数理解析研究所講究録
751巻 1991年 178-188

ITPFIファクターとAT流れ

九大教養　濱地敏弘

ルベーグ空間 (X, μ) に作用する非特異流れ $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が次を満たすとき性質AT を持つという： $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \geqq 1$ $\forall f_1, \dots, \forall f_n \in L^1(X, \mu)_+$, $\exists N_i \geqq 1$, $\exists r(i,j) \in \mathbb{R}$, $(1 \leqq j \leqq N_i)$, $\exists f \in L^1(X, \mu)_+$ s.t.

$$\left\| f_i(\cdot) - \sum_{j=1}^{N_i} e^{r(i,j)} f(F_{r(i,j)} \cdot) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(\cdot) \right\| < \varepsilon \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

III_0 型AFDファクターの中でITPFIファクター（Araki-Woods [1]）は、その flow of weights が性質AT を持つことで特徴づけられることが Connes-Woods [2] によって示された。AFDファクターの同型類とエルゴード変換の軌道同型類とは一対一に対応しているから、彼等の結果は次のように言っても同じである。

ルベーグ空間 (Ω, m) に作用する III_0 型の非特異エルゴード変換が、ある無限直積測度空間 $\left(\prod_{n=1}^{\infty}\{0,1,2,\dots,\lambda_n - 1\}, \prod_{n=1}^{\infty} P_n\right)$ に作用する加算機変換

$$(\omega_1, \omega_2, \cdots) \in \prod_{n=1}^{\infty}\{0,1,\cdots,r_n-1\} \longmapsto (\omega_1, \omega_2, \cdots)+(1,0,\cdots)$$

と軌道同型であるための必十条件は、Tから定まる随伴流 $(F_t)_{t\in\mathbb{R}}$ が性質ATを持つことである。ここで P_n は $\{0,1,\cdots r_n-1\}$ 上の確率測度であり、上記算法は座標成分毎の和で、右に繰り上がる。随伴流 (F_t) とは、歪積変換

$$\tilde{T}(\omega, u) = \left(T\omega,\ u-\log\frac{dm T}{dm}(\omega)\right),\quad (\omega,u)\in\Omega\times\mathbb{R}$$

の各エルゴード成分から成る $\Omega\times\mathbb{R}$ の分割によって商空間 $X = \Omega\times\mathbb{R}/\{\tilde{T}\text{-エルゴード成分}\}$ を作り、流れ

$$T_t(\omega, u) = (\omega, u+t),\quad (\omega,u)\in\Omega\times\mathbb{R}$$

を $\Omega\times\mathbb{R}$ から X への射影 π を通して X の上に作用させて得られる factor flow のことである。X の上の測度 (μ) は $\Omega\times\mathbb{R}$ の直積測度 $dm(\omega)\times du$ の π による像測度と互いに絶対連続な σ-有限測度である。

Connes - Woods による証明はフォン・ノイマン環のモジュラー理論に依拠しているが、本稿で測度論だけを用いた証明を与える。難かしいのは、随伴流のAT条件からTが加算機変換（と軌道同型）であることを導くことにあって、逆の方向の証明は、Hawkins [4] にある。

$Orb_T(\omega) \equiv \{T^n\omega \;;\; n \in \mathbb{Z}\}$

$[T]_* \equiv \{\varphi \;;\; \varphi$ は定義域 $\mathrm{Dom}\,\varphi$ と像 $\mathrm{Im}\,\varphi$ が Ω の可測部分集合である1対1，非特異可測写像で，$\varphi\omega \in Orb_T(\omega)$ a.e. $\omega \in \mathrm{Dom}\,\varphi\}$

$[T]_*^m \equiv \{\varphi \in [T]_* \;;\; m(\mathrm{Dom}\,\varphi) < \infty,\ m(\mathrm{Im}\,\varphi) < \infty\}$

有限個の $e_{\alpha,\beta} \in [T]_*$，$\alpha, \beta \in \Lambda$，が測度 $Q \sim m$ に関して

(i) $\mathrm{Dom}\,e_{\beta,\alpha} = \mathrm{Im}\,e_{\alpha,\gamma} \quad (\equiv e_\alpha)$，($e_\alpha$ をフロアーという)

(ii) $e_{\beta,\alpha}\, e_{\alpha,\gamma} = e_{\beta,\gamma}$

(iii) $\{e_\alpha \;;\; \alpha \in \Lambda\}$ は互いに排反

(iv) β 毎に $\dfrac{dQ\,e_{\beta,\gamma}}{dQ}(\omega) =$ 定数 $,\ \omega \in e_\gamma$

