数理解析研究所講究録
751巻 1991年 161-177

Structure of Subfactors and *-endomorphisms

大阪教育大　長田まり恵(Marie CHODA)

超有限連続型有限因子環Mの部分因子環 N は，有限次元でない限り，Connes の結果により超有限連続型因子環となるから，von Neumann の結果により，N は常にMと同型である。従って，MからNへの * - 同型写像，即ち，N を値域とするMの * - endomorphism が，多く存在する。その様な * - endomorphism で，MとNの関係を，最もよく反映するものは，どの様な特徴を持っているのだろうか？　この疑問は，次の事実が動機となっている。即ち，Jones の指数理論が導入されて以来，超有限連続型有限因子環の部分因子環で，相対可換子環が，自明なもの々取り得る指数の値が問題となっており，Jones, Wenzl, Goodman-Harpe-Jones, Ocneanu, Haagerup-Schou 等により，新らしい部分因子環が構成されてきたが，それ等は，或る * - endomorphism と密接に，結びついている。　ここでは，その様な * - endo morphism について，述べる。

§1. Standard $*$-isomorphisms.

全体を通して，M は II_1-factor で canonical trace τ をもつものとする。 $\mathrm{End}(M,\tau)$ によって，τ を保存する M の $*$-endomorphism 全体を示す。 τ の忠実性と正規性により，$\rho \in \mathrm{End}(M,\tau)$ に対して，$\rho(M)$ は，M の subfactor となる。 $\rho(M)' \cap M = \mathbb{C}1$ となるとき，ρ は<u>既約</u>であるという。 Powers にならって，<u>ρ の指数</u>を $[M : \rho(M)]$ で定義し，<u>$\mathrm{Ind}\,\rho$</u> と記す。 $\rho, \sigma \in \mathrm{End}(M,\tau)$ に対して，$\rho(x) = u\sigma(x)u^*$ を全ての $x \in M$ に対して充すユニタリ $u \in M$ が，存在するとき，ρ と σ はユニタリ同値であるという。 $M \supset \rho(M)$ が finite depth な関係にあるとき，ρ は <u>finite depth</u> であるといい $M \supset \rho(M)$ の depth でもって，<u>$\mathrm{depth}\,\rho$</u> を定義する。 M から $\rho(M)$ への条件付期待値を，E_ρ で記す。

$$E_\rho(e) = (\mathrm{Ind}\,\rho)^{-1}1 \quad かつ \quad \rho^2(M) = \{e\}' \cap \rho(M)$$

を充す射影 $e \in M$ が存在するとき，ρ は <u>basic</u> であるといい この様な条件を充す e を <u>basic projection</u> for ρ と呼ぼう。

$$M = \sigma\text{-weak closure of } \bigcup_j (\rho^j(M)' \cap M)$$

を充すとき，ρ は <u>generating property</u> を充すという。 basic かつ generating property を充す ρ を，<u>standard</u> な $*$-endomorphism と呼ぶ。

補題 1. 指数と性質 basic, generating property 及び depth は unitary 同値に関して，不変である。

補題 2. $\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ が generating property を充すならば，ρ は Powers の意味で，shift である；

$$\bigcap_j \rho^j(M) = \mathbb{C}1.$$

§2. 例

ここでは，以下基本的な役割を果すいくつかの例について調べる。最初に掲げる例1は，Goodman－Harpe－Jones が，用いたものである。

例1. $C_0 \subset B_0$ は有限次元 von Neumann 環で，inclusion matrix のノルムの二乗 β が $2 \leqq \beta \leqq 4$ となっているものとする。$\beta = 2 + q + q^{-1}$ を充す数 q が存在する。この対に対する modulus β のマルコフトレースを τ とする。B_0 から C_0 への τ に関する条件付期待値に対応する射影を e_0 とする。$B_1 = \langle B_0, e_0 \rangle$ とし，$B_0 \subset B_1$ に対する basic extension の列

$$B_0 \subset B_1 \subset \cdots\cdots \subset B_j = \langle B_{j-1}, e_{j-1} \rangle \subset \cdots\cdots$$

