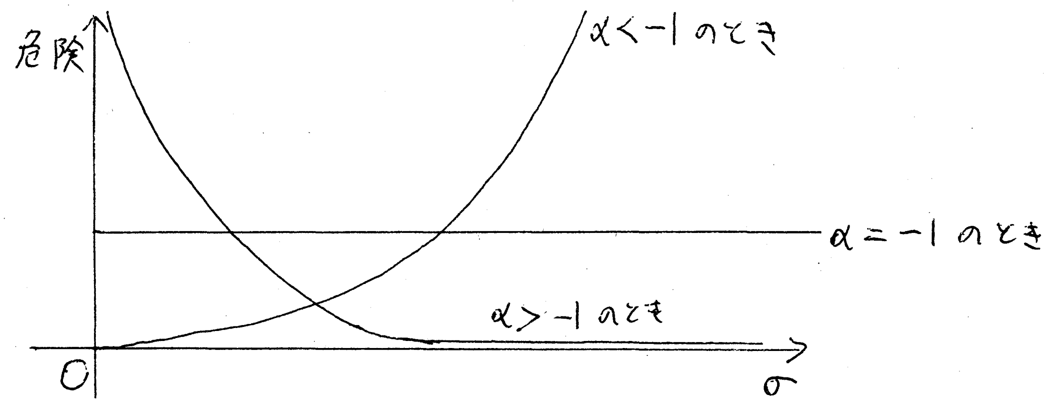
数理解析研究所講究録
749巻 1991年 32-60

尺度共変な一般Bayes解に関する奇妙な性質

筑波大 数学 佐藤道一 (Michikazu Sato)

§0 はじめに

尺度母数σの推定問題を考えよう。適当な条件の下で、次のことがいえる。通常は事前測度として$\sigma^{-1}d\sigma$を用い、これに関する一般Bayes解は共変な決定函数全体の中で最良になる。それでは一般に事前測度として$\sigma^{\alpha}d\sigma$を用いればどうなるであろうか。直感的に考えれば、この場合の一般Bayes解の危険函数は下のグラフのようになると予想されよう。



しかし、そうはならず、一般Bayes解はやはり共変になる。(つまり、「物理的におかしくない形の式になる」と言って

よい。）ところが、$\alpha\neq -1$ のとき、共変な決定函数全体の中ですら許容的ではなくなる。（なお、共変な決定函数全体の中で最良なものが、共変という枠を取りはずしてしまえば許容的でなくなる例は、既にStein等によって数多く得られている。［文献1）第6章］）このことは、「XXという方法を用いて得られる推定量はいかにももっともらしい形の式になる。だからその推定量を用いる。」といった考え方に対して警鐘を与えるものである。

§1　準備1（Υ決定函数と一般Bayes解）

完全加法族については一々明示しないがBorel集合族とする。

以下、次の(i)を仮定する。

(i)　母数空間 $\Omega\neq\phi$ は集合で、標本空間 $\mathcal{X}$ 上の確率分布族 $\mathcal{P}=\{P_\theta:\theta\in\Omega\}$ が与えられていて、$\mathcal{P}$ はある σ 有限測度 μ に関して絶対連続で、$\mathcal{X}\times\Omega$ 上の可測函数 p があって $p(\cdot,\theta)$ は $\frac{dP_\theta}{d\mu}$ の1つである。

このとき、$0\leq p(x,\theta)<\infty$ $\forall x\in\mathcal{X}$, $\forall\theta\in\Omega$ としてよい。

$[\lambda]:=\{t\lambda:\ 0<t<\infty\}$（$\lambda$は測度）

$\Gamma:=\{\Pi:\ \Pi$ はΩ上の確率測度$\}$

$$\Upsilon := \{[\Pi] : \Pi \text{は}\Omega\text{上の}\sigma\text{有限測度}\}$$

とする。写像$\Gamma \to \Upsilon$, $\Pi \mapsto [\Pi]$によって$\Gamma \subset \Upsilon$とみなす。

$[\Pi] \in \Upsilon$が与えられたとし、これを<u>事前測度族</u>と呼ぶ。(ここでこの事前測度族にどんな「意味」があるのか、あるいは単なる数学的道具なのか、といった哲学的問題にはここでは立ち入らないことにする。)便宜上、$[\Pi]$の代表元Πを<u>事前測度</u>と呼ぶ。そこで、

$$q(x) := \int_\Omega p(x, \theta)\Pi(d\theta), \qquad Q(dx) := q(x)\mu(dx)$$

とする。(Qはσ有限とは限らない。)$[Q]$は$\mathcal{P}$の表示(つまり$P_\theta(dx) = p(x, \theta)\mu(dx)$となる$\mathcal{X}$上の$\sigma$有限測度$\mu$と$\mathcal{X} \times \Omega$上の可測函数$p$のとり方)及び$[\Pi]$の代表元$\Pi$のとり方には依存しない。そこで、

$$\Pi^\infty(L|x) := \int_L p(x, \theta)\Pi(d\theta) \qquad (L \subset \Omega, \text{可測})$$

によって各$x \in \mathcal{X}$に対してΩ上のσ有限測度$\Pi^\infty(\cdot|x)$を定める。そこで、$[\Pi^\infty(\cdot|x)]$を$x \in \mathcal{X}$が与えられたときの<u>事後測度族</u>と呼ぶ。特に$[\Pi^\infty(\cdot|x)] \in \Gamma$の場合には、(通常はこの場合を考える。[文献2) p. 79] しかし、そうであれば問題がなくなるというわけではない。)$\Pi(\cdot|x) = [\Pi^\infty(\cdot|x)]$とし、$\Pi(\cdot|x)$を<u>事後分布</u>と呼ぶ。特に$\Pi = [\Pi] \in \Gamma$であれば、(このとき$\Pi$を<u>事前分布</u>と呼ぶ。)$Q$-a.e.の$x \in \mathcal{X}$に対して事後分布が定まり、これは正にBayesの公式によっ

て得られるものである。以下、$[\Pi^\infty(\cdot|x)]\in\Gamma$ でなくても、$[\Pi^\infty(\cdot|x)]$ は ∞ を略して $[\Pi(\cdot|x)]$ と書くことにする。

