡張倍率 c は、 $c' = 4(2k+1) - c_s$ とするとき、 $c = 4(2k+1)/c'$
- M8. もし、 $c > 4(2m+1)/2$ なら $c = 2$ とする
- M9. c と v を出力

ステップ M1 で G_j を構成するフィルタは、フィルタ H_m の「通過域」式 (14) を次のバンド B_j になるように周波数領域上で回転させたものになっている。

$$B_j = \{k : \frac{j}{4(2m+1)} N < k < \frac{j+1}{4(2m+1)} N\} \quad (17)$$

ステップ M2 で各バンドのノルムが推定される (Isolation が成功している場合、98% のエネルギーをもつバンドが 1 つだけ存在する筈である)。ステップ M5 で圧倒的周波数が存在する可能性をすてる周波数領域を決め、M6 で可能性が残っているバンドの中心周波数 v がその反対側として定まる。M7 で可能性が残っているバンドを周波数域全体に広げるための倍率が算出される。Group Testing アルゴリズムのステップ G3 での変調と拡張は、式 (8) を利用し、

$$\hat{F}_i^{(p+1)}(k) = \hat{F}_i^{(p)}((k-v)/c) \quad (18)$$

が満たされるように、つまり可能性が残っている周波数領域の中心を 0 にシフトし、可能性が残っている領域が周波数領域全体に広がるように施す。

MSB 一回の呼び出しで少くとも半分の周波数の可能性が消され、 $p = \log_2 N$ 回以内の呼び出しで k_0 が求まる。例えば、全てのステップで $c = 2$ であった場合は、

$$|k_0 - (v_0 + 2^{-1}v_1 + \dots + 2^{-p}v_p + \frac{1}{2})| = 0$$

の関係により k_0 が求まる。

2.3.3 ノルム推定アルゴリズム

ここでは, Zou et al. [2] のバージョンを述べる. このアルゴリズムは, 高確率で出力について次の保証をする. 信号 S のエネルギーの 93% が単一周波数に集中しているという条件のもとで, $0.3\|S\|_2^2$ 以上の推定ノルムを返す. また, 任意の S に対し, 推定ノルムは $\|S\|_2^2$ 以下である.

- N1. $r := \lceil 12.5 \ln(1/\delta) \rceil$
- N2. 信号 S から r 回ランダムにサンプルし, それぞれを $S(i_1), S(i_2), \dots, S(i_r)$ とする. ここで, r を 5 の倍数にしておく.
- N3. r 個のサンプルの絶対値 2 乗を昇順に並べ, その 60% 番目に N を掛けた値を返す.

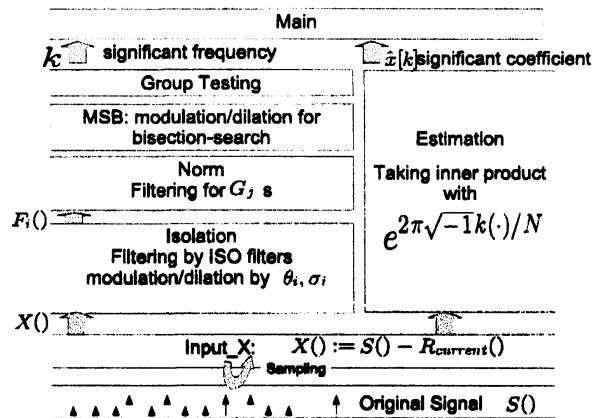


図 1: プログラム構成

3 Estimation

Estimation は, Identification により得られたリスト Z の, それぞれの周波数 k_i ($i = 0 \dots \log(1/\delta)$) に対応したフーリエ係数を出力する. 記述の単純化のため, ここでも RAISFA Main のステップ 3 に示した信号 $S - R$ を改めて S とする. 出力のフーリエ係数 $\hat{S}(k_i)$ の推定値 W_i は高確率で, $|W_i - \hat{S}(k_i)|^2 \leq \epsilon \|S\|_2^2$ を満たす.

