

Microlocal Energy Method and Applications

東大理 片岡清臣

$R^{m+n} \ni (t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n)$ とし, 点 $x_0^* = (0, 0; i dx_n)$ でマイクロ局所的に考える.

$$P = \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(t, x, D_t, D_x) Z_j Z_k^* + b(t, x, D_t, D_x) D_{x_n}$$

a_{jk}, b : 0-階のマイクロ微分作用素

$$D_t = \partial_t, \quad D_x = \partial_x$$

$$Z_j = D_{t_j} + i t_j D_{x_n}, \quad Z_j^* = D_{t_j} - i t_j D_{x_n} \quad (\text{Treves 型作用素})$$

良く知られているように, 上の作用素が点 x_0^* で解析的準楕円型となるための一つの十分条件として

$$\textcircled{1} \quad \sigma_0(a_{jk})(x_0^*) = \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_m \end{pmatrix}, \quad \text{Re} \alpha_j > 0, \quad \forall j.$$

$$\textcircled{2} \quad \sigma_0(b)(x_0^*) \neq \frac{1}{i} (2N_1 \alpha_1 + \dots + 2N_m \alpha_m), \quad \forall N_1, \dots, N_m = 0, 1, 2, \dots$$

以下この結果の我々の立場 (i.e. 解析的カテゴリーでの超局所エネルギー法) からの証明を与える.

Simplest case

$$P_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j (D_{t_j}^2 + t_j^2 D_{x_n}^2) + \gamma D_{x_n}$$

$\alpha_j, \gamma \in \mathbb{C}, \text{Re} \alpha_j > 0$

を考える

$$P_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j Z_j Z_j^* + (\gamma + i \alpha_1 + \dots + i \alpha_m) D_{x_n}$$

であり, 上の条件は

$$\gamma + i \alpha_1 + \dots + i \alpha_m \neq \frac{1}{i} (2N_1 \alpha_1 + \dots + 2N_m \alpha_m), \quad \forall N_1, \dots, N_m = 0, 1, \dots$$

さて, $f \in C_{R^{m+n}}|_{x_0^*}$ に対して $P_0 f(t, x) = 0$ at x_0^* とせよ. これより $\text{SS}(f) \subset \{t=0\}$ であり, 特に, f は t に解析的に依存する. $p_0 = (0, 0; i(dx - du)) \in iT^*R^{1+1}$ とする. ここに u は変数 x のコピー. 以下簡単のため $n=1, x_n \mapsto x$ とする. $f^* = \overline{f(t, u)}, P_0^* = \overline{P_0(t, u, D_u)}$ と置けば, p_0 において

$$0 = \int_{|t| \leq r} -(P_0 f \cdot f^* + f \cdot P_0^* f^*) dt$$

\parallel
 $g(x, u)$: Hermitian microfunction

$$= \sum_{j=1}^m \int_{|t| \leq r} \left\{ 2 \operatorname{Re} \alpha_j f_{t_j} f_{t_j}^* - t_j^2 (\alpha_j D_x^2 + \overline{\alpha_j} D_x^2) f f^* \right\} dt$$

$\sqrt{0}$ positive ではないが
 0 quasi-positive

$$+ \int_{|t| \leq r} (-\gamma D_x - \overline{\gamma} D_u) f f^* dt$$

$\operatorname{Re}(-\gamma i) > 0$ なら quasi-positive

よって $\operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Re}(-\gamma i) > 0$ ならこれから $f = 0$ がわかる。しかしこれでは条件として強すぎるので、concatenation method で改良を試みる。

$$Z_j^* P_0 = (P_0 + 2i \alpha_j D_x) Z_j^*$$

$$P_0 f = 0 \Rightarrow (P_0 + 2i \alpha_j D_x) Z_j^* f = 0$$

故に $P_0 + 2i \alpha_j D_x$ が hypoelliptic なら $Z_j^* f = 0$ となる ($\forall j = 1, \dots, m$)。

$$\text{よって } P_0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j Z_j Z_j^* + (\gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) D_x \text{ より}$$

$$(\gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_m) D_x f = 0$$

が得られる。故に $\gamma + \alpha_1 + \dots + \alpha_m \neq 0$ なら割り算できて $f \neq 0$ が結論できる。

$\operatorname{Im}(\gamma + 2\alpha_j) > 0, \forall j = 1, \dots, m$ なら, $P_0 + 2i \alpha_j D_x$ は点 x_0^* で解析的準楕円型。よって $\operatorname{Im} \gamma > -2 \min_{1 \leq j \leq m} \operatorname{Re} \alpha_j$ まで定理が示された。以下同様。

以上の方法は subelliptic で無いときも使える。例えば

$$P' = \sum_{j=1}^m \alpha_j (D_t^2 + t_j^2 D_{x_n}^2) - i(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) D_x + \delta, \quad 0 \neq \delta \in \mathbb{C}$$