通常は事後分布をデータを観測した後での θ に関する確信の強さと考えるが、客観的にみれば、データ x から一種の中間決定を下していることになる。そこで、写像

$$[\Pi(\ |\cdot)]:\mathcal{X}\to\Upsilon,\quad x\mapsto[\Pi(\cdot|x)]$$

を考え、Q 外測度 0 上の違いを同一視すれば、これは $\mathcal{P}$ の表示及び $[\Pi]$ の代表元 Π のとり方には依存しない。この写像 $[\Pi(\ |\cdot)]$ を一種の非確率的な決定函数と考えて<u>Υ 決定函数</u>と呼ぶ。

更に、決定空間 $\mathcal{D}$ と損失函数 $W:\Omega\times\mathcal{D}\to[0,\infty)$（ここでは２変数函数として可測と仮定する。）が与えられたとき、

$$h(x,s):=\int_\Omega W(\theta,s)\,\Pi^\infty(d\theta|x)$$
$$\Phi(x):=\left\{d\in\mathcal{D}\ :\ h(x,d)=\inf_{s\in\mathcal{D}}h(x,s)<\infty\right\}$$

とする。一般に Φ は $\mathcal{X}$ から $\mathcal{D}$ への多価函数であるが、応用上は通常は一価函数となる。（但し、ゲーム理論の場合はそうではない。）そこで、非確率的な決定函数（つまり $\mathcal{X}$ から $\mathcal{D}$ への可測函数）φ_0 が、$\varphi_0(x)\in\Phi(x)$ Q-a.e. をみたすとき、φ_0 を $[\Pi]$（あるいは Π）に関する<u>一般 Bayes</u>

解と呼ぶ。以下，記述の便宜上、決定函数は非確率的なものだけを考えることにするが、確率的な決定函数を考えても同様の議論ができる。

なお、今の一般Bayes解の定義は決定理論的な方法を用いていないことに注意を要する．危険函数

$$R(\theta,\varphi):=\int_{\mathcal{X}} W(\theta,\varphi(x))\,P_\theta(dx)$$

に対して、Bayes危険

$$r(\Pi,\varphi):=\int_{\Omega} R(\theta,\varphi)\,\Pi(d\theta)$$

を作ったとき、$[\Pi]\in\Upsilon\setminus\Gamma$ に対しては、応用上は通常「任意の決定函数 φ に対して $r(\Pi,\varphi)=\infty$ 」となってしまうのである．一般Bayes解が許容的であるか否かを判定するのは一般には難しい。[文献1) 第6章]

§2　準備2（変数変換）

n 次元Lebesgue測度を μ^n で表すものとする．

次の (ii)(iii) を仮定する。

(ii)　$\Omega=\mathbb{R}_+=\{\sigma\in\mathbb{R}:\sigma>0\}$

(iii)　$0\notin\mathcal{X}\subset\mathbb{R}^n$，$\mathcal{X}$ はBorel集合で

$$x\in\mathcal{X},\ b\in\mathbb{R}_+\Longrightarrow bx\in\mathcal{X}$$

が成り立つ．

ここで、(ii) でΩを用いるのは後の都合であり、(iii) の $0 \notin \mathcal{X}$ は便宜的な約束にすぎない。

このとき、$\mathcal{S} := \{x \in \mathcal{X} : |x| = 1\}$ として、$x \in \mathcal{X}$ に対して$\tau = |x|$, $u = \frac{x}{|x|}$ として、$\mathcal{X} \ni x = (\tau, u) \in \Omega \times \mathcal{S}$ とみなす。このとき、

$$\nu(B) := n\mu^n((0,1) \times B) \quad (B \subset \mathcal{S}, \text{ 可測})$$

$$\mu^*(A) := \int_A \tau^{n-1} (\mu^1 \times \nu)(d(\tau, u)) \quad (A \subset \mathcal{X}, \text{ 可測})$$

によって、$\mathcal{S}$ 上の有限測度νと $\mathcal{X}$ 上のσ有限測度μ^*を定義する。このとき、$r \in \Omega$, $B \subset \mathcal{S}$ (可測) に対して、

$$\begin{aligned}
&\mu^*((0,r) \times B) \\
&= \int_{(0,r)\times B} \tau^{n-1} (\mu^1 \times \nu)(d(\tau, u)) \\
&= \int_0^r \tau^{n-1} d\tau \int_B \nu(du) \qquad [\text{Fubini の定理による}] \\
&= \frac{r^n}{n} \times n\mu^n((0,1) \times B) \\
&= r^n \mu^n((0,1) \times B) \\
&= \mu^n((0,r) \times B)
\end{aligned}$$

Bを固定すると、$L \mapsto \mu^*(L \times B)$, $L \mapsto \mu^n(L \times B)$ はΩ上のσ有限測度であり、特に$L = (0, r)$ に対しては、$\mu^*(L \times B) = \mu^n(L \times B) < \infty$ だから、拡張の一意性により、任意の$L \subset \Omega$ (可測) に対して

$$\mu^*(L \times B) = \mu^n(L \times B)$$

上式は任意の$L \subset \Omega$, $B \subset \mathcal{S}$ (可測) に対していえて、μ^*,

μ^n は σ 有限測度だから、再び拡張の一意性により、$\mu^n = \mu^*$ となる。このことを形式的に書けば、

$$dx = \tau^{n-1} d\tau\, \nu(du)$$

となる。これより、

$$\nu(B) = 0 \iff \mu^n(\Omega \times B) = 0$$

も得られる。

補題1　$(\mathcal{X}, \mu)$ を測度空間、f, ϕ を $\mathcal{X}$ 上の可測函数、m, M を定数とし、

$$f(x) \geqq 0, \quad 0 < m \leqq \phi(x) \leqq M < \infty \qquad \mu\text{-a.e.}$$

と仮定する。このとき、

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\phi(x)\mu(dx) < \infty \iff \int_{\mathcal{X}} f(x)\mu(dx) < \infty$$

証明　自明　□

補題2　(ii)(iii) を仮定する。$\mathcal{X}$ 上の可測函数 p_1 について、

$$p_1(x) \geqq 0 \quad {}^\forall x \in \mathcal{X}, \quad \int_{\mathcal{X}} p_1(x)\, dx < \infty$$

と仮定する。このとき、$\nu(E) = 0$（すなわち $\mu^n(\Omega \times E) = 0$）なる E があって、

$${}^\forall x \in \mathcal{X} \setminus (\Omega \times E), \quad 0 < {}^\forall r \leqq {}^\forall R < \infty, \quad {}^\forall \beta \in \mathbb{R},$$

$$\int_r^R p_1(\tau x)\tau^\beta d\tau < \infty$$

証明　先の x から (τ, u) への変数変換を用いると、仮定よ

り、

$$\int_S \nu(du)\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-1}d\tau = \int_{\mathcal{X}} p_1(x)\,dx < \infty$$