を満たす時，$\zeta \equiv \{e_{\alpha,\beta} \;;\; \alpha, \beta \in \Lambda\}$ を定数 Q－ヤコービアンをもつタワーという。$\bigcup_\alpha e_\alpha$ を ζ の台，$\mathrm{supp}\,\zeta$，という。

排反な台をもつ有限個のタワー $\zeta^i = \{e^i_{\alpha,\beta} \;;\; \alpha, \beta \in \Lambda^i\}$，$1 \leqq i \leqq n$，から作った $\{e^i_{\alpha,\beta} \;;\; \alpha, \beta \in \Lambda^i,\ i = 1, \cdots, n\}$ を多重タワーと言って $\sum_i \oplus \zeta^i$ で表わす.

多重タワー $\sum_{i=1}^n \oplus \zeta^i$ に対してタワー ζ.

$$\zeta = \{e_{i\alpha\gamma,\, j\beta\delta} \;;\; (i,\alpha,\gamma), (j,\beta,\delta) \in \Lambda\}$$

$$\Lambda = \{(i,\alpha,\gamma) \;;\; 1 \leqq i \leqq n,\ \alpha \in \Lambda_i,\ \gamma \in \Gamma_i\}$$

が

$$e_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\gamma \in \Gamma_i} e_{i\alpha\gamma}$$

$$e_{i\alpha\gamma, i\beta\gamma}(\omega) = e_{\alpha,\beta}(\omega), \quad \omega \in e_{i\beta\gamma}$$

を満たすとき、ξ は $\sum_{i=1}^{n} \oplus \xi^i$ を細分するという。

命題 1　非特異エルゴード変換が次を満たせば、加算機変換と軌道同型である：$\forall \varepsilon > 0$，P-ヤコービアンを持つ勝手な多重タワー $\sum_i \oplus \xi^i$ に対して、ある $Q \sim P$ と定数 Q ヤコービアンを持つタワー ξ が存在し

(i) ξ は $\sum_i \oplus \xi^i$ を細分し

(ii) $\| Q - P \|_{\bigcup_i \mathrm{supp}\, \xi^i} < \varepsilon$.

さて

$$d\nu(\omega, u) = dm(\omega)\, e^u du, \quad (\omega, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

とおくと ν は $\widetilde{T}$-不変 σ-有限測度になるが、ν の，$\widetilde{T}$-エルゴード分解と μ による条件付測度の族 $d\nu(\omega, u | x)$，$x \in X$，即ち

$$\int_{\Omega \times R} f(\omega, u)\, d\nu(\omega, u) = \int_X d\mu(x) \int_{\pi(\omega,u)=x} f(\omega, u)\, d\nu(\omega, u | x)$$

$$\forall f \in L^1(\Omega \times \mathbb{R}, \nu),$$

は．

$$\begin{cases} \nu(\pi^{-1}(x)^c \mid x) = 0 \\ \nu(\cdot \mid x) \text{ は 非原子的、} \tilde{T}\text{-不変、} \sigma\text{-有限なエルゴード測度} \end{cases}$$

を満たしている。ここで $\pi^{-1}(x)$, $x \in X$, は $\tilde{T}$ の各エルゴード成分である。

次に、$\mathbb{R}$ の可算稠密な部分群を1つ取り固定し、

$\mathcal{G} = \tilde{T}$ と T_r, $r \in \Gamma$, から生成される群

とする。$\mathcal{G}$ の作用がアメナブルであり、$\mathcal{G}$ の随伴流が T の随伴流 ($= (F_t)_{t \in \mathbb{R}}$) と一致することから Krieger の定理 [6] より T は $\mathcal{G}$ と軌道同型である。従がって (F_t) が AT 流れである時、$\mathcal{G}$ が加算機変換 と軌道同型であることを示せばよいが、実際、命題1の条件が成り立つことが以下のようにして分かる。