のときも解析的準楕円性が云える。

一般の場合の取扱い方

『 P_0 : frozen operator of P at x_0 が elliptic

$$\Rightarrow R = P_0 - P \text{ として } \|f\|_2 \leq C \|P_0 f\|_0 = C \|Rf\|_0 \leq C |R| \|f\|_2$$

ここに $|R|$ は適当な symbol norm. よってこれが $\ll 1$ なら

$f \equiv 0$ でなければならない』

という論法を用いる。我々は次のような新しい Sobolev ノルムを用いる：

定義 Analytic Sobolev Norm

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|L| \geq 0} C_1^{2j} C_2^{2|L|} \left(\frac{(2j+|L|)!}{(j+|L|)!} \right)^2 (D_{x_n} D_{u_n})^{-j-|L|} (D_t^j D_s^L)$$

$\in E_{X \times X}$

$$L = (\ell_1, \dots, \ell_m)$$

$$p_0 = (0, 0; id_{x_n} - id_{u_n}) \in iT^*(R_t^m \times R_x^n \times R_s^m \times R_u^n)$$

(s, u) : a copy of $(t, x) \in R_t^m \times R_x^n$

$$c_1, c_2 \gg 1, \text{ with } 0 < \frac{c_2}{c_1} \ll 1$$

C^ω -パラメータ t に依存するマイクロ函数 $f(t, x)$ に対する k 次の解析的ソボレフノルムを

$\|f\|_k^2(x, u) := \int_{|t| \leq r} (D_t D_s)^k \Lambda(f(t, x) \overline{f(s, u)}) \Big|_{t=s} dt$
 で定める。ノルムと云っても x, u のマイクロ函数である。

補題 $A(t, x, D_t D_x)$: 点 $(0, 0; id_{x_n})$ における 0-階マイクロ微分作用素
 $f_1(t, x), f_2(t, x)$: 点 $(0, 0; id_{x_n})$ におけるマイクロ函数で t に C^ω
 に依存するもの

$$f_j^* = \overline{f_j(s, u)} \quad (j = 1, 2),$$

とする。このとき次のような正定値 Hermitian 構造の意味での順序関係が成立：

$$\begin{aligned} & \Lambda(Af_1 \cdot f_2^* + f_1 \cdot (Af_2)^*) \\ & \ll \exists C (|A|_r \Lambda(f_1 f_1^*) + |A|_r \cdot \Lambda(f_2 f_2^*)) \\ & \quad + \frac{1}{|A|_r} \sum_{\ell} \tilde{A}_{\ell}(t, x, D_x) \tilde{A}_{\ell}(s, u, D_u) (\Lambda(f_1 f_1^* + f_2 f_2^*)) \end{aligned}$$

ここに

$$|A|_r = \sup_{V_r} |A(t, x, \tau, \xi)|,$$

$$V_r = \{(t, x, \tau, \xi) \in T^*(C^{m+n});$$

$$|\tau| \leq r \operatorname{Im} \xi_n, |\xi_1| + \dots + |\xi_{n-1}| + |\operatorname{Re} \xi_n| \leq r \operatorname{Im} \xi_n\}$$

$\tilde{A}_{\ell} : V_{r/2}$ 上の適当な symbol で $|\tilde{A}_{\ell}|_{r/2} \leq C \cdot 2^{-\ell} |A|_r$ を満たすもの

補題 ($m = 1, n = 1$ のとき) $\{\alpha(D_t^2 + t^2 D_x^2) + \gamma D_x\} f = g$ から

$$\begin{aligned} & \left(2 \operatorname{Re} \alpha - \frac{2c_2^2}{c_1} - 4 \left(\frac{2c_2^2}{c_1} \right)^2 \right) \int D_t D_s \Lambda(ff^*) \Big|_{t=s} dt \\ & + \left(-\operatorname{Re} \alpha \cdot (D_x^2 + D_u^2) - \frac{2c_2^2}{c_1} D_x D_u \right) \int t^2 \Lambda(ff^*) \Big|_{t=s} dt \\ & + \left(-\gamma D_x - \delta D_u \right) \int \Lambda(ff^*) \Big|_{t=s} dt \\ & \ll - \int \Lambda(gf^* - fg^*) \Big|_{t=s} dt \end{aligned}$$

が導かれる。

定理の証明

$$g = (P_0 - P)f \text{ と置く.}$$

$$P_0 - P = D_t^2 A + t D_t D_x B + t^2 D_x^2 C + t D_x E$$

と書ける。ここに A, B, C, D, E は 0-階のマイクロ微分作用素である。よって上の量の微小倍で抑えられる。(正確に云うと quasi positive order relation でやらねばならないが、その説明は略す。) $\operatorname{Im} \gamma > 0$ ではこれで行ける。general case は再び concatenation を使う。