

## Basuの推定量とその周辺

関東学院大経済 布能英一郎 (Eiichiro Funo)

### §0. はじめに

本稿は有限母集団サンプリングにおいて、Basu(1971)によって提唱された推定量、および、これに関連した種々の推定量の導出を紹介し、これらが、ある種の条件の下で自乗損失関数に関して許容的であることを示す。また、本稿で扱う種々の推定量のうちのベイズ的でない推定量に対し、Polya pseudo posterior法を用いると、ベイズ的な扱いも出来る。この事についても述べる。

### §1. 有限母集団サンプリングにおける Basu の推定量

有限母集団  $U$  の総数を  $N$  とし、ユニット  $i (1 \leq i \leq N)$  における観測値を  $y_i$  とする。ここでベクトル  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  を未知母数とし、 $y \in \mathbb{R}^N = \Theta$  であると考え、 $\{1, 2, \dots, N\}$  の部分集合  $s$  をサンプルと呼び、 $n(s)$  をサンプル  $s$  の標本数とする。

与えられた  $y \in \Theta$  と  $s = \{i_1, i_2, \dots, i_{n(s)}\}$  但し  $1 \leq i_1 < \dots < i_{n(s)}$  に対し、 $y(s) = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{n(s)}})$  とおく。

ここで推定したい量は  $\sum_{i=1}^N y_i$  であるとする。Basu(1971)は次のような推定量を提案した。

$$e(y, s) = \sum_{i \in s} y_i + \sum_{j \notin s} [(1/n(s)) \sum_{i \in s} \{(y_i)/(m_i)\}] m_j$$

ここで、 $(m_1, m_2, \dots, m_N)$  は  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$  の guess.

これを Basu の推定量という。

以後、一般性を失うことなく、 $i_1$ を1,  $i_2$ を2, ...,  $i_n$ をnとする indexのつけ替えを行って、 $s = \{1, 2, \dots, n\}$  としてよい。また、記号の簡略化のため、

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2}{N}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}$$

とおく。

## §2. 他の推定量 :

$$2.1.: \quad t_0 = \sum_{i \in s} y_i + (N-n)\bar{y}, \quad t_\infty = \sum_{i \in s} y_i + \sum_{j \notin s} m_j$$

ここで、 $t_\infty$ を求めるのに、 $(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_N)$ の guessである  $(m_{n+1}, m_{n+2}, \dots, m_N)$ すべてが与えられる必要はなく、

$\sum_{i=n+1}^N y_i / (N-n)$ の guess  $\mu_*$ が与えられていれば十分である。

さて、 $t_0, t_\infty$  および  $e(y, s)$  の具体的意味を次の例で与えてみよう。

某国には  $N$ 人の国民がいて、各国民の所得を  $y_i$ とする。 $y_i$ は税務署から見れば未知の値である。さて、各国民の申告所得額  $m_i$ をもって  $y_i$ を推定してもよいかも知れないが、申告所得額は必ずしも信用できない。そこで税務署は「所得調査」を行なうのだが、国民全員の所得調査をすることは、膨大な

時間・労力・費用がかかるので不可能である。そこで税務署は  $n$  人に対して所得調査を実施した。所得調査された人々の index を  $i=1, 2, \dots, n$  とすると、税務署は所得調査によって  $y_1, y_2, \dots, y_n$  を知ることができたのである。

このような状況で、所得調査できなかつた国民の index を  $j=n+1, n+2, \dots, N$  とすると、未知の所得  $y_j$  に関して、推定量  $t_\infty, t_0, e(y, s)$  は、それぞれ次の様に行っていると言える。

- Ⓐ  $t_\infty$  では、申告所得  $m_j$  を信用して  $y_j$  を  $m_j$  で推定した。
- Ⓑ  $t_0$  では、申告所得  $m_j$  を全く信用せず、 $y_j$  を  $\bar{y}$ , すなわち所得調査で知り得た  $y_1, y_2, \dots, y_n$  の平均で推定した。
- Ⓒ Basu の推定量では、所得調査を行った  $i=1, 2, \dots, n$  に対し真の所得  $y_i$  と申告所得  $m_i$  との「ごまかし比」  $y_i/m_i$  を得ているので、所得調査を受けなかつた人には、申告所得に「ごまかし比の平均」を乗じて推定した。