Estimation アルゴリズム

1. 信号 $S(n)$ から一様ランダムに選ばれた n_{uv} をサンプルする. ここで, $u = 1, \dots, 2 \log(1/\delta), v = 0, \dots, 8/\epsilon^2$.
2. 各 u に対し, $\sum_v S(n_{u,v}) \Delta_{n_{u,v}}$ と ψ_{k_i} の内積をとり, $mean(u)$ にストアする. ただし, $\Delta_t(n) = 1(n = t); 0(n \neq t)$.
3. $y = median_u(mean(u))$ とし, y を返す.

4 RAISFA の一実装

4.1 環境とプログラム構成

前節までで紹介した RAISFA を実装した. 実装は, 簡潔な記述のために数式処理言語 GP を用いて行った. 実装環境は次の通りである.

Intel(R) Pentium(R) D CPU 2.66GHz

cache size : 1024 KB

Linux version 2.6.15-1.2054 FC5smp

プログラム構成を 図 1 に示す. Main からは, 左半分に書かれている Identification モジュールと右半分の Estimation モジュールを呼び出す. 最下段にある原信号 S に対しては, モジュールが算出した箇所 n について

のサンプリングアクセスが為される. Main モジュールでのステップ 5. における, 現在の B 項部分表現 R の引き取りに対応し, S の代わりに $S - R$ の値を返す $Input_x$ が直接の S に対するサンプリングである. Identification の場合は, その上に F_i を作るための第 2.3.1 節式 (15) のフィルタリング, 拡張, 変調処理を行う Isolation モジュールがある. ここで用いるフィルタを, 区別のため以後 ISO フィルタと呼ぶことにする. さらに, これら F_i の圧倒的周波数特定のために, 第 2.3.2 節で述べた Group Testing モジュール群がこれにアクセスするが, 直接 F_i をサンプルするのは, Norm 推定アルゴリズムであり, G_j の構成のために MSB アルゴリズムの M1. ステップで述べたフィルタリングと変調を行う. このフィルタを区別のため GT フィルタと呼ぶことにする. さらに, MSB モジュールは, 周波数域の探索に伴う式 (18) の拡張と変調を繰り返しつつこの Norm 推定を呼び出し, 主要周波数を特定する. 右半分の Estimation の場合は, F_i とは無関係に $S - R$ からのサンプルを用いて第 3 節の平均・メジアン処理でフーリエ係数の推定値を算出する.

この実装に基づく第 5 節で示す解析結果の走行時間は, 文献 [2] の実装によるもの (C で実装, 計算機はほぼ同等) より, 実時間にして 10^3 倍程遅いのが現状である. そのため, コーディングや環境の検討にはまだ大幅な改善の余地がある. その上で, 各種パラメータの選択の相互比較に対して, この結果は一応の目安にはなると考えられる.

4.2 フィルタについての検討

文献 [2] では, 2.3.1 節の Isolation 2.3.2 節の Group Testing でそれぞれ, 式 (13) の BoxCar フィルタを用いて処理を行っている. このフィルタは畳み込みの際に乗算が必要ないという利点がある一方で, 周波数選択性はフィルタ長 (フィルタのインパルスの数 $2m+1$) に比べて優れるとは言い難い. 本来抑止したい周波数領域に

表 1: E フィルタのフィルタ係数 $E_m(n)$

n	$E_3(n)$	n	$E_6(n)$
±3	1.050×10^{-1}	±6	2.315×10^{-2}
±2	1.298×10^{-1}	±5	3.769×10^{-2}
±1	1.700×10^{-1}	±4	6.067×10^{-2}
0	1.852×10^{-1}	±3	8.501×10^{-2}
		±2	1.066×10^{-1}
		±1	1.216×10^{-1}
		0	1.269×10^{-1}

存在する他の周波数成分の影響を通過域中の周波数成分が大きく受けてしまうという問題がある。たとえば、Isolation の処理では、式 (14) の領域の外では、振幅の周波数特性は 0 であることが理想である。