$h \in [\mathcal{G}]_*^\nu$ に対して $L^1(X, \mu)_+$-関数 $f_h(x)$ と有限測度 ψ_h を

$$f_h(x) = \nu(\operatorname{Im} h \mid x) \qquad x \in X$$

$$\psi_h(E) = \nu(hE), \qquad E \subset \operatorname{Dom} h$$

で定める。

今 $\sum_{i=1}^{n} \oplus \mathfrak{T}^i$ を定数 P-ヤコービアンをもつ多重タワーとする。各タワー $\mathfrak{T}^i$ の1階のフロアーの名前を $e_{\alpha(i)}$ とする。少しの工夫で

$$P = \nu \quad , e_{\alpha(i)} \text{上}, \quad 1 \leqq i \leqq n$$

と仮定してよいことが分かる。次の性質を示そう。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して、次をみたす有限個の $\lambda(i,j) \in \Gamma$, $h_j^i \in [\mathcal{G}]_*^\nu$, $h_i \in [\mathcal{G}]_*^\nu$, $1 \leqq j \leqq N_i$, が存在する；

$$(*)\begin{cases} (1) \quad \| \psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| < \varepsilon \\ (2) \quad \mathrm{Dom}\, h_i = e_{\alpha(i)} = \bigcup_{j=1}^{N_i} \mathrm{Dom}\, h_j^i \quad (\text{排反和}) \\ (3) \quad f_{h_j^i}(x) = f_{T^{-1}_{\lambda(i,j)-\lambda(1,1)} \circ h_1^1}(x) \\ (4) \quad \psi_{h_i} = \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i} \end{cases}$$

$$1 \leqq i \leqq n .$$

命題２　$h \in [\mathcal{G}]_*^\nu$, $f \in L^1(X,\mu)_+$, $\varepsilon > 0$, に対し
$\exists h_1 \in [\mathcal{G}]_*^\nu$ s.t.

(i) $\mathrm{Dom}\, h_1 = \mathrm{Dom}\, h$

(ii) $\| \psi_h - \psi_{h_1} \| \leqq \| f - f_h \| + \varepsilon$

(iii) $f_{h_1} = f$.

命題3 f_h $\quad (h \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*})$ が

$$f_h = \sum_{i=1}^{n} f_i \quad , \quad f_i \in L^1(X,\mu)_+$$

と書けているとする。すると、$\exists\, h_i \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*}$ s.t.

(i) $\quad \mathrm{Dom}\, h = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Dom}\, h_i \quad$ （排反和）

(ii) $\quad \psi_h = \sum_{i=1}^{n} \psi_{h_i}$

(iii) $\quad f_i = f_{h_i}$.

(※)の証明には性質ATを次のように使うとよい。即ち

$\varepsilon > 0$ と各 $f_{e_{\alpha(i)}}(x)$, $1 \leq i \leq n$, に対して $f \in L^1(X,\mu)_+$

と有限個の $r(i,j) \in \Gamma$, $1 \leq j \leq N_i$, が存在し

$$\left\| f_{e_{\alpha(i)}}(x) - \sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)}x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) \right\| < \varepsilon$$

$$i = 1, 2, \cdots, n.$$

を満たす。

次いで、$id|_{e_{\alpha(i)}} \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*}$ と $\sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)}x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) \in L^1(X,\mu)_+$ に命題2を適用

して、$\exists\, h_i \in [\mathcal{G}]^{\nu}_{*}$. s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{Dom}\, h_i = e_{\alpha(i)} \\ \| \psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| \leqq \| f_{h_i} - f_{e_{\alpha(i)}} \| + \varepsilon \\ f_{h_i}(x) = \sum_{j=1}^{N_i} e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) \end{cases}$$

が分かる。従がって

$$\| \psi_{h_i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| < 2\varepsilon$$

$$i = 1, \cdots, n$$

を得る。上から3行目の式に命題3を適用すると、

$$\begin{cases} e_{\alpha(i)} = \mathrm{Dom}\, h_i = \bigcup_{j=1}^{N_i} \mathrm{Dom}\, h_j^i \quad (\text{排反和}) \\ \psi_{h_i} = \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i} \\ e^{-r(i,j)} f(F_{r(i,j)} x) \frac{d\mu F_{r(i,j)}}{d\mu}(x) = f_{h_j^i}(x) \end{cases}$$

を満たす $h_j^i \in [\mathcal{G}]_*^\nu$ が得られる。

<u>命題4</u>

$$f_{T_r^{-1} \circ h}(x) = e^{-r} f_h(F_r x) \frac{d\mu F_r}{d\mu}(x)$$

$$h \in [\mathcal{G}]_*^\nu,\ r \in \Gamma$$

この命題を上から9行目の式に適用すれば、

$$f_{h_j^i}(x) = f_{T^{-1}_{r(i,j) - r(1,1)} \circ h_1^i}(x)$$

が得られる。 以上で性質(*)が成り立つのが確かめられた。

<u>命題5</u> $h, h' \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ に対して次は同値.