### 2.2.: 更に別の推定量

$0 < M < +\infty$  なる定数  $M$  を 1 つ選んでおいて

$$t_M = \sum_{i=1}^n y_i + (N-n) \left( \frac{M}{M+n} \mu_* + \frac{n}{M+n} \bar{y} \right)$$

なる推定量を考える。推定量  $t_M$  は  $\mu_*$  と  $\bar{y}$  の convex combination であるが、Ericson (1969) は次のような意味づけを与えている。

$P$  を平均が  $\mu_*$  であるような任意の分布とする。この時、

$$y_1 \sim P$$

と仮定し、更に帰納的に  $i=2, 3, \dots$  に対し、

$$y_{i+1} \mid y_1, y_2, \dots, y_i \sim \frac{M}{M+i} P + \frac{i}{M+i} E_i$$

と仮定する。但し、 $E_i$  は  $y_1, y_2, \dots, y_i$  の empirical distribution である。そうすると、

$$\begin{aligned} E\{y_{i+1} \mid y_1, y_2, \dots, y_i\} &= \frac{M}{M+i} \int y dP + \frac{i}{M+i} \int y dE_i \\ &= \frac{M}{M+i} \mu_* + \frac{i}{M+i} \cdot \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i y_j \end{aligned}$$

を得る。よって、特に  $j > n$  に対し、

$$E\{y_j \mid y_1, y_2, \dots, y_n\} = \frac{M}{M+n} \mu_* + \frac{n}{M+n} \bar{y}$$

であるから、

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{i=1}^N y_i \mid y_1, y_2, \dots, y_n \right) &= \sum_{i=1}^n y_i + (N-n) E\{y_j \mid y_1, y_2, \dots, y_n\} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i + (N-n) \left( \frac{M}{M+n} \mu_* + \frac{n}{M+n} \bar{y} \right) = t_M \end{aligned}$$

を得る。

2.3.: これと同様な考え方で、

$$E(\sigma^2 \mid y_1, y_2, \dots, y_n) = E \left[ \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \mu)^2}{N} \mid y_1, y_2, \dots, y_n \right]$$

を求めてみよう。分布  $P$  の分散を  $\sigma_*^2$  と置く。  $j, k > n$ ,  $j \neq k$  に

$$E(y_j^2 \mid y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{M}{M+n} (\sigma_*^2 + \mu_*^2) + \frac{1}{M+n} \sum_{i=1}^n y_i^2$$

$$E(y_j y_k | y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{(n\bar{y} + M\mu_*)^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + M(\sigma_*^2 + \mu_*^2)}{(M+n)(M+n+1)}$$

が計算によって示されるので、後は単なる代数計算で

$$E(\sigma^2 | y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{n(N+M)(NM+Nn+n)}{N^2(M+n)(M+n+1)} s^2 \\ + \frac{(N-n)M(NM+Nn-M)}{N^2(M+n)(M+n+1)} \sigma_*^2 + \frac{(N-n)nM(N+M)}{N^2(M+n)(M+n+1)} (\bar{y} - \mu_*)^2$$

が導ける。  $v_M = E(\sigma^2 | y_1, y_2, \dots, y_n)$  と置くと、

$$\lim_{M \rightarrow 0} v_M = \frac{n(N+1)}{(n+1)N} s^2 \equiv v_0,$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} v_M = \frac{n}{N} s^2 + \frac{n(N-n)}{N^2} (\bar{y} - \mu_*)^2 + \frac{(N-n)(N-1)}{N^2} \sigma_*^2 \equiv v_\infty$$

が得られる。

2.4.: Basuの推定量  $e(y, s)$  を  $B_0$  と書き直す。すなわち、

$$B_0 = \sum_{i=1}^n y_i + \left( \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{m_i} \right) \sum_{j=n+1}^N m_j$$

として、先程  $t_M$  を構成したのと同様の操作を行ってみる。つまり、

$$B_M = \sum_{i=1}^n y_i + \left( \frac{M}{M+n} \xi_* + \frac{n}{M+n} \bar{\xi} \right) \sum_{j=n+1}^N m_j$$

