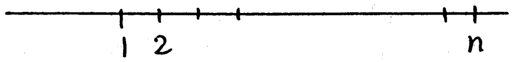
数理解析研究所講究録
750巻 1991年 20-23

Current Status of Chiral Potts Models

B. M. McCoy(SUNY, Stony Brook)

統計物理の新しいモデルは幾何の問題を提起する．一次元 chain



の場合，N degrees に対してハミルトニアンの exact な形が知られている：

$$H = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N-1}\{\overline{\alpha}_k (X_j)^k + \alpha_k (Z_j Z_{j+1}{}^T)^k\}$$

ここに

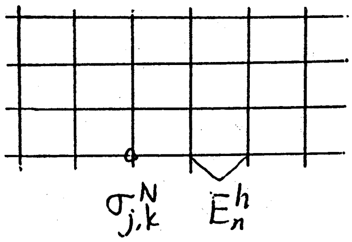
$$X_j = I_N \otimes \cdots \otimes X \otimes \cdots \otimes I_N,$$

X, Z は $N\times N$ 行列であり，

$$Z_{\ell,m} = \delta_{\ell,m}\omega^{\ell-1}, \quad \omega = e^{2\pi i/N}$$

$$X_{\ell,m} = \delta_{\ell,m+1} \bmod N, \quad XZ = \omega ZX$$

次に二次元格子の相互作用のモデルを考える：



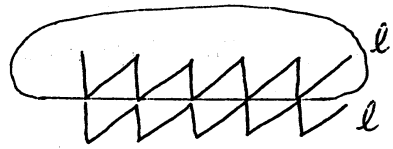
classical interraction は

$$\varepsilon = -\sum_{j,k}\sum_{n=1}^{N-1}\{E_n^h(\sigma_{j,k}\sigma^*_{j,k+1})^n + E_n^v(\sigma_{j,k}\sigma^*_{j+1,k})^n\}$$

求めるものはこれを $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ としたときの分配函数

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

である．いま格子を



のように書き，長さ L の添え字 ℓ, ℓ' に対して $N^L \times N^L$ 行列 T の成分を

$$T_{\{\ell\},\{\ell'\}} = \prod W^v(\ell_j, \ell_j') \cdot W^h(\ell_j - \ell_{j+1}')$$

で定めると，$\sigma = \omega^\ell$ のときは

$$Z = \mathrm{Tr}\, T^n$$

という量の

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln Z$$

を計算すればよい．$[T(u), T(u')] = 0$ という条件の下で

$$\frac{W^h(n)}{W^h(0)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{d_p b_q - a_p c_q \omega^j}{b_p d_q - c_p a_q \omega^j} \right)$$

$$\frac{W^v(n)}{W^v(0)} = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{\omega a_p d_q - d_p a_q \omega^j}{c_p b_q - b_p c_q \omega^j} \right)$$

$$a^N + k' b^N = k d^N,$$

$$k' a^N + b^N = k c^N$$

$$k'^2 + k^2 = 1$$

$$[T_{p,q}, T_{p,q'}] = 0$$

$q \to p$ のとき

$$a_q = a_p + pa, \qquad T_{p,q} \to I\mathrm{const} + uH, \qquad [H, T_{p,q}] = 0$$

よって Hamiltonian の係数として

$$\alpha_n = \exp(ik\Lambda - N)\varphi/N)/\sin(\pi n/N)$$

$$\overline{\alpha}_n = k\exp(i(2\Lambda - N)\overline{\varphi}/N)/\sin(\pi n/N)$$