Isolation や Group Testing の処理の成功確率を実質的に上げるには、この周波数選択性の改善が有効であると予想される。フィルタ長を長くすることで、周波数選択性は改善するが、サンプリング点数や計算時間といったコストに影響する。

一方、等リプルフィルタは、限られた自由度 ($2m + 1$ 個のフィルタ係数; 対称性の条件より実質 m 個) のもとで通過域と阻止域におけるそれぞれの所望特性からの逸脱の最悪値を最小化するフィルタであり、デジタル信号処理で標準的に利用される。以後簡単のため、BoxCar フィルタを B フィルタ、等リプル (Equiripple) フィルタを E フィルタと呼ぶことにする。図 2 はそれぞれ、 $m = 3$ (フィルタ長 $2m + 1 = 7$)、 $m = 6$ (フィルタ長 $2m + 1 = 13$) のときの B フィルタ、E フィルタの振幅の周波数特性を表している。横軸は正規化された周波数 k/N で縦軸は各周波数点における処理対象信号への倍率である。式 (14) に対応した通過域に目印のためのノッチを施してある。E フィルタは同一長さの B フィルタより、通過域付近の特性がやや緩やかである一方で、阻止域での欠点 (0 からのへだたり) が少ない。なお、E フィルタのインパルスを $E_m(n)$ で表わすとき、 $E_3(n)$ 、 $E_6(n)$ は表 1 の通りのものを用いている (表中にない n についてはゼロ)。この係数は、サイト [4] のツールを利用し、周波数特性が所望の形に近づくよう、与えるパラメータいくつか試した結果を採用している。

本稿では、Identification の処理で利用している B フィルタの E フィルタへの変更を提案する。次節の数値実験において、ある条件のもとでの E フィルタの優位性を示す。

5 数値実験

本節では実装したプログラムによる数値実験結果について述べる。入力信号は、一般に

$$S(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=1}^B \frac{1}{\sqrt{B}} e^{2\pi\sqrt{-1}k_b n} + \text{noise}$$

表 2: B フィルタと E フィルタの比較

ISO フィルタ	GT フィルタ	実行時間 (sec)	成功確率 (%)
B フィルタ	B フィルタ	817	86
B フィルタ	E フィルタ	818	68
E フィルタ	B フィルタ	822	78
E フィルタ	E フィルタ	826	94

の形式、即ち、B 項の等しいエネルギーをもつ「純音」にノイズを加えた形式で与えた。実験項目により項数は異なるが、B 項のエネルギーの総和は常に 1 とする。これに GP の rand 関数を用いて発生した白色ノイズを加えるが、どれだけのノイズを加えるかは、

$$SNR[\text{dB}] = 10 \log_{10} \frac{\|B \text{ 項の成分} \|_2^2}{\|\text{noise}\|_2^2}$$

で指定する。例えば $SNR = 3[\text{dB}]$ の場合は B 項のエネルギー和がノイズのエネルギーの約 2 倍、 $SNR = -3[\text{dB}]$ は逆にノイズが B 項の約 2 倍のエネルギーを持っていることを意味する。プログラムパラメータは失敗確率の上限 δ 、誤差 ϵ 、が最も重要であるが、本稿の数値実験を通じて、 $\delta = 2^{-7}$ 、 $\epsilon = 0.1$ にとる。Isolation で信号が分割される個数は $\log(1/\delta)$ で決まる。この他、メジャー周波数のエネルギー比の下限を定義する式 (12) の η 、ISO・GT フィルタの長さを定める m がある。 m によりこれらのフィルタ長が $2m + 1$ と定まり、同時に Group Testing におけるバンド分割数が $8m + 4$ と決まる。 m は本来式 (16) を η に対して満たす必要があるが、 $\eta = 0.9$ のような緩い条件の下でも $m > 13$ となる。ここでは各種パラメータの優劣を Identification の実験的成功確率で評価するため、意図的に本来の推奨値よりも小さく、 $m = 3$ あるいは $m = 6$ のようにとった。第 2.3.3 節のノルム推定アルゴリズムにおけるサンプル数 $r = 12.5 \ln(1/\delta)$ も、本来のものより小さい $r = 5$ としている。Estimation ステップに関する設定として、内積をとる際のサンプル数が $8/\epsilon = 800$ 、median をとる個数が $2 \log(1/\delta) = 14$ と定まる。