だから、

$$\int_0^\infty p_1(\tau u)\tau^{n-1}d\tau < \infty \qquad \nu\text{-a.e.}$$

この除外集合をEとすると、$\nu(E)=0$であり、任意の$x\in\mathcal{X}\setminus(\Omega\times E)$に対して、

$$\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-1}d\tau = |x|^{-n}\int_0^\infty p_1\left(\tilde{\tau}\frac{x}{|x|}\right)\tilde{\tau}^{n-1}d\tilde{\tau} < \infty$$

$$\left[\tau=\frac{\tilde{\tau}}{|x|},\quad d\tau=\frac{d\tilde{\tau}}{|x|}\right]$$

よって$0<r\leqq R<\infty$のとき$\int_r^R p_1(\tau x)\tau^{n-1}d\tau<\infty$、従って補題1より$\int_r^R p_1(\tau x)\tau^\beta d\tau<\infty$である。 □

§3　尺度不変性とΥ決定函数

ここでは(ii)(iii)及び次の(iv)を仮定する。(従って(i))

(iv)　標本空間$\mathcal{X}$上の確率分布族$\mathcal{P}=\{P_\sigma:\sigma\in\Omega\}$は$\mu^n$に関して絶対連続で、$p(\cdot,\sigma)$は$\frac{dP_\sigma}{d\mu^n}$の1つであり、可測函数$p_1$があって$p(x,\sigma)=\sigma^{-n}p_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)$が成り立つ。

このとき、$\mathcal{P}$は尺度変換群$\mathcal{G}$ ($=\Omega$とみなす)に関して不変である。

<u>定理1</u>　上の仮定の下で、$\alpha \in \mathbb{R}$ とし、事前測度 $\Pi = \Pi_\alpha$ として $\Pi(d\sigma) = \sigma^\alpha d\sigma$ をとる。このとき、次が成り立つ。

(1) $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ と対等である。

(2) $\mathfrak{X}$決定函数 $[\Pi(\ |\cdot)]$ は $\mathcal{G}$ 共変である。(但し、$\mathcal{G}$ の $\mathfrak{X}$ 上の作用は $b[\Pi] = [L \mapsto \Pi(b^{-1}L)]$ で定める。)

<u>証明</u>　(1)　先の変数変換を用いると、

$$F := \{u \in \mathcal{S} : p_1(\tau u) = 0 \quad \mu^1\text{-a.e.}\}$$

としたとき、

$$P_\sigma(\Omega \times F) = \sigma^{-n}\int_F \nu(du)\int_0^\infty p_1\left(\frac{\tau u}{\sigma}\right)\tau^{n-1}\,d\tau = 0 \quad {}^\forall \sigma \in \Omega$$

だから、最初から $\mathcal{X}$ から $\Omega \times F$ を除いて考えてかまわない。

すると、

$$q(x) = \int_0^\infty p_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\sigma^{\alpha - n}\,d\sigma = \int_0^\infty p_1(\tau x)\,\tau^{n-\alpha-2}\,d\tau$$
$$[\sigma = \tau^{-1},\quad d\sigma = \tau^{-2}d\tau]$$

であり、$\Omega \times F$ の点は除いてあるから、

$$0 < q(x) \leqq \infty \quad {}^\forall x \in \mathcal{X}$$

である。従って、

$$\mathcal{Q}(N) = 0 \implies \mu^n(N) = 0 \implies P_\sigma(N) = 0 \quad {}^\forall \sigma \in \Omega$$

が成り立つ。また、

$$P_\sigma(N) = 0 \quad {}^\forall \sigma \in \Omega \implies \mathcal{Q}(N) = 0$$

は一般論である。従って、$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ と対等である。

(2) $\Pi^{\infty}(L|x)=\int_L p_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\sigma^{\alpha-n}d\sigma$

であるから、

$$\Pi^{\infty}(bL\,|\,bx)=\int_{bL}p_1\left(\frac{bx}{\sigma}\right)\sigma^{\alpha-n}d\sigma$$
$$=\int_L p_1\left(\frac{bx}{b\tilde{\sigma}}\right)(b\tilde{\sigma})^{\alpha-n}b\,d\tilde{\sigma}\qquad[\sigma=b\tilde{\sigma},\ d\sigma=b\,d\tilde{\sigma}]$$
$$=b^{\alpha-n+1}\int_L p_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\sigma^{\alpha-n}d\sigma$$
$$=b^{\alpha-n+1}\Pi^{\infty}(L|x)$$

従って

$$[L\mapsto\Pi^{\infty}(bL\,|\,bx)]=[\Pi(\cdot\,|x)]$$

辺々にbを作用させて、

$$[\Pi(\cdot\,|bx)]=b[\Pi(\cdot\,|x)]$$

従って$[\Pi(\ |\cdot)]$は$\mathcal{G}$共変である。 □

この定理の意味することを明らかにしよう。まず(1)であるが、一般の統計的決定問題(Ci)を仮定)で一般Bayes解(あるいは中間決定にあたるΥ決定函数)を求める際には$\mathcal{Q}$による同一視を行うが、決定理論的な性質を調べる際には$\mathcal{P}$による同一視を行わなければならない。この際、事前測度族として「あまり極端なもの」をとらない限りは$\mathcal{Q}$は$\mathcal{P}$と対等になるので通常は問題はない。(特に$\mathcal{P}$が互いに絶対連続であれば、任意の事前測度族$[\Pi]\in\Upsilon$, $\Pi\neq 0$に対して$\mathcal{Q}$は$\mathcal{P}$と対等になる。) しかし、対等にならない場合は同一視

が異なってしまい、扱いが面倒になる．今の場合そういった問題が起きないことを (1) は明らかにしているのである。(以下では Q-a.e. とは書かずに $\mathcal{P}$-a.e. と書くことにする。)

(2) が最も重要なことである。これは次のことを意味する．まず、事前測度族 $[\Pi]$ を定めるのに「Υ 決定函数 $[\Pi(\,|\cdot)]$ が $\mathcal{G}$ 共変になる」といった観点から決めることはできないことを明らかにしているのである。更に、