と射影の列 $e_0, e_1, e_2, \cdots\cdots$ を得る。$g_j = (q+1)e_j - 1$ とおき，$C_1 = g_0 B_0 g_0^{-1}$，$C_j = \{C_{j-1}, e_{j-1}\}$ の生成する algebra とおけば増大列：$C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_j = \mathrm{alg}\{C_{j-1}, e_{j-1}\} \subset \cdots$ が得られる。τ のマルコフ性により，τ は各 B_j に拡張され

る。 τに依るGNS表現πに対し，$B=\pi(\bigcup_j B_j)''$，$C=\pi(\bigcup_j C_j)''$とすると，$B\supset C$はII$_1$－因子環で，$[B:C]=\beta$を充す。ρを$x\in B$に対して次の様に定義する；

$$\rho(x)=\lim_{k\to\omega} g_0 g_1 \cdots g_k x g_k^* \cdots g_1^* g_0^*$$

<u>補題3.</u> ρはbasicであるが，generating propertyをもたない。ただし$\dim C_0 \geqq 2$とする。

証明は，$\rho(B)=C$なることと，$\rho(g_j)=g_{j+1}$なることを用いて，e_0がρに対するbasic projectionであることを示す。又$\rho(x)=x$がすべての$x\in C_0$に対して成立することと補題2により，generating propertyをもたない事が判る。//

<u>例2.</u> $M\supset N$をII$_1$－因子環の対で，$[M:N]<+\infty$とする。Jonesのbasic constructionを繰り返して得られるtowerを

$$N\subset M\subset M_1=\langle M,e_1\rangle\subset\cdots\subset M_j=\langle M_{j-1},e_j\rangle\subset\cdots$$

とする。以下この小文では，M_j，e_jは，ここで表われるものを示す。Mのcanonical trace τはマルコフ性により，各M_jにまで拡張され，それに関する$\bigcup_j M_j$のGNS表現πを用いて，$M_\infty=\pi(\bigcup_j M_j)''$とおく。各$M_j$における$J_j$（canonical conjugation）を用いて，

$$\Gamma(x)=J_{j+1}J_j x J_j J_{j+1} \qquad (x\in M'\cap M_{2j})$$

で定義される$M'\cap M_\infty$から$M_2'\cap M_\infty$への$*$－isomorphism Γは，Ocneanuのcanonical shiftと呼ばれる。

このcanonical shiftは，standardである。

実際，e_2がΓに対してbasic projectionとなり，generating propertyを充すことも簡単に示せる。

例3. Jonesによる射影列$\{e_j ; j \geq 1\}$により生成されるII_1−型因子環をRとし，$\theta(e_j) = e_{j+1}$ $(^\forall j)$とおけば，θはRのτ−不変な$*$−endomorphismになる。$\theta(R) = \{e_j ; j \geq 2\}''$であり，$e_1$は$\theta$に対するbasic projectionとなる。$\{e_j ; j\}$の充す基本的な性質により，$\theta$はgenerating propertyをもち，standard $*$−endomorphismとなる。このstandard $*$−endomorphism θは，$\mathrm{Ind}\,\theta < 4$のときには，例1で定義された形式で表わすことができる；

$$\theta(x) = \lim_{k \to \infty} u_1 u_2 \cdots u_k \, x \, u_k^* \cdots u_2 u_1 \qquad (x \in R),$$

ただし $u_k = (q+1)e_k - 1$，$(q + q^{-1} + 2) = \mathrm{Ind}\,\theta$。

例4. Ocneanuは指数<4となる超有限型II_1−因子環の部分因子環の分類を行なう為に，相対可換子環のtower

$$M' \cap M_1 \subset M' \cap M_2 \subset \cdots \subset M' \cap M_j \subset \cdots$$

の解析を行ない，string algebra上のflat connectionを用いて，各$M' \cap M_j$上で$*$−endomorphism ρを定義することにより，彼の不変量を持つ部分因子環を与える方法を述べている。定義は，簡単ではないので，彼の文献を参照して下さい。このの$*$−endomorphism ρは，$M' \cap M_\infty$から$M_1' \cap M_\infty$への

最も興味深い standard なものの例となる。尚，例2に於ける Γ は，φ^2 によっても定義され得ることを Ocneanu は記している。

§3. 有限可換群による接合積に対する basic extension

II_1－型因子環の対 $M\supset N$ に対する Jones basic extension 及び相対可換子環の tower は $M\supset N$ の関係が，接合積又は fixed point algebra で与えられる場合には，$M'\cap M_\omega$ の standard $*$－endomorphism を調べるのに有用な，他の表示が，可能である。ここでは，それについて記す。