5.1 B フィルタ対 E フィルタ

第 4.2 節において B フィルタと E フィルタの振幅の周波数特性を比較した。全体としては周波数選択性で E フィルタが勝っている。Identification での ISO フィルタ、GT フィルタをそれぞれ B フィルタ、E フィルタとした場合の性能比較を行った。信号点数 $N = 10^{10}$ 、主要項の数 $B = 2$ 、 $SNR = 4[\text{dB}]$ 、 $\eta = 0.9$ 、 $m = 3$ 、のもとで 50 回の試行を行い、正しく 2 個の主要周波数を同定できた回数を成功としてカウントした。各フィルタの組合せに対する 1 試行の平均の実行時間と成功確率を表 2 に示す。結果として ISO、GT の両方に E フィルタを用いた場合の成功確率ももっとも高く、両方を B フィルタにした場合に比較して実行時間の犠牲は僅か

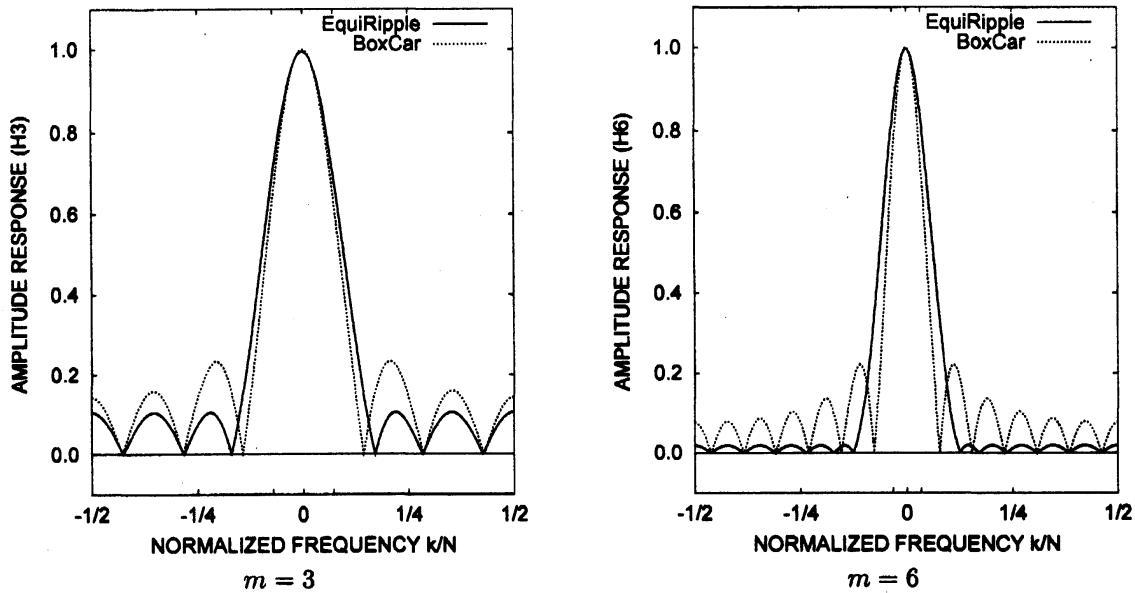


図 2: B フィルタと E フィルタの振幅の周波数特性 ($m = 3, 6$)