(v)　決定空間と $\mathcal{G}$ 不変な損失函数が与えられている．

とすると、(2) から $\Phi = \Phi_\alpha$ が $\mathcal{G}$ 共変であることが得られる．そこで、Δ_I を $\mathcal{G}$ 共変な決定函数全体の集合とする。α を固定する。今、

(vi)　$\# \Phi_\alpha(x) = 1$　$\forall x \in \mathcal{X}$ であり、$\Phi_\alpha(x) = \{\varphi_\alpha(x)\}$

とすると φ_α は可測である。

が成り立つとすれば、φ_α は Π_α に関する一般 Bayes 解であり、$\mathcal{G}$ 共変であり、かつ Π_α に関する一般 Bayes 解は $\mathcal{P}$-a.e. で一意的である。

以下のことは (vi) を仮定すれば記述が簡単になるが、仮定せずに述べる。また、$\varphi \in \Delta_I$ に対し、$R(\sigma, \varphi)$ は σ によらず一定になるので、これを単に $R(\varphi)$ と書くことにする。なお、Π_α に対して定まる q, h を q_α, h_α と書くことにする。

<u>定理2</u>　定理1の仮定に加え、(v)を仮定する。このとき、次が成り立つ。

(1)　任意の$\varphi \in \Delta_I$に対して

$$R(\varphi) = \int_{\mathcal{S}} r_{-1}(u, \varphi(u))\, \nu(du)$$

(2)　$\varphi_{-1} \in \Delta_I$が$\Pi_{-1}$に関する一般Bayes解であれば、$\varphi_{-1}$は$\Delta_I$の中で最良である。

(3)　(2)の仮定をみたすφ_{-1}で$R(\varphi_{-1}) < \infty$となるものがあれば、φ^*がΔ_Iの中で最良ならばφ^*はΠ_{-1}に関する一般Bayes解である。

<u>証明</u>　Zidekにより$\mathcal{G}$が抽象的な位相群の場合に一般化されているので省略する。(事前測度として右不変Haar測度を用いる。) [文献3)]　□

以上により、定理2の仮定の下で、次のことがいえる。次の条件

(C)　Π_{α_1} $(\alpha_1 \neq -1)$に関する一般Bayes解$\varphi_{\alpha_1} \in \Delta_I$があり、$\varphi_{\alpha_1}$は$\Pi_{-1}$に関する一般Bayes解ではなく、かつ定理2(3)の仮定がみたされる。

が成り立てば、φ_{-1}はΔ_Iの中で最良、一方$\varphi_{\alpha_1} \in \Delta_I$だが$\varphi_{\alpha_1}$は$\Delta_I$で最良ではない。従って$\varphi_{\alpha_1}$は$\Delta_I$の中ですら許容的ではない(ミニマックス解でもない)のである。

このことから次のこともいえる。一般に、適当な（可測性に関する）条件の下で、危険函数が定数となる広義の Bayes 解はミニマックス解になる［文献 1) p. 134］が、広義の Bayes 解のかわりに一般 Bayes 解としてはならないのである。これより、(C) をみたす φ_{α_1} は Δ_I の中での広義の Bayes 解でないことも得られる。

なお、位置母数 ξ と尺度母数 σ を未知母数とするとき、事前測度として $\sigma^{\alpha}d\xi d\sigma$ を考えれば、定理2の一般化で、事前測度を右不変 Haar 測度 $(\alpha=-1)$ のかわりに左不変 Haar 測度 $(\alpha=-2)$ としてはならないことも得られる。

§4　σ^{l} の一般 Bayes 推定

σ^{l} の点推定問題での一般 Bayes 解の具体的な動向を調べよう。定理1の仮定に加えて次の (vii) を仮定する。（従って (v)）

(vii)　決定空間は $\mathcal{D}=R_{+}$ で損失函数は

$$W(\sigma, d)=\left(\frac{d}{\sigma^{l}}-1\right)^{2}\quad(l\neq 0)$$ である。

E, F を補題2, 定理1のものとし, $\mathcal{X}$ から $\Omega\times(E\cup F)$ を除いて考えるものとする。

このとき、Π_α に関する一般 Bayes 解 φ_α を求めよう。

$$h_\alpha(x,s)=\int_0^\infty\left(\frac{s}{\sigma^l}-1\right)^2 p_1\left(\frac{x}{\sigma}\right)\sigma^{\alpha-n}d\sigma$$
$$=\int_0^\infty(\tau^l s-1)^2\, p_1(\tau x)\,\tau^{n-\alpha-2}d\tau$$
$$[\sigma=\tau^{-1},\ d\sigma=\tau^{-2}d\tau] \qquad \cdots\langle 1\rangle$$

上式を形式的に s について展開すると、

$$h_\alpha(x,s)=s^2\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}d\tau$$
$$-2s\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}d\tau+\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2}d\tau$$
$$\cdots\langle 2\rangle$$

これは α, x を固定したとき、右辺の各積分が有限ならば意味のある式になる。また、$\Omega\times F$ の点は除いてあるから積分が 0 にはならない。そこで、形式的に

$$\varphi_\alpha(x)=\frac{\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}d\tau}{\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}d\tau} \qquad \cdots\langle 3\rangle$$

とおく。これを<u>形式解</u>と呼ぶことにする。これは、α, x を固定したとき、$\langle 2\rangle$ の右辺の各積分が有限ならば $\varphi_\alpha(x)$ は意味をもち、$s=\varphi_\alpha(x)$ で $h_\alpha(x,s)$ が有限の最小値となる。また、$\varphi_\alpha(x)$ が有限の値をもつとき、変数変換によって

$$\varphi_\alpha(bx)=b^l\varphi_\alpha(x) \qquad \cdots\langle 4\rangle$$

が得られる。

<u>定理3</u>　形式的な式 $\langle 2\rangle$ において、$\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in\mathcal{X}$, $s\in\mathcal{D}$, r, $R\in\mathbb{R}_+$ を固定するとき、次の (1)〜(4) は

同値である。

(1) $h_\alpha(x, s) < \infty$

(2) 〈2〉の右辺の積分はすべて有限

(3) 形式解 $\varphi_\alpha(x)$ が有限の値をもち、かつ $q_\alpha(x) < \infty$

(4) $\int_0^r p_1(\tau x)\, \tau^{n-\alpha-2+\min\{0, 2l\}}\, d\tau < \infty$ かつ
$\int_R^\infty p_1(\tau x)\, \tau^{n-\alpha-2+\max\{0, 2l\}}\, d\tau < \infty$