なる推定量を作る。なお、ここで  $\xi_i = y_i / m_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ),

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^n \xi_i / n \text{ であり、 } \xi_* \text{ は } \sum_{i=n+1}^N \xi_i / (N-n) \text{ の guess である。}$$

そうすると、

$$\lim_{M \rightarrow \infty} B_M = B_0, \quad \lim_{M \rightarrow \infty} B_M = \sum_{i=1}^n y_i + \xi_* \sum_{j=n+1}^N m_j \equiv B_\infty$$

を得る。

### 2.5.:

Basu の推定量では、ratio  $\xi_i = y_i/m_i$  を用いたが、difference  $d_i = y_i - m_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) を用いることもできる。 $\bar{d}$  を  $d_1, \dots, d_n$  の算術平均, i.e.,  $\bar{d} = \sum_{i=1}^n d_i/n$ ,  $d_*$  を  $\sum_{i=n+1}^N d_i/(N-n)$

の guess とすると、

$$B'_0 = \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{j=n+1}^N m_j + (N-n)\bar{d}$$

$$B'_M = \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{j=n+1}^N m_j + (N-n) \left( \frac{M}{M+n} d_* + \frac{n}{M+n} \bar{d} \right)$$

$$B'_\infty = \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{j=n+1}^N m_j + (N-n) d_*$$

が得られる。

### \$3. 推定量の自乗損失下での許容性

この節では、\$1, \$2 で導出した推定量のうち、 $t_M, t_\infty, t_0, B_M, B_\infty, B_0, B'_M, B'_\infty, B'_0$  の自乗損失下での許容性を調べる。

#### 定理

条件1:  $y_1, y_2, \dots, y_N$  の値は  $r$  個の有限な値  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_r$  しか取らない。

条件2:  $\alpha_1 \leq \mu_* \leq \alpha_r, \quad \alpha_1 - \alpha_r \leq d_* \leq \alpha_r - \alpha_1,$

$$\min_{i,j} \{ \alpha_i / m_j \} \leq \xi_* \leq \max_{i,j} \{ \alpha_i / m_j \}$$

を仮定する。また、推定量  $B_0, B_M$  を考える際には  $y_i/m_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) が well-defined であるために  $m_i \neq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を当然のこととして仮定するが、 $B_0$  の場合には、更に強く、すべての  $i=1, 2, \dots, N$  に対し、 $m_i \neq 0$  を仮定する。

そうすると、推定量  $t_M, t_\omega, t_0, B_M, B_\omega, B_0, B'_M, B'_\omega, B'_0$  はすべて自乗損失下で許容的である。

Remark 1. 条件1を Hartley and Rao (1968, 1969) は scale load situation と呼んでいる。

Remark 2. 条件2は guess  $\mu_*$  が  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  の最大値を越えたり、最小値を下回ったりする事は無いという、ごく自然な仮定である。guess  $d_*, \xi_*$  についての条件も同様である。Basuの推定量  $B_0$  の許容性を、まず証明する。

$m_j$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) は既知ゆえ、未知ベクトル  $(y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_N)$  の推定問題は  $(\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots, \xi_N)$  の推定問題となる。

§2.2. で行ったように、 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  の empirical distribution を  $E_n$  とし、各  $j=n+1, n+2, \dots, N$  に対し

$$\xi_j \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \sim \text{i.i.d. } E_n \quad (*)$$

を仮定すると、 $E[\xi_j \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] = \xi$  ゆえ、

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{i=1}^N y_i \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \right] &= \sum_{i=1}^N E \left[ \xi_i \mid \xi_1, \dots, \xi_n \right] m_i \\ &= \sum_{i=1}^n \xi_i m_i + \sum_{j=n+1}^N E[\xi_j \mid \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n] m_j \end{aligned}$$