(a) $f_h = f_{h'}$

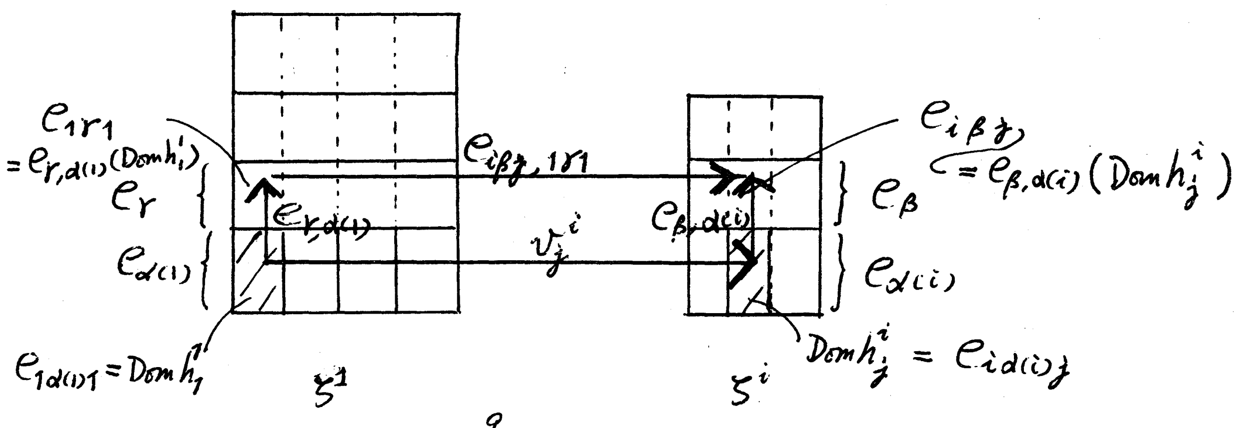
(b) $\exists v \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ s.t.

$$\begin{cases} \mathrm{Dom}\, v = \mathrm{Dom}\, h' \\ \mathrm{Im}\, v = \mathrm{Dom}\, h \\ \psi_h(v\,\cdot) = \psi_{h'}(\cdot) \end{cases}$$

さて命題5を性質(*)の(3)に適用することにより.

$$\nu(h_j^i \circ v_j^i \cdot) = \psi_{h_j^i}(v_j^i \cdot) = \psi_{T^{-1}_{r(i,j)-r(1,1)} \cdot h_1^1}(\cdot)$$
$$= e^{-r(i,j)+r(1,1)}\,\nu(h_1^1 \cdot)$$

を満たす $v_j^i \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ が得られる。 そこで各タワー $\xi^{(i)}$ の1階のフロアー $e_{\alpha(i)}$ を $\mathrm{Dom}\, h_j^i$, $1 \leq j \leq N_i$, で分割し次の可換図を満たすように $e_{i\beta j,1r1} \in [\mathfrak{g}]_*^\nu$ 等を定める:



最後に測度 Q を

$$Q(e_{\beta,\alpha(i)}E) = \frac{P(e_\beta)}{P(e_{\alpha(i)})}\nu(h_j^i E)$$

$$E \subset \mathrm{Dom}\, h_j^i$$

と定めると、タワー ξ

$$\xi = \{e_{i\alpha j} \ ; \ 1 \leqq i \leqq n, \ \alpha \in \Lambda_i, \ 1 \leqq j \leqq N_i\}$$

は、多重タワー $\sum_{i=1}^{n} \oplus \xi^i$ を細分し、定数 Q－ヤコービアンを持ち、

$$\| Q(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) - P(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \|$$

$$= \| \sum_{j=1}^{N_i} \psi_{h_j^i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \|$$

$$= \| \psi_{h^i}(\cdot) - \nu(e_{\alpha(i)} \cap \cdot) \| < 2\varepsilon \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

を満たしている。こうして $\mathcal{G}$ が命題1の条件を満たすことが分かった。□

詳しい証明は [3] [5] にある。

文献

[1] Araki, H. and Woods, J., Classification of factors, Publ. RIMS. Kyoto Univ. 4 (1968), 51–130

[2] Connes, A. and Woods, J., Approximately transitive flows and ITPFI factors, Ergod. Th. and Dynam. Sys., 5 (1985), 203–236

[3] Hamachi, T., A measure theoretical proof of Connes Woods theorem on AT-flows (preprint)

[4] Hawkins, J., Properties of ergodic flows associated with product odometers, Pacific J. Math., 141 (1990), 287-294

[5] 伊藤雄二，濱地敏弘. エルゴード変換とフォン・ノイマン環論，(1991) 紀伊国屋書店

[6] Krieger, W., On ergodic flows and isomorphism of factors, Math. Ann., 223 (1976), 19-70