<u>証明</u>

$$\begin{tikzcd} & (1) \arrow[dl, Rightarrow] & \\ (4) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & (3) \end{tikzcd}$$

を示せばよい。

(2) $\Rightarrow$ (1) は自明.

$$q_\alpha(x) = \int_0^\infty p_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) \sigma^{n-\alpha}\, d\sigma = \int_0^\infty p_1(\tau x)\, \tau^{n-\alpha-2}\, d\tau$$

であり、〈2〉の積分は 0 にならないから (2) $\Leftrightarrow$ (3) も成り立つ。

$\Omega \times E$ の点を除いているので、

$$\int_r^R p_1(\tau x)\, \tau^\beta\, d\tau < \infty \qquad {}^\forall\beta,\quad 0 < {}^\forall r \leq {}^\forall R < \infty$$

であるから、〈2〉の右辺の可積分性を調べるには、0 の近くと ∞ の近くの積分を吟味すれば十分であり、(4) が成立するか否かは r, $R \in \mathbb{R}_+$ のとり方にはよらない。よって、$0 < r < 1 < R < \infty$ としてよい。すると、$l > 0$ であれば（$l < 0$ なら不等式の向きが逆になる。）

$$\int_0^r p_1(\tau x)\, \tau^{n-\alpha-2+2l}\, d\tau \leq \int_0^r p_1(\tau x)\, \tau^{n-\alpha-2+l}\, d\tau$$
$$\leq \int_0^r p_1(\tau x)\, \tau^{n-\alpha-2}\, d\tau$$

$$\int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2}d\tau \leqq \int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}d\tau$$
$$\leqq \int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}d\tau$$

従って (4) $\Rightarrow$ (2) も示された。

(1) $\Rightarrow$ (4) を示そう。rは十分小，Rは十分大としてよい。$l>0$のとき，(1)より，

$$h_\alpha(x,s)=\int_0^\infty (\tau^l s-1)^2 p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2}d\tau<\infty$$

だから，rを十分小さくとって，区間$(0,r)$において，$\phi(\tau)=(\tau^l s-1)^2$として補題1を適用すると，

$$\int_0^r p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2}d\tau<\infty$$

次に，Rを十分大きくとると，

$$\tau^l s-1\geqq \frac{\tau^l s}{2}\qquad \forall\tau>R$$

よって

$$\frac{s^2}{4}\int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}d\tau \leqq \int_R^\infty (\tau^l s-1)^2 p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2}d\tau$$
$$<\infty$$

よって

$$\int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}d\tau<\infty$$

従って(4)が成り立つ。$l<0$のときは上の証明で0の近くで用いた方法と∞の近くで用いた方法を入れかえればよい。

$\square$

<u>系</u> 定理と同じ仮定の下で，次の(3)′と(4)′は同値である。

(3)′ 形式解 $\varphi_\alpha(x)$ が有限の値をもつ。

(4)′ $\int_0^r p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+\min\{l,2l\}}d\tau<\infty$ かつ
$\int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+\max\{l,2l\}}d\tau<\infty$

証明 (3)′ $\Longrightarrow$ (4)′ は自明. (4)′ $\Longrightarrow$ (3)′ は定理の (4) $\Longrightarrow$ (2) と同様。 □

上の定理から次のことがいえる。「$\varphi_\alpha(x)$ が有限の値をもち、かつ $q_\alpha(x)<\infty$」のとき、かつそのときに限り、$s=\varphi_\alpha(x)$ のみに対して $h_\alpha(x,s)$ を有限の最小値にする。そうでないときは $h_\alpha(x,s)=\infty$ $\forall s$ である。

今の定理で (2) [すなわち (1)] が成立するか否かは s によらないので、

$$I(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\ h_\alpha(x,s)<\infty\}$$

とする。また、

$$J(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\ \varphi_\alpha(x)\text{ が有限の値をもつ}\}$$
$$K(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\ q_\alpha(x)<\infty\}$$

とする。また、$r,\ R\in\mathbb{R}_+$ として、

$$I_0(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\int_0^r p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+\min\{0,2l\}}d\tau<\infty\}$$
$$I_\infty(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+\max\{0,2l\}}d\tau<\infty\}$$
$$J_0(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\int_0^r p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+\min\{l,2l\}}d\tau<\infty\}$$
$$J_\infty(x):=\{\alpha\in\mathbb{R}\ :\int_R^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+\max\{l,2l\}}d\tau<\infty\}$$

とおくと，上の定理と系から，これは r，$R \in \mathbb{R}_+$ のとり方にはよらず，

$$\left.\begin{aligned} I(x) &= J(x) \cap K(x) = I_0(x) \cap I_\infty(x) \\ J(x) &= J_0(x) \cap J_\infty(x) \end{aligned}\right\} \langle 5 \rangle$$

が成り立つ。また，

$$\alpha_0(x) := \sup I_0(x) \qquad \alpha_0'(x) := \sup J_0(x)$$
$$\alpha_\infty(x) := \sup I_\infty(x) \qquad \alpha_\infty'(x) := \sup J_\infty(x)$$

とする。以下，x は固定するので (x) は省略して書くと，

$$I_0 = (-\infty, \alpha_0) \text{ or } (-\infty, \alpha_0]$$
$$J_0 = (-\infty, \alpha_0') \text{ or } (-\infty, \alpha_0']$$
$$I_\infty = (\alpha_\infty, \infty) \text{ or } [\alpha_\infty, \infty)$$
$$J_\infty = (\alpha_\infty', \infty) \text{ or } [\alpha_\infty', \infty)$$

従って，I，J は区間となる。(但し，ϕ，1点も区間とみなすことにする。) また，

$$\ell > 0 \text{ のとき } \quad \alpha_0' = \alpha_0 + \ell, \quad \alpha_\infty' = \alpha_\infty$$
$$\ell < 0 \text{ のとき } \quad \alpha_0' = \alpha_0, \quad \alpha_\infty' = \alpha_\infty + \ell$$