$$\cos\varphi = k' \cos\overline{\varphi}$$

これが chiral Potts model の定義である．

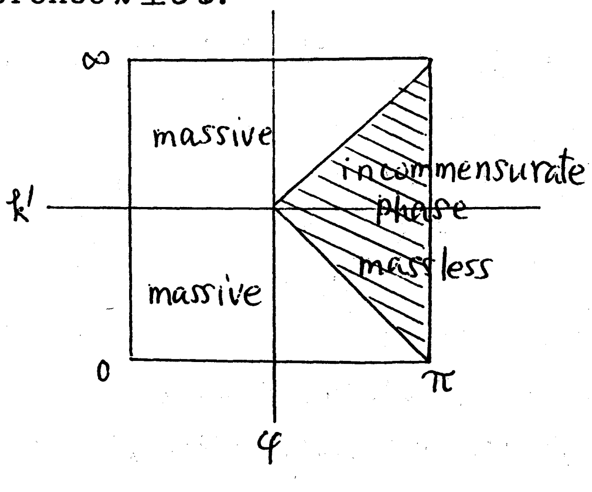
$N = 2 \Rightarrow$ Ising model に帰着する．

$N = 3$　になると enormous difference が生じる．

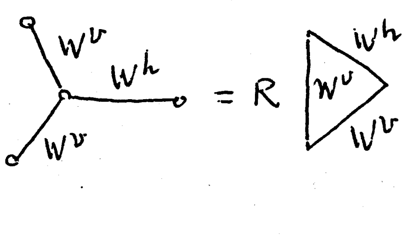
$\varphi = \overline{\varphi}$ として

$$\langle X_j \rangle = (1 - k'^2)^{1/2}$$

$$\langle X_0, X_j \rangle = \frac{e^{-|j|m}}{|j|} \; \frac{e^{i(j)\theta}}{|j|^{N(\ )}}$$



Star triangle equation:



$$R(a, b, c, d) = (b, wa, d, c)$$

$$T_{p,q}T_{p,Rq}T_{p,R^2q}$$
$$= e^{-ip}\{f^n_{p,Rq}f^n_{Rq,p}T_{p,q} + f^n_{p,q}f^n_{q,p}T_{p,R^2q} + f^n_{p,Rq}f^n_{R^2q,0}T_{p,R^dq}$$

$N=3$ のとき Riemann 面でパラメトライズされる.

super integrable case

$\varphi = \overline{\varphi} = \frac{\pi}{2}$.

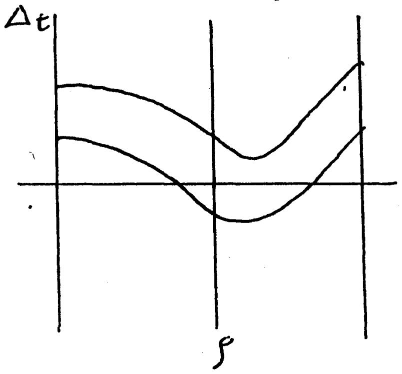
$$\left(\eta\frac{a}{b}w-1\right)^n\left(\eta\frac{a}{d}w^2-1\right)^n$$
$$\eta = \left(\frac{1+k'}{1-k'}\right)^{1/\sigma}$$
$$T_{p,q} = \frac{1}{\left(\eta\frac{a}{d}\omega-1\right)^n\left(\eta\frac{a}{d}\omega^2-1\right)^n}\left(\eta\frac{a}{d}\right)^{\rho_a}\left(\frac{c^2}{d^N}\right)^{\rho_2}$$
$$\times\prod_{\ell=1}^{m_\rho}\left(\frac{1+\omega V_\ell\eta^2 ab/cd}{1+\omega V_d}\right)\prod_{\ell=1}^{m_\rho}\left(\frac{a^2+b^2}{2d^2}\pm\frac{\omega_2(a^2-b^2)}{(1+k')d^N}\right)$$

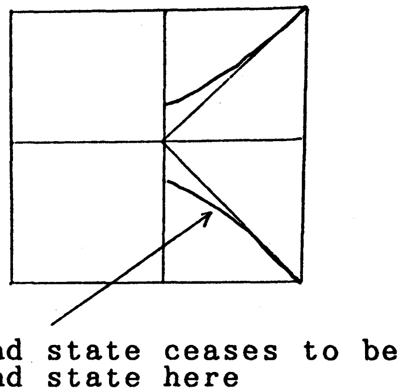
$m_\rho = 0$ として

$$E_0 = -(1+k')\{F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},1,\frac{4k'}{(1+k')^2})+F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{2}{3},1,\frac{4k'}{(1+k')^2})\}$$