N は有限因子環，G は N の外部自己同型写像のなす可換有限群，M を N の G による接合積とする。$g\in G$ に対する M の canonical なユニタリを $u(g)$ と表わす。u は G の M の中へのユニタリ表現となる。G の相対 $\hat{G}$ の元 γ は次の定義により M の自己同型写像と考えることができる。$\gamma(u(g)a)=\langle\gamma,g\rangle u(g)a$，$(a\in N,\ g\in G)$。このとき，自己同型写像 $\gamma\in\hat{G}$ は，$u_1(\gamma)(x\xi_0)=\gamma(x)\xi_0$ $(x\in M)$ を充す $L^2(M,\tau)$ 上のユニタリ $u_1(\gamma)$ を induce する，ただし ξ_0 は $L^2(M,\tau)$ における M に対する cyclic vector である。$L^2(M,\tau)$ 上の M と $u_1(\hat{G})$ により生成される von Neumann 環は因子環となるが，これが，対 $M\supset N$ から basic extension により得られる環 M_1 に他ならず，Jones projection e_1 は $e_1=\sum_{\gamma\in\hat{G}}u_1(\gamma)/|G|$ で与えられる。この方法を繰り返すことにより，ユニタリの列

$\{u_{2i-1}(\gamma)\ ;\ \gamma\in\hat{G}\}$ と $\{u_{2i}(g)\ ;\ g\in G\}$ で

$$M_{2i}=\{M_{2i-1},u_{2i}(G)\}'',\quad M_{2i+1}=\{M_{2i},u_{2i+1}(\hat{G})\}''$$

を充すものが得られる。Jones projection e_i は夫々

$$e_{2i}=\sum_g u_{2i}(g)/|G|,\quad e_{2i+1}=\sum_\gamma u_{2i+1}(\gamma)/|G|$$

で与えられる。

補題4. すべての j に対して，次が成立する；

$$M_{2j}=\{u_{2j+2i}(G),u_{2j+2i+1}(\hat{G})\ ;\ i\geq 1\}'\cap M_\infty$$

$$M_{2j+1}=\{u_{2j+2i+1}(\hat{G}),u_{2j+2(i+1)}(G)\ ;\ i\geq 1\}'\cap M_\infty$$

$$J_{2j}u_{2j}(g)J_{2j}=u_{2j+2}(g),\quad J_{2j+1}u_{2j+1}(\gamma)J_{2j+1}=u_{2j+3}(\gamma)$$

$$J_{2j+1}u_{2j+2}(g)J_{2j+1}=u_{2j+2}(g),\ [J_{2j+2},u_{2j+3}(\gamma)]=0$$

証明 M_{2j}, M_{2j+1} が上記の様な関係をもつことは，定義により，簡単に示すことができる。次に $M_{2i}\supset M_{2i-2}$ に対する projection (即ち $M_{2i}=\langle M_{2i-2},e\rangle$) を e とすると，e は

$$e=\sum_{t\in\hat{G}}\sum_{k\in G}(\langle k,t\rangle/|G|^2)\,u_{2i}(k)u_{2i+1}(t)u_{2i+2}(k)$$

で与えられる。この e を用いると，$u_{2i}(g)\in M_{2i-2}'\cap M_{2i}$ なる事実に注目すれば，次の式を得ることができる；

$$J_{2i}u_{2i}(g)J_{2i}=\sum_{t\in\hat{G}}\sum_{h\in G}u_{2i-1}(t)u_{2i}(h)\,e\,u_{2i}(hg)^*u_{2i-1}(t)^*$$

この等式を用いることにより，求める関係式が出てくる。//

次に $M'\cap M_\infty$ における standard $*$-isomorphism の例を掲

げる。

例5. Gは有限可換群だから，Gから$\hat{G}$の上への同型写像ψが存在する。$g \in G$, $\gamma \in \hat{G}$とすべてのiに対して，

$$\rho(u_{2i}(g)) = u_{2i+1}(\psi(g)), \quad \rho(u_{2i+1}(\gamma)) = u_{2i+2}(\psi^{-1}(\gamma))$$

とおけば，ρは$M' \cap M_\infty$から$M_1' \cap M_\infty$への$*$-isomorphismで，basic かつ generating property をもつ。basic projection は，$\frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} u_2(g)$で与えられる。