が成り立つ。

なお，ここで定義した I，J，K，I_0，I_∞，J_0，J_∞，α_0，α_∞，α_0'，α_∞' は $\mathcal{H} = \Omega \times \mathcal{S}$ とみなしたとき本質的に $\mathcal{S}$ 上の函数である（すなわち，例えば $I(\tau u) = I(u)$ ${}^\forall \tau \in \Omega$ ${}^\forall u \in \mathcal{S}$）ことが変数変換によって得られる。

$$\mathcal{I} := \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; \alpha \in I(x) \quad \mathcal{P}\text{-a.e.}\}$$
$$\mathcal{J} := \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; \alpha \in J(x) \quad \mathcal{P}\text{-a.e.}\}$$
$$\mathcal{K} := \{\alpha \in \mathbb{R} \;:\; \alpha \in K(x) \quad \mathcal{P}\text{-a.e.}\}$$

とし、$\alpha \in \mathcal{J}$ に対しては、$\alpha \in J(x)$ の除外集合上では $\varphi_\alpha(x)$ を新たに、例えば、$\varphi_\alpha(x) = |x|^\ell$ と定義して、〈4〉が任意の $x \in \mathcal{X}$, $\ell \in \mathbb{R}_+$ に対して成り立つ（つまり $\varphi_\alpha \in \Delta_I$ となる）ようにするものとする。すると、〈5〉より

$$\mathcal{I} = \mathcal{J} \cap \mathcal{K} \qquad \cdots \langle 6 \rangle$$

がいえて、また、

$\alpha \in \mathcal{I} \iff$ 形式解 φ_α が Π_α に関する一般Bayes解となる

が成り立ち、$\alpha \in \mathcal{I}$ に対して本質的に(vi)が成り立つとしてよい。(可測性は〈3〉にFubiniの定理を適用すれば導かれる。)

<u>注意</u>　〈6〉より $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ が成り立つ。従って

$$[\text{「}\exists s \in \mathcal{D} : h(x, s) < \infty\text{」} \quad Q\text{-a.e.}] \Longrightarrow [q(x) < \infty \quad Q\text{-a.e.}]$$

であるが、これは一般の統計的決定問題で成り立つわけではない。反例は $X \sim B(n, p)$（n 既知, p 未知）, 事前測度を $\Pi(dp) = \dfrac{dp}{p(1-p)}$ として p の点推定（損失函数は $W(p, d) = (d-p)^2$）を考えると、一般Bayes解は $\varphi_0(x) = \dfrac{x}{n}$ となるが、

$q(0)=q(x)=\infty$ である。[文献 1) p.130] ではこの φ_0 は決定理論的に都合の悪い性質があるのか、というと、そうではなく、$r(\Pi, \varphi_0)<\infty$ であり、φ_0 は許容的であり、また広義の Bayes 解でもある。(なお、ミニマックス解、(proper な) Bayes 解ではない。)

以下では $x\in\mathcal{X}$ を固定したときの $\alpha\mapsto\varphi_\alpha(x)$ の性質を明らかにしよう。

$$H(x, \beta) := \int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^\beta d\tau$$

とする。すると、

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{H(x,\ n-\alpha-2+\ell)}{H(x,\ n-\alpha-2+2\ell)}$$

と表される。

<u>定理 4</u>　定理 1 の仮定に加え、(vi) を仮定する。$x\in\mathcal{X}$ を固定し、$J=J(x)\neq\phi$ と仮定する。このとき、次が成り立つ。

(1)　$\alpha\mapsto\varphi_\alpha(x)$ は J で連続である。

(2)　$\ell>0$ ($\ell<0$) のとき、$\alpha\mapsto\varphi_\alpha(x)$ は J で狭義単調増加 (減少) である。

(3)　$\alpha_\infty' \notin J_\infty$ かつ $\int_R^\infty p_1(\tau x)d\tau>0$ $\forall R\in\mathbb{R}_+$ であれば

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha_\infty'} \varphi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & (\ell > 0) \\ \infty & (\ell < 0) \end{cases}$$

(4)　$\alpha_0' \notin J_0$ かつ $\int_0^r p_1(\tau x)\,d\tau > 0 \quad {}^\forall r \in \mathbb{R}_+$ であれば

$$\lim_{\alpha \uparrow \alpha_0'} \varphi_\alpha(x) = \begin{cases} \infty & (\ell > 0) \\ 0 & (\ell < 0) \end{cases}$$

<u>注意</u>　$J \neq \phi$ を大前提として、(3)(4) の仮定で、J_∞, J_0 のかわりに J としても同じことである。

<u>証明</u>　(1)　$\varphi_\alpha(x)$ の定義で積分を $\int_0^1$ と $\int_1^\infty$ に分けて Lebesgue の収束定理を用いれば明らか。

(2)　$\beta, \gamma \in \mathbb{R}$　$\gamma \neq 0$ とすると、

$$H(x, \beta) = \int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^\beta d\tau$$
$$= \int_0^\infty \left\{p_1(\tau x)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\beta-\gamma}{2}}\right\}\left\{p_1(\tau x)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\beta+\gamma}{2}}\right\} d\tau$$

よって、Cauchy - Schwarz の不等式により、

$$H(x, \beta)^2 \leqq H(x, \beta-\gamma)\, H(x, \beta+\gamma) \qquad \cdots \langle 7 \rangle$$

ここで、等号が成立するための条件は、

(ア)　$0 \leqq k < \infty$ があって

$$p_1(\tau x)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\beta-\gamma}{2}} = k\, p_1(\tau x)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\beta+\gamma}{2}} \quad \mu^1\text{-a.e.}$$

(イ)　$p_1(\tau x)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\beta+\gamma}{2}} = 0 \quad \mu^1\text{-a.e.}$

(ウ)　$H(x, \beta) = \infty$

のいずれかが成り立つことである。ところが、$\Omega \times F$ の点は除いてあり、$\gamma \neq 0$ であるから、(ア)(イ) は起こり得ない。

特に$H(x,\beta\pm\gamma)<\infty$ のとき、<7>より$H(x,\beta)<\infty$ であり、従って(ウ)は成り立たないから<7>の等号は成立せず、しかも$\Omega\times F$の点は除外してあるので、

$H(x,\beta)H(x,\beta+\gamma)>0$ であるから、<7>の両辺を

$H(x,\beta)H(x,\beta+\gamma)\in\mathbb{R}_+$で割ることにより、

$$\frac{H(x,\beta)}{H(x,\beta+\gamma)}<\frac{H(x,\beta-\gamma)}{H(x,\beta)} \qquad \cdots\langle 8\rangle$$

従って、$k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in J$, $\alpha+\frac{\ell}{k}\in J$ のとき、