$k'=1$, $m_\rho=1$ のときのを $E(\rho,k)$ と書けば

$$\lim_{n\to\infty}\{E(\rho,k)-E_0(k')\}$$
$$= \sigma(1-k')+\frac{3}{\pi}\int_0^1 dt\left(\frac{\omega V}{1+\omega tV}+\frac{\omega^2 V}{1+\omega^2 tV}\right)\left(\frac{4k'}{t^3-1}-(1-k')^2\right)^{1/2}$$





$$t=\frac{ab}{cd},\quad t^N = \frac{(1-k'(\lambda+\lambda^{-1})+k'^2)}{k^2} \quad \text{hyper elliptic}$$

$$V(t,\lambda)V^{N-1}(\omega^j t,\lambda^{-1}) = \sigma_j(t,\lambda),$$
$$\sigma_j(t,\lambda) = \alpha(\lambda)\tau_j(t)+Z_j(t)\tau_{N,j}(\omega^j t),$$
$$\alpha(\lambda) = \left(\frac{k'(1-\lambda_p\lambda_q)^2}{k^2V_\rho^2}\lambda_q\right)^n$$
$$Z(t) = (t_\rho-t)^{2L}.$$
$$Z_1(t) = Z(t)Z(\omega t)Z(\omega^{j+1}t),$$
$$\tau_2(t)\tau_2(\omega t)\tau_2(\omega^2 t) = Z(\omega^2 t)\tau_2(t)+Z(t)\tau_2(\omega t)+Z(\omega t)\tau_2(\omega^2 t)$$
$$+\alpha(\lambda)+\alpha(\lambda^{-1})$$

$\alpha(\lambda^{\pm1}) = h^{\pm}(t)h^{\pm}(\omega t)h^{\pm}(\omega^2 t)$,

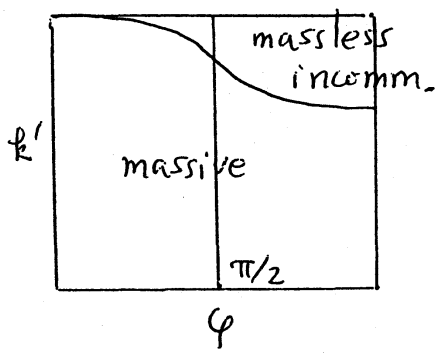
$h^{+}(t)h^{-}(t) = Z(t)$

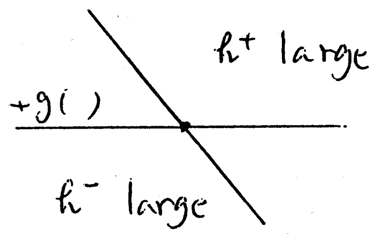
$$h^{+}(t) = \left(\frac{(t_\rho - t)}{y\rho^2}\right)^n \exp\frac{n}{2\pi i}\int_{Ct} dt \frac{1}{t' - t} h\left(\frac{1-\lambda'\lambda\rho}{1-\lambda'\lambda\rho}\right)$$

$$\tau_2(t) = h^{+}(t)\frac{f(\omega t)}{f(\omega^2 t)} + h^{-}(\omega t)\frac{f(t)}{f(\omega^2 t)}$$

$$f(t) = \prod_{\ell=1}^{m_\rho}(V_\ell t + 1), \quad n \to \infty.$$

これが函数方程式の解である．多項式になって欲しい．極は打ち消すようにできる． V_ℓ の選び方に制限が付く．





参考文献

カイラル・ポッツ・モデル B.McCoy（三輪哲二訳）数理科学 1990年 7月号
（同年 4月日本数学会岡山年会での講演）