§4. M_∞におけるMの正規性

von Neumann の double commutant 定理の一般化として，Kadison は von Neumann 環Aの部分環Bが次の条件を充すとき，BはAで正規であると呼んだ；$(B' \cap A)' \cap A = B$。この§では，MがM_∞で正規であることを示す。この正規性は，以下で，self-conjugate（Longo の意味で）な$*$-endomorphismの決定に，基本的な役割を果たす。

命題5。$M \supset N$をII_1-因子環の対で次の条件のうちのどちらかを充すとする；

(i) $[M:N] \leqq 4$

(ii) MはNの有限可換な群Gによる外部作用に関する接合積である。

そのときMはM_∞の中で正規である。

証明。(i)の場合はSkauの補題$\{e_1, e_2, \cdots\}' \cap M_\infty = N$

を用いる。(iii)の場合には，補題4を用いる。//

§5. standard *-isomorphism の特徴付け

この節では，standard *-isomorphism ρ が $M \supset N$ のある種の対に対しては決定されることについて述べる。$\rho \in \mathrm{End}(M)$ が finite depth のときには，$M \supset \rho(M)$ の関係を調べることは，$M \supset N = \rho(M)$ に対する相対可換子環の tower に対して $M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ での関係を調べることと同値であり，又 $M' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への *-isomorphism を調べることと，$M \supset N$ が超有限連続型有限因子環のときには，同値である。従って $M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ における議論が，本質的な役割を果す。記号の簡略化のため，

$\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ に対し，$M \supset \rho(M)$ に対する paragraph を，ρ の graph と呼び，$\mathrm{Graph}(\rho)$ で，記すことにする。$\mathrm{Graph}(\rho)$ が A型の coxeter graph のときには，standard なものは，例2で掲げた $\theta(\rho)$ 本質的にはないことを先づ示す.

補題 6. e を $\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ に対する basic projection とする。$e_j = \rho^{j-1}(e)$ とおくと，列 $\{e_j ; j \geq 1\}$ は $\lambda = (\mathrm{Ind}\,\rho)^{-1}$ に対する Jones の関係（即ち 次の関係）を充す；

$$e_i e_j e_i = \begin{cases} \lambda e_i & (|i-j| = 1) \\ e_i e_j & (|i-j| \neq 1) \end{cases}$$

命題 7. M を hyperfinite II_1-factor とし，$\rho \in \mathrm{End}(M, \tau)$ が

standard, Ind $\rho < 4$ とする。Graph(ρ) が Type A ならば，ρ は例2の θ である．

証明．e を ρ の basic projection とすると，補題6により $\rho^j(e) = e_j$ は Jones の関係を充す。$\rho(M)' \cap M \supset \{1, e_0, \cdots, e_{j-1}\}''$ で Graph(ρ) が Type A かつ Ind $\rho < 4$ なることより $\rho^j(M)' \cap M = \{1, e_0, \cdots, e_{j-1}\}''$ が得られる．他方 ρ は generating property をもつから $M = \{e_j ; j \geq 0\}''$。従って $\rho = \theta$。 //

次の補題は，$M' \cap M_\infty \supset M_1' \cap M_\infty$ 上の Longo の意味での self-conjugate な $*$-endomorphism は，θ と密接な関係を持つことを示す．

補題8．$M \supset N$ は II_1-factor の対で，次の (i), (ii) の，いづれかを充すとする；

(i) $[M : N] \leq 4$,

(ii) M は N の外部自己同型写像の有限可換群による接合積．

$M' \cap M_\infty$ から $M_1' \cap M_\infty$ への $*$-isomorphism σ が $\sigma^2(M' \cap M_\infty) = M_2' \cap M_\infty$ を充すならば，次式を充す；

$$\sigma(M_i' \cap M_j) = M_{i+1}' \cap M_{j+1} \qquad (i \leq j).$$

証明．命題5を用いる事により示せる．

定理9．M が II_1-factor N の外部自己同型写像の有限可換群による接合積ならば，次の二つの集合の間に，1対1の

対応 Φ が存在する：

$\{\rho$; $*$-isomorphism of $M'\cap M_\infty$ onto $M_1'\cap M_\infty$, $\rho^2=\Gamma\}$ / unitary equiv.

$$\updownarrow \Phi$$

$\{(\gamma,\psi)$; $\gamma\in\hat{G}$, ψ は G から $\hat{G}$ の上への同型写像$\}$.