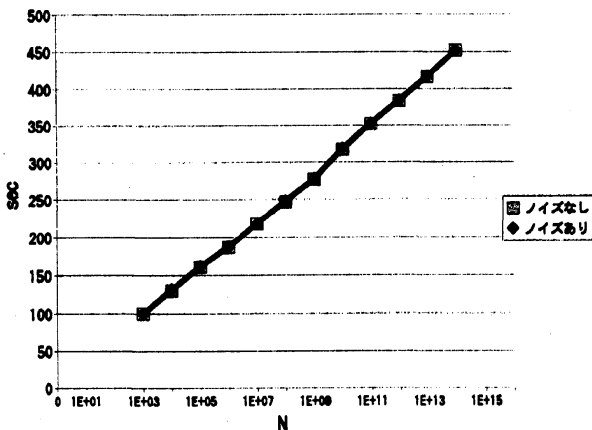


図 3: 信号長対実行時間

である。この結果より、成功確率の保障のために m をより大きい値に設定する場合、E フィルタは B フィルタよりも短いフィルタ長で同等の成功確率を達成することが期待される。以降の実験は全て E フィルタを用いる。

5.2 信号長に対する実行時間の変化

信号点数を 10^3 から 10^{14} まで 10 倍きざみで変化させた時の実行時間の変化を図 3. に示す。ここで各実行は主要項数でノイズあり ($SNR = 4[\text{dB}]$)、ノイズなしの両方の条件で行われている。ここでも $\eta = 0.9, m = 3$

である。実行時間はそれぞれ 10 回の試行の平均であるが、どの試行も主要周波数を失敗せずに特定している。図 3. をみる限り実行時間はほぼ $\log N$ に比例しており、RAISFA が巨大な信号に対して大変効率のよいアルゴリズムであることを物語っている。 $N = 10^{14}$ 程度になると全点のフーリエ係数を評価して上位を残すタイプのアルゴリズムは記憶容量の面から実行が困難であることに注意する。また $SNR = 4[\text{dB}]$ 程度のノイズには実行時間がほとんど影響を受けない。

5.3 ノイズレベルに対する成功確率と実行時間の変化

$\eta = 0.9, m = 3, B = 1$ をそのままとし、信号点数 N と SNR を変化させて成功確率と実行時間を評価した結果を表 3 に示す (100 試行)。実行時間はほとんどノイズレベルの影響を受けないが、ノイズレベルの増大と共に成功確率が減少していくのが読み取れる。 η, m といったパラメータが理論上の値よりも大幅に軽量側 (危険側) に設定されていることが原因と考えられる。 $SNR = -12[\text{dB}]$ では $N = 10^4$ の場合で 44%, $N = 10^{10}$ の場合で 24% が成功したのみである。

5.4 m の増加 vs F_i の増加

前項で述べた $SNR = -12[\text{dB}]$ における、 $N = 10^4, N = 10^{10}$ それぞれを基準として、成功確率を向上させるために m を増加させること、一様ランダムに

表 3: ノイズレベルに対する成功確率と実行時間

信号長 N	SNR (dB)	成功確率 (%)	実行時間 (sec)
10^4	8	100	131 ± 0.5
	4	97	
	0	92	
	-4	83	
	-8	58	
	-12	44	
10^6	8	99	188 ± 0.7
	4	98	
	0	82	
	-4	79	
	-8	45	
	-12	36	
10^8	8	100	249 ± 0.7
	4	94	
	0	79	
	-4	76	
	-8	54	
	-12	34	
10^{10}	8	100	319 ± 0.8
	4	92	
	0	88	
	-4	71	
	-8	57	
	-12	24	

選ぶ(σ_i, θ_i)を増やし、 F_i を増やすことのどちらが効果があるかを調査した。結果を表4に示す。おのおの100試行行っている。 $N = 10^4$ では F_i の増加が成功確率と処理量の両面で有利であるかに思えるが、 $N = 10^{10}$ では成功確率が拮抗しており、何がボトルネックであるかのより深い調査が必要である。

5.5 主要周波数の個数とノイズレベルの変化に対する成功確率

項数 B を1, 2, 4と変化させ、またノイズレベルを8[dB]から0[dB]の範囲で変化させ、100試行における成功確率(B 個の周波数をすべて正しく同定する確率)を調査した結果を表5に示す。再び、 $\eta = 0.9, m = 3$ で実行している。 $B = 4$ 以上に対して満足な結果を得るためにどのように η, m 等を設定すべきかより詳しく調べる必要がある。