$\beta=n-\alpha-2+\ell$ とすると、$[\alpha,\alpha+\frac{\ell}{k}]$ or $[\alpha+\frac{\ell}{k},\alpha]\subset J$

だから、以下で現れる積分はすべて有限で、

$$\varphi_\alpha(x)=\frac{H(x,\beta)}{H(x,\beta+\ell)}$$

$$=\frac{H(x,\beta)}{H(x,\beta+\frac{\ell}{k})}\cdot\frac{H(x,\beta+\frac{\ell}{k})}{H(x,\beta+\frac{2\ell}{k})}\cdot\cdots\cdot\frac{H(x,\beta+\ell-\frac{\ell}{k})}{H(x,\beta+\ell)}$$

$$<\frac{H(x,\beta-\frac{\ell}{k})}{H(x,\beta)}\cdot\frac{H(x,\beta)}{H(x,\beta+\frac{\ell}{k})}\cdot\cdots\cdot\frac{H(x,\beta+\ell-\frac{2\ell}{k})}{H(x,\beta+\ell-\frac{\ell}{k})}$$

$$=\frac{H(x,\beta-\frac{\ell}{k})}{H(x,\beta-\frac{\ell}{k}+\ell)}=\varphi_{\alpha+\frac{\ell}{k}}(x)$$

よって、$\varphi_\alpha(x)<\varphi_{\alpha+\frac{\ell}{k}}(x)$ となり、これより、

$$\varphi_\alpha(x)<\varphi_{\alpha+\frac{j}{k}\ell}(x)$$

但し $j,k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in J$, $\alpha+\frac{j}{k}\ell\in J$

が j の帰納法により示される。これはすなわち、

$$\varphi_\alpha(x) < \varphi_{\alpha+\gamma l}(x)$$

但し $\gamma \in Q$, $\gamma > 0$, $\alpha \in J$, $\alpha + \gamma l \in J$ …〈9〉

ということである。そこで、$l > 0$ ($l < 0$) のとき、

$\alpha_1 < \alpha_2$ ($\alpha_2 < \alpha_1$), $\alpha_1, \alpha_2 \in J$ をとると、有理数列 $\{\gamma_n\}$

で、$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$ $\alpha_1 + \gamma_n l \to \alpha_2$ なるものがとれて、

〈9〉によって、

$$\varphi_{\alpha_1}(x) < \varphi_{\alpha_1+\gamma_1 l}(x) \leqq \varphi_{\alpha_1+\gamma_n l}(x) \qquad \forall n$$

$n \to \infty$ とすると、(1) によって

$$\varphi_{\alpha_1}(x) < \varphi_{\alpha_1+\gamma_1 l}(x) \leqq \varphi_{\alpha_2}(x)$$

よって $\varphi_{\alpha_1}(x) < \varphi_{\alpha_2}(x)$、従って $\alpha \mapsto \varphi_\alpha(x)$ は狭義単調増加 (減少) である。

(3) $l > 0$ のとき、$\alpha, \alpha^* \in J$, $\alpha \leqq \alpha^*$ とすると、

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}\,d\tau}{\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}\,d\tau}$$

$$\leqq \frac{\int_0^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}\,d\tau}{\int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}\,d\tau} \qquad [\text{仮定より、分母} \neq 0]$$

$$= \frac{\int_0^1 p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}\,d\tau}{\int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}\,d\tau} + \frac{\int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+l}\,d\tau}{\int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}\,d\tau}$$

$$\leqq \frac{\int_0^1 p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha^*-2+l}\,d\tau}{\int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}\,d\tau} + 1 \qquad \cdots〈10〉$$

［第1項は $\alpha \leqq \alpha^*$，第2項は $l > 0$ による］

ここで，

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha-2+2l}d\tau$$

$= \int_1^\infty p_1(\tau x)\tau^{n-\alpha'_\infty-2+2l}d\tau$ ［単調収束定理による］

$= \infty$ ［$\alpha'_\infty \notin J_\infty$ による］

で，(2) より $\lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \varphi_\alpha(x)$ は存在するので，<10> で α^* を固定して $\alpha \downarrow \alpha'_\infty$ とすると，

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \varphi_\alpha(x) \leqq 1$$

となる。ここで，x のかわりに bx $(b \in \mathbb{R}_+)$ としても J（従って α'_∞）に変化はなく，また，(3) の仮定もみたされるので，上と同じことがいえて，

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \varphi_\alpha(bx) \leqq 1$$

これと <4> により，

$$b^l \lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \varphi_\alpha(x) \leqq 1$$

これが任意の $b \in \mathbb{R}_+$ に対して成り立つ。

$\varphi_\alpha(x) > 0$ $\forall \alpha \in J$ だから，

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \varphi_\alpha(x) = 0$$

である。

$l < 0$ のときは $\varphi_\alpha(x)$ のかわりに $\dfrac{1}{\varphi_\alpha(x)}$ に対して上の方法を用いると，

$$\lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \frac{1}{\varphi_\alpha(x)} = 0 \quad よって \quad \lim_{\alpha \downarrow \alpha'_\infty} \varphi_\alpha(x) = \infty$$

(4) $\ell < 0$ のときは (3) の証明で $\alpha^* \leqq \alpha$ とし、$\int_0^1$ と $\int_1^\infty$ をいれかえて、$\alpha \downarrow \alpha'_\infty$ のかわりに $\alpha \uparrow \alpha'_0$ として、$\lim_{\alpha \uparrow \alpha'_0} \varphi_\alpha(x) = 0$。$\ell > 0$ のときは $\varphi_\alpha(x)$ のかわりに $\frac{1}{\varphi_\alpha(x)}$ とすればよい。 $\square$

この定理は、各 x に対して $\varphi_\alpha(x)$ $(\alpha \in J(x))$ が「かなり動く」ことを示している。特に (2) より $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$ は本質的に相異なる。これより、次の定理が得られる。

<u>定理5</u> 定理1の仮定に加え、(vii) を仮定する。また、決定函数は $\mathcal{P}$-a.e. による同一視をすることにする。このとき、次が成り立つ。

(1) 「$-1 \in \mathcal{J}$ かつ $R(\varphi_{-1}) < \infty$」のとき $-1 \in \mathcal{J}$ であり、φ_{-1} のみが Δ_I の中で最良であり、$\alpha_1 \in \mathcal{J}$, $\alpha_1 \neq -1$ に対しては $\varphi_{\alpha_1} \in \Delta_I$ だが φ_{α_1} は Δ_I の中で許容的でない。(従って Δ_I の中でミニマックス解、広義の Bayes 解でもない。)