証明。 補題 4 により $\Gamma(u_{2i}(g))=u_{2i+2}(g)$ かつ $\Gamma(u_{2i+1}(\gamma))=u_{2i+3}(\gamma)$ $(g\in G,\ \gamma\in\hat{G})$ が判る。 G から $\hat{G}$ への同型写像 ψ と $\gamma\in\hat{G}$ に対して,

$$\begin{cases}\rho(u_{2i}(g))=\langle\gamma,g\rangle\, u_{2i+1}(\psi(g)) & (g\in G)\\ \rho(u_{2i+1}(x))=\langle\gamma,g\rangle^{-1}\, u_{2i+2}(\psi^{-1}(x)) & (x\in\hat{G})\end{cases}$$

と定義する。 この ρ は求める条件を充すこと, 条件を充す ρ は必らずこの関係を充すような $\{\gamma,\psi\}$ を持つこと 又, この様な $\rho\longleftrightarrow\{\gamma,\psi\}$ なる関係は 1対1なること等が示せる. //

系 10. M を命題 9 に於けるものとする。 $M'\cap M_\infty$ から $M_1'\cap M_\infty$ への $\rho^2=\Gamma$ を充す $*$-isomorphism は $\rho(e_i)=e^{\gamma}_{i+1}$ $(\gamma\in\hat{G})$ を充す. ただし e^{γ}_{i+1} は次で定義される.

$$e^{\gamma}_{2i}=\frac{1}{|G|}\sum_g\overline{\langle\gamma,g\rangle}\,u_{2i}(g),\quad e^{\gamma}_{2i+1}=\frac{1}{|G|}\sum_g\langle\gamma,g\rangle\,u_{2i+1}(\psi(g)),$$

ψ は G から $\hat{G}$ の同型写像。 この e^{γ}_{2i+1} は ψ の取り方に依らぬ.

定理 11. $M\supset N$ は II_1-factor の対で $[M:N]\leqq 4$ とする。 σ を $M'\cap M_\infty$ から $M_1'\cap M_\infty$ への $*$-isomorphism で $\sigma^2(M'\cap M_\infty)=M_2'\cap M_\infty$ を充すとする。

(1) $[M:N]=2$ ならば $\sigma(e_i)=e_{i+1}$ $(\forall i)$ であるか又は

$\sigma(e_i) = 1 - e_i$ $(\forall i)$ かである。

(ii) $[M:N] \neq 2$ かつ $\dim(M' \cap M_2) = 2$ ならば，

$\sigma(e_i) = e_{i+1}$ $(\forall i)$ である。

証明. 先づ $[M:N] = 2$ ならば $\dim(M' \cap M_2) = 2$ が成立する事に注意する. の条件より補題8を用いて, $\sigma(M_i' \cap M_j) = M_{i+1}' \cap M_{j+1}$ 従って, $\sigma(\mathbb{C}e_i \mathbb{C}'') = \mathbb{C}e_{i+1}\mathbb{C}''$ が成立する。この事より(ii)の場合は簡単に成立する。(i)は，系10による。//

補題12. $R \subset A$ を II_1-factor の対で，$[M:R] > 2$ かつ $\dim(R' \cap \langle A, e_R \rangle) = 2$ とする。$\sigma, \rho \in \mathrm{End}(A, \tau)$ が R 上で一致し $\sigma(A) = \rho(A)$ を充すならば $\sigma = \rho$。

定理11と補題12により，self-conjugate な $*$-endomorphism, 即ち $\rho^2 = \top$ となる様な ρ は，決定できる事が判る。それを指数4以下の hyperfinite II_1-factor の対に対して示す。尚，定理11を適用できる様な hyperfinite でない II_1-factor の対の面白い例としては，popa が最近与えたものがある。以下でする議論は他の指数の場合にも，適用可能である。詳しくは，他の場所で，示す積りである。

応用1. $M \supset N$ が paragraph A_n を持つ場合.