5.6 Estimation

これまでに行ってきた実験はIdentificationの評価に関するものが中心であるが、Estimationについて簡単に触れる。表6は $\epsilon = 0.1$ の設定で、各ノイズレベルに対するフーリエ係数エネルギー推定の誤差率と実行時間を比較したものである。ただし、第3節で述べた平均とmedianを組み合わせた方法($\text{median}(\text{mean}())$)のほか、より単純に全部サンプルの平均をとる方法($\text{mean}(\text{mean}())$)を行って比較した。実行時間は一つの周波数に対するものである。

この結果からまずわかることは、Estimationの実行時間が総走行時間に占める割合が小さいということである。誤差率はノイズレベルに若干の影響を受けている。この例だけからは、 $\text{median}(\text{mean}())$ と $\text{mean}(\text{mean}())$ の違いは説明できない。

6 まとめと今後の課題

疎フーリエ表現アルゴリズム RAISFA [2] を言語 GP [3] を用いて実装し、周波数同定の成功確率、フーリエ係数推定値の精度、走行時間と各種条件の関係を調査した。特に、Identification処理で使用するISOフィルタとGTフィルタを、オリジナルのBoxCarフィルタよりも周波数選択性に優れる等リプルフィルタに変更することで、Identification処理の成功確率をわずかな処理時間増加のもとで達成できるという見通しを得た。

今後の課題として、実装の高速化、より実用域に近い領域でのパラメータ調整などの一般的な事柄が挙げられるのは無論だが、より効率のよい B 項表現更新方法を検討したい。第2.2節で述べたMainルーチンにおける B 項表現更新ステップは、最大エネルギーをもつ周波数についてのみ考慮しており、(潜在的に有力かもしれない)2番手以下の周波数に関する情報を活用していないように思える。直感的には、2番手以下の周波数についても何か考慮することで早く正確な B 項表現が求まるように見えるが、最悪ケースにおいてこのようなことが許されるかを考える必要がある。

参考文献

- [1] A.C. Gilbert, S. Guha, P. Indyk, S. Muthukrishnan and M. Strauss, "Near-Optimal Sparse Fourier Representations via Sampling," *In proceedings of the 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pp. 152-161, May 2002.
- [2] Jing Zou, Anna Gilbert, Martin Strauss and Ingrid Daubechies, "Theoretical and experimental analysis of a randomized algorithm for Sparse Fourier transform analysis," *Journal of Computational Physics*, 211, pp. 572-595, 2006.
- [3] PARI/GP: Available at <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>
- [4] 山田洋士, *Digital Filter Design Services*, Available at <http://momiji.i.ishikawa-nct.ac.jp/>
- [5] 八木谷 允, 武井 由智, "フーリエ表現要約サンプリングアルゴリズムの評価および拡張," 2007年夏のLAシンポジウム, S5, pp. S5-1 - S5-11, July 2007.

表 4: F_i の増加 vs m の増加

	信号長 N	フィル タ長	F_i の数	サンプリ ング点数	実行時間 (sec)	成功確率 (%)
基準値	10^4	7	7	16800	131.18	44
F_i を倍増		7	14	31500	246.22	72
m を倍増		13	7	30240	732.50	46
基準値	10^{10}	7	7	40800	319.21	24
F_i を倍増		7	14	76500	597.89	42
m を倍増		13	7	73440	1869.72	41

表 5: B とノイズレベルに対する成功確率

信号長 N	B	SNR (dB)	成功確率 (%)
10^{10}	1	8	99
		4	92
		0	89
	2	8	95
		4	92
		0	77
	4	8	80
		4	50
		0	32

表 6: Estimation の精度

	誤差率 (%)(ノイズなし)	実行時間 (sec)	誤差率 (%)(8dB)	実行時間 (sec)	誤差率 (%)(-8dB)	実行時間 (sec)
median(mean(i))	4.06	3.66	4.21	3.67	6.09	3.68
mean(mean(i))	3.86	3.65	4.11	3.60	6.01	3.66