$= \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{j=n+1}^N \xi_j m_j = B_0$  を得る。このことから、 $\sum_{i=1}^N y_i$  の許容的推定量を考察することは (\*) における  $E_n$  の mean  $\xi$  の許容的推定量を考察することに帰着する。 $j=n+1, \dots, N$  に対し、 $Z_j = \xi_j \mid \xi_1, \dots, \xi_n$  なる記号を導入する。 $y_j$  は  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  の値しか取らないとの仮定より、 $Z_j$  は有限個の値  $\beta_1, \dots, \beta_k$  しか取らない。 $\beta_1$  を取る確率を  $\theta_1$ ,  $\beta_2$  をとる確率を  $\theta_2, \dots, \beta_k$  を取る確率を  $\theta_k$  とすると、 $\xi = \sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} \theta_{\ell}$  である。

さて、 $\theta_i$  を次のように推定できる： $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  は既知ゆえこの  $n$  個の標本の中で  $\beta_1$  の値を取るものが  $x_1$  個、 $\beta_2$  の値を取るものが  $x_2$  個、 $\dots, \beta_k$  の値を取るものが  $x_k$  個とすると、

$$(X_1, X_2, \dots, X_k)' \sim \text{Multinomial}(n, (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)')$$

である。ここで  $\theta_{\ell}$  の推定量  $x_{\ell}/n$  は自乗損失下で許容的。

そして、 $\sum_{\ell=1}^k x_{\ell} = n$ ,  $\sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} x_{\ell} = \sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{i=1}^n (y_i/m_i)$  であるから

$\xi = \sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} \theta_{\ell}$  の推定量  $\sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} x_{\ell}/n = (1/n) \sum_{i=1}^n (y_i/m_i)$  は自乗

損失下で許容的。以上で Basu の推定量が許容的であることが示せた。

推定量  $B_{\omega}$  は、事前分布  $T = (T_1, T_2, \dots, T_k)$  such that

$$E[(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) (T_1, T_2, \dots, T_k)'] = \xi.$$



に関する Bayes 解であるから、許容性は直観的には明らかである。ただ、 $T \sim \text{Multivariate Beta}(a_1, a_2, \dots, a_k)$  such that

$$\sum_{\ell=1}^k \beta_{\ell} a_{\ell} / \{a_1 + a_2 + \dots + a_k\} = \xi_*$$

に選べる保証は無い。たとえば、 $\xi_* = \beta_1$  ならば、 $a_1$  以外はすべて 0 にしなくてはならない。このようなときには、事前分布を  $\theta_1$  に確率 1 を入れるようなものを選ぶ必要がある。よって、数学的に厳密に証明するには、Multivariate Beta に事前分布を選べる場合と、特定の  $\theta_i$  には zero probability を入れるような事前分布の場合にわかれるが、いずれの場合も  $\theta_i$  の推定量  $a_i / (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$  は自乗損失下で許容的。以後の議論は  $B_0$  の場合に同じ。

推定量  $B_M$  についても  $B_0$  と  $B_{\infty}$  の convex combination ゆえ、適当な事前分布を選んで、この Bayes 解として  $B_M$  が求まる。但し、 $B_M$  の事前分布を Multivariate Beta に選ばない事もあるが、その際の処理は  $B_{\infty}$  の場合に同じ。

推定量  $t_0, t_M, t_{\infty}$  は  $B_0, B_M, B_{\infty}$  の特殊な場合、すなわち、

$$m_{n+2} = 1, \dots, m_N = 1, \xi_{n+1} = y_{n+1}, \xi_{n+2} = y_{n+2}, \dots, \xi_N = y_N$$

とした場合と見做せば、自明である。

推定量  $B'_0, B'_M, B'_{\infty}$  の場合も同様にして出来る。

#### \$4. Polya posterior 法による pseudo posterior distribution の構成

4.1.:  $n$ 個の標本  $y_1, y_2, \dots, y_n$  の値が、 $r$ 個の異なった値  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  ( $r \leq n$ ) のいずれかであって、更に  $n$ 個の標本のうち  $\alpha_j$  の値を取るものが  $k_j$  個あったとする。

このとき、次のようにして pseudo posterior distribution を構成する。

壺  $U$  の中には  $n$ 個のボールがあり、そして各ボールには  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  ( $r \leq n$ ) のいずれかのラベルが貼られているものとする。ラベルが同一なボールは同一のものとする。そして各  $i=1, 2, \dots, r$  に対し、ラベル  $\alpha_i$  のボールが  $k_i$  個存在するとする。この壺  $U$  より