$\dim(M' \cap M_2) = 2$ が成立する。$[M:N] = 2$ ならば，定理11により $\sigma(e_i) = e_{i+1}$ $(\forall i)$ か $\sigma(e_i) = 1 - e_{i+1}$ $(\forall i)$ かが成立する。従って，定理9により，$\sigma^2 = \top$ となるものは，

2つ存在する。$[M:N] \neq 2$ ならば定理11により $\sigma^2 = I$ となるσは唯一つだけ存在し，それは例2のθでなければならぬ。

応用2. $M \supset N$ の paragraph が D_n のとき.

$A = M' \cap M_\infty \supset B = M_1' \cap M_\infty$ とし，$R = \{e_i ; i \geq 2\}'' \supset R_\lambda = \{e_i ; i \geq 3\}''$ とする。
$$\begin{array}{ccc} A & \supset & B \\ \cup & & \cup \\ R & \supset & R_\lambda \end{array}$$
は commuting square をなし

$R \supset R_\lambda$ の paragraph は A_{2n-3} である。このとき $A \supset B$ と $R \supset R_\lambda$ の関係は，Okamoto の結果により，D_n と A_{2n-3} との関係のみによって決定される。所で D_n と A_{2n-3} の関係は，それを Bratteli diagram とみなすことにより，D_n は A_{2n-3} の周期2の outer automorphism による接合積とみなされるから $A \supset B$ は $R \supset R_\lambda$ の周期2の outer automorphism による接合積と考えられる。

補題13. $\sigma \in \mathrm{End}(A, \tau)$ に対し，$E_\sigma(e) = (\mathrm{Ind}\,\sigma)^{-1} 1$ となる射影 $e \in R$ が存在するとする。$E_R(u) = 0$ となるユニタリ $u \in M$ に対して，$E_R(\sigma(u)) = 0$ が常に成立する。

補題14. A が II_1-因子環 R の外部自己同型写像のなす有限可換群の接合積で $\sigma \in \mathrm{End}(A, \tau)$ は既約であるとする。すると $\hat{G}$ と $\{\rho \in \mathrm{End}(A, \tau) ; \rho(A) = \sigma(A), \rho|R = \sigma|_R\}$ との間には1対1の対応が存在する。

$M \supset N$ の paragraph が D_n 型のとき，n は偶数でなければ

ならぬことが, Ocneanu, 河東, 泉等により示されているが, D_4 と D_n $(n \neq 4)$ とでは, self dual $*$-endomorphism の決定に, 大きな違いが生じる。 理由は, D_4 のときには, $\dim(M' \cap M_2) = 3$ で, D_n $(n \neq 4)$ のときには, $\dim(M' \cap M_2) = 2$ に依る。

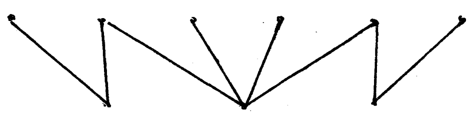
paragraph が D_4 のときには, 定理9により, $\sigma^2 = \Gamma$ となる A から B への $*$-isomorphism σ は6個存在する。 paragraph が D_n $(n \neq 4)$ のときには, 定理11, 補題13, 補題14により, 求める σ は2個で, 互いに可換である。

応用3. $M \supset N$ の paragraph が E_6 のとき.

$[M:N] > 2$ かつ $\dim(M' \cap M_2) = 2$ なることが, E_6 のグラフから判る。 応用2のときと同様な形で, A, B, R, R_λ を置く。 このとき $R \supset R_\lambda$ の包含関係は, A_{11} なるグラフによって, 決定される。 従って, $A \supset R$ の関係は, 十分大きな n に対して,

$$\begin{array}{ccc} \{e_2, \ldots, e_{2n}\}'' & \subset & \{M' \cap M_{2i}\} \\ \cup & & \cup \\ \{e_3, \ldots, e_{2n}\}'' & \subset & \{M_1' \cap M_{2i}\} \end{array}$$