(2) 「$-1 \notin \mathcal{J}$」または「$-1 \in \mathcal{J}$ であるが $R(\varphi_{-1}) = \infty$」のときは $R(\varphi) = \infty$ $\forall \varphi \in \Delta_I$。

(3) 特に $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ のとき (あるいは十分統計量を用いて $\mathcal{X} = \mathbb{R}_+$ の場合に帰着できるとき) (1) の仮定は

$-1 \in \mathcal{J}$ としても同じことである。

証明 (1) 定理2 (1) と仮定より、

$$R(\varphi_{-1}) = \int_{\mathcal{S}} h_{-1}(u, \varphi_{-1}(u))\, \nu(du) < \infty$$

だから、

$$h_{-1}(u, \varphi_{-1}(u)) < \infty \qquad \nu\text{-a.e.}$$

よって、

$$-1 \in I(u) \qquad \nu\text{-a.e.}$$

I は本質的に $\mathcal{S}$ 上の函数だから、

$$-1 \in I(x) \qquad \mu^n\text{-a.e.}$$

従って $-1 \in \mathcal{J}$ であり、$R(\varphi_{-1}) < \infty$ だから定理2 (2)(3) より φ_{-1} のみが Δ_I の中で最良であり、$\alpha_1 \in \mathcal{J}$, $\alpha_1 \neq -1$ に対しては $\varphi_{\alpha_1} \in \Delta_I$ だが定理4 (2) より φ_{-1} とは異なるので、φ_{α_1} は Δ_I の中で許容的でない。

(2) $-1 \notin \mathcal{J}$ であれば

$$P_\sigma\{x \in \mathcal{X} : h_{-1}(x, s) = \infty \ {}^\forall s\} > 0 \quad {}^\exists\sigma$$

$\Omega \times F$ の点は除いているから、定理1 (1) の証明より μ^n は $\mathcal{P}$ と対等、よって、

$$\mu^n\{x \in \mathcal{X} : h_{-1}(x, s) = \infty \ {}^\forall s\} > 0$$

I は本質的に $\mathcal{S}$ 上の函数だから、

$$\nu\{u \in \mathcal{S} : h_{-1}(u, s) = \infty \ {}^\forall s\} > 0$$

従って定理2 (1) より、

$$R(\varphi)=\infty \quad {}^\forall\varphi\in\Delta_I$$

である。

$-1\notin\mathcal{J}$ ならば $-1\notin\mathcal{A}$ だから $R(\varphi)=\infty \ {}^\forall\varphi\in\Delta_I$

$-1\in\mathcal{J}$ のとき $-1\notin\mathcal{A}$ ならば $R(\varphi)=\infty \ {}^\forall\varphi\in\Delta_I$

よって、あとは $-1\in\mathcal{A}$, $R(\varphi_{-1})=\infty$ のときを吟味すればよい。このときは、定理2 (2) より

$$R(\varphi)\geqq R(\varphi_{-1})=\infty \quad {}^\forall\varphi\in\Delta_I$$

である。

(3) $\mathcal{X}=\mathbb{R}_+$ のとき $\mathcal{S}=\{1\}$, $\nu\{1\}=1$ だから、$-1\in\mathcal{A}$ のとき、定理2 (1) より $R(\varphi_{-1})=h_{-1}(1,\varphi_{-1})<\infty$ となり (1) の仮定はみたされる。逆は (1) より成り立つ。□

例 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(0,\sigma^2)$ i.i.d. のとき、σ^2 の点推定を考える。

$\mathcal{X}=\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathcal{X}$ として、

$$p_1(x)=c\exp\left(-\frac{\sum x_i^2}{2}\right)=c\exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right), \quad \ell=2$$

である。

$u\in\mathcal{S}$ (つまり $|u|=1$) に対して、

$$H(u,\beta)=c\int_0^\infty \tau^\beta e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau$$

そこで、$\beta=n-\alpha$ とすると、$u\in\mathcal{S}$ に対して、

$$H(u,\beta+2)=c\int_0^\infty \tau^{\beta+1}\left(-e^{-\frac{\tau^2}{2}}\right)'d\tau$$

$$= c\left[-\tau^{\beta+1}e^{-\frac{\tau^2}{2}}\right]_0^\infty + c(\beta+1)\int_0^\infty \tau^\beta e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau$$
$$= (\beta+1)H(u,\beta) < \infty$$
$$(\beta > -1 \text{ すなわち } \alpha < n+1 \text{ のとき})$$

$\beta \leqq -1$ のときは $H(u,\beta) = \infty$ となる。よって、

$\mathcal{J} = J(x) = (-\infty, n+1)$ となり、$\alpha \in \mathcal{J}$ に対して、

$$\varphi_\alpha(u) = \frac{H(u, n-\alpha)}{H(u, n-\alpha+2)} = \frac{H(u,\beta)}{H(u,\beta+2)} = \frac{1}{\beta+1} = \frac{1}{n-\alpha+1}$$
$$(u \in \mathcal{S})$$

従って、〈4〉により、$x \in \mathcal{X}$ に対して

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{|x|^2}{n-\alpha+1} = \frac{\sum x_i^2}{n-\alpha+1}$$

これは $-\infty < \alpha < n+1$ に対しては形式解である。

$\alpha_0 = \alpha_0' - l = (n+1) - 2 = n-1$, $\alpha_\infty = \alpha_\infty' = -\infty$

だから $\mathcal{A} = I(x) = (-\infty, n-1)$ つまり $-\infty < \alpha < n-1$

のときは一般Bayes解になる。また、定理4の(1)〜(4)及び定理5の(1)(3)が適用できる。[十分統計量として $|x|$ を考えればよい。]

$$\varphi_{-1}(x) = \frac{\sum x_i^2}{n+2}$$

が Δ_I で最良であり、また、x を固定したとき、$\{\varphi_\alpha(x)\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ の動く範囲は $\left(0, \frac{\sum x_i^2}{2}\right)$ となる。 $\square$

参考文献

1）鍋谷清治（1978）　数理統計学　共立出版

2）藤本熙，松本望（1976）　決定の数理　筑摩書房

3）Zidek, J. V. (1969) A representation of Bayes invariant procedures in terms of Haar measure, Ann. Inst. Stat. Math. 21, 291～308