- ① random に 1 つのボールを壺  $U$  より取り出す。この取り出したボールのラベルを  $y_{n+1}$  の値とする。
- ② ① で取り出したボールと、更にこのボールと同一のラベルを持つ別のボール合計 2 個を、壺  $U$  の中に入れる。よってこの時点で、壺  $U$  には  $n+1$  個のボールがある。
- ③ ② の状態の壺  $U$  から random に 1 つのボールを取り出す。この取り出したボールのラベルを  $y_{n+2}$  の値とする。
- ④ ③ で取り出したボールと、更にこのボールと同一のラベルを持つ別のボール合計 2 個を、壺  $U$  の中に入れる。よって、この時点で、壺  $U$  には  $n+2$  個のボールがある。

この操作を繰り返して、 $y_{n+3}, y_{n+4}, \dots, y_N$  の値を得る。

4.2.: Polya posterior 法を用いると、任意の  $j=n+1, n+2, \dots, N$  に対して、

$$E(y_j | y_1, y_2, \dots, y_n) = \bar{y}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{\ell=1}^N y_{\ell} | y_1, y_2, \dots, y_n\right) &= \sum_{i=1}^n y_i + (N-n)E[y_j | y_1, y_2, \dots, y_n] \\ &= n\bar{y} + (N-n)\bar{y} = N\bar{y} \end{aligned}$$

を得る。

4.3.: Polya posterior 法を Basu の推定量に用いることもできる。この際は  $\xi_i = y_i / m_i$  に対し、4.1. で行った操作をすればよい。

4.4.: Basu の推定量は  $m_1, m_2, \dots, m_N$  が、与えられた定数と思えば non-Bayes 推定量である。しかしながら、上記のようにして壺からボールを random に取り出す操作で posterior が求まったと思えば、「Bayes 的」と見ることができる。

#### References

- Basu, D. (1969). Role of sufficiency and likelihood principles in sample survey theory. Sankhya, A 31, 441-454.
- Basu, D. (1971). An essay on the logical foundations of survey sampling, part one. Foundations of Statistical Inference, edited by V.P. Godambe and D.A. Sprott. Holt, Rinehart and Winston, Toronto.
- Chaudhuri, A. (1978). On estimating the variance of a finite population. Metrika, 25, 65-76.
- Ericson, W.A. (1969). Subjective Bayesian models in sampling finite population (with discussion). J. Roy. Statist. Soc., Ser. B 31, 195-233.
- Ericson, W.A. (1970). On a class of uniformly admissible estimators of a finite population total. Ann. Math. Statist., 41, 1369-1372.

- Godambe, V.P. (1966). Bayes and empirical Bayes estimation in sampling finite population (Abstract). Ann. Mat. Statst., 37, 552.
- Godambe, V.P. (1969). Admisibility and Bayes estimation in sampling finite populations V. Ann. Math. Statist., 40, 672-676.
- Hartley, H.O. and Rao, J.N.K. (1968). A new estimation theory for sample survays. Biometrika, 55, 547-557
- Hartley, H.O. and Rao, J.N.K. (1969). A new estimation theory for sample survays II. New Developments in Survey Sampling, edited by N.L. Johnson and H. Smith. Wiley, New York.
- Joshi, V.M. (1965). Admisibility and Bayes estimation in sampling finite populationc II and III. Ann. Math. Statist., 36, 1723-1742.
- Meeden, G. and Ghosh, M. (1983). Choosing between experiments: Applications to finite population sampling. Ann. Statist., 11, 296-305.
- Meeden, G. Ghosh, M. and Vardeman, S. (1985). Some admissible nonparametric and related finite population sampling estimators. Ann. Statist., 13, 811-817.
- Scott, A.J. (1975). On admissibility and uniform admissibility in finite population sampling. Ann. Statist., 3, 489-491.
- Vardeman, S. and Meeden, G. (1983). Admissible estimators in finite population sampling employing various types of prior information. J. Statist. Planning Inf., 7, 329-341.
- Vardeman, S. and Meeden, G. (1984). Admissible estimators for the total of a stratified population that employ prior information. Ann. Statist., 12, 675-684.