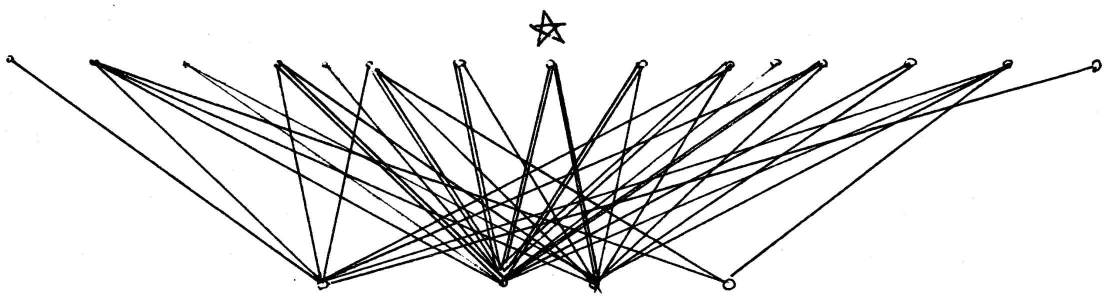
なる commuting square で決まるが, これらは, Evans-Gould, Okamoto, pasquier 等の結果を用いると, 次のグラフで表わされる;



この事と補題12を用いると, $\sigma^2 = \Gamma$ となるものは, Ocneanu による $*$-endomorphism 1かないことが判る。

応用4. $M \supset N$ の paragraph が E_8 のとき

応用3 のときと同様に、$[M:N]>2$ かつ $\dim(M' \cap M_2)=2$ となることが E_8 のグラフから判る。 A, B, R, R_λ を応用2 のときと同様に定めると、求める $*$-isomorphism (AからBへの) は R を R_λ に移し、R上では、unique であることが判る (定理11)。 又 $A \supset R$ の関係は、応用3 のときと同様な方法で求められ、グラフ A_{29} から求まる環のグラフ E_8 から求まる環へのうめこみにより、決定される。 Evans-Gould の結果を用いると、それは、次の様なグラフで表わすことが可能になる。



図では見えにくいかも知れないので、このグラフを行列で表わすと、次の様になる。 ただし紙面の都合上、転置行列を示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

グラフの☆を中心にして、上段の頂点を左右対称に移し☆と下段の頂点は動かさない様な写像はグラフの自己同型写

像となり，Ocneanuの不変量で，μ, Wを保存するので，Aの自己同型写像で，Rを不変にする。又上のグラフから$R' \cap \langle A, e_R \rangle$の中に，$e_R$とトレースの値が等しい射影は，他にもう一つしか存在しないことが判る。以上のことを総合すると，$\sigma^2 = \Gamma$となる$M' \cap M_\omega$から$M_1' \cap M_\omega$への同型写像は2つであることが導ける。

Ocneanuの結果より，$M \supset N$が$[M:N] < 4$なるhyperfinite II_1-factorの組のときには，上のどれかでなければならないことより，その様な組についてのみ議論した。この方法により，$A \supset R$の関係が決定できる組合せならば，他の場合についても議論可能である。

参考文献（順不同）

◉ V. F. R. Jones : Index for subfactors, Invent. Math. 72 (1983), 1–15.

◉ F. Goodman, P. dela Harpe, V. F. R. Jones; Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI publications 14, Springer, 1989

◉ A. Ocneanu ; Quantized group string algebras and Galois theory for algebras, in "Operator algebras and applications", vol. 2 (Warwick, 1987), London Math. Soc. Lecture note 136.

◉ S. Popa, Classification of subfactors : reduction to commuting squares, Invent. Math. 101 (1990), 19–43.

⊙ D. Evans, J. D. Gould ; Embeddings and dimension group of non-commutative AF algebras associated to models in classical statistical Mechanics ; preprint

⊙ S. Okamoto ; Invariants for subfactors arising from coxeter graphs, preprint.

⊙ R. Longo ; Index of Subfactors and statistics of Quantum fields, I, II. Commun. Math. Phys. 126 (1989) 217–247, 130 (1990), 285–309.

⊙ M. Pimsner, S. Popa ; Iterating the basic construction, Trans, Amer. Math. Soc., 310 (1988), 127–133.

⊙ Y. Kawahigashi ; On flatness of Ocneanu's connections on the Dynkin diagrams and classification of subfactors preprint.

⊙ M. Izumi ; in preparation.

⊙ M. Choda ; Entropy for canonical shifts, to appear in Trans, Amer, Math. Soc.

⊙ M. Choda, Hiai ; Entropy for canonical shifts II, to appear in RIMS, Kyoto Univ.

⊙ M. Choda ; Duality for finite bipartite graphs.

⊙ R. T. Powers ; An index theory for semigroups of *-endomorphisms of B(H) and Type II_1 factors, Canad. J. Math., 40 (1988), 他