数理解析研究所講究録
751巻 1991年 143-160



# Index Theory and Longo's Method

京大数理研　泉　正己

(Masaki Izumi)

この小文では、Longoが[L2]で定義したsectorの理論を紹介し、そのindex theoryにおける重要性を応用によって示す。具体的な応用としては、

(1) paragroup $E_7$, $D_{odd}$ の非存在性の証明

(2) fixed point algebra 及び depth 2 の inclusionの特徴付け

(3) type $\mathrm{III}_1$ AFD factor の index 3 の subfactor の分類

(4) Cuntz algebra の index finite な endomorphism の構成

などがある。

詳しくは、sector については[L2], [I1], (1)(2)(3)については[I1], (4)については[I2]を参照されたい。

## §1. Longo's sector

$M$を type III factor として、$M$の endomorphism 全体の集合 $\mathrm{End}(M)$に次の同値関係を導入する。

$\rho_1 \sim \rho_2$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{End}(M) \Longleftrightarrow$ $M$の unitary $u$が存在して

$$\rho_1 = \mathrm{Ad}\, u \circ \rho_2$$

Longo は $\mathrm{Sect}(M) \equiv \mathrm{End}(M)/\sim$ によってsectorを定義した。歴史的にはsectorという名は、field theoryのsuper selection sectorから来ているのだが[D.H.R.]ここでは、詳しくは触れない。

Sect(M)には直和、積、Conjugationが定義される。$P_1, P_2 \in M$ をnon-zero projectionで $P_1+P_2=1$ となるもの、$v_1, v_2 \in M$ をisometryで $v_1v_1^*=P_1$, $v_2v_2^*=P_2$ を満たすものとする。このとき与えられた $\rho_1, \rho_2 \in \mathrm{End}(M)$ に対して $\rho(x)=v_1\rho_1(x)v_1^*+v_2\rho_2(x)v_2^*$ で $\rho \in \mathrm{End}(M)$ を定義し、Sect(M)に和，積を

$$[\rho_1]\oplus[\rho_2] \equiv [\rho] \quad , \quad [\rho_1][\rho_2] \equiv [\rho_1\rho_2]$$

と定義する。上の和，積が、代表元，$P_i$, $v_i$ によらないことは簡単に示せる。Conjugationの定義は複雑なので[L2][I1]を読んでいただきたい。ここでは次を満たすことだけを注意しておく。$[\rho] \in \mathrm{Sect}(M)$ に対してconjugate sectorを $\overline{[\rho]}$ と書くことにする。(しばしば $\overline{[\rho]}$ の代表元を $\bar{\rho}$ と書く。)

$$\overline{[\rho_1]\oplus[\rho_2]} = \overline{[\rho_1]} \oplus \overline{[\rho_2]} \quad \overline{[\rho_1\rho_2]} = \overline{[\rho_2]}\,\overline{[\rho_1]} \quad \rho_1, \rho_2 \in \mathrm{End}(M)$$

$$[\alpha] \in \mathrm{Out}(M) \Longrightarrow \overline{[\alpha]} = [\alpha^{-1}]$$

$\rho \in \mathrm{End}(M)$ が $\dim M\cap\rho(M)' < \infty$ を満たすとき、$[\rho] \in \mathrm{Sect}(M)$ の既約分解が定義される。$\{P_i\} \subset M\cap\rho(M)'$ をminimal projectionsで $\sum_i P_i = 1$ を満たすもの、$\{v_i\}$ $M$ をisometriesで $v_iv_i^* = P_i$ を満たすものとする。このとき $\rho_i(x) \equiv v_i^*\rho(x)v_i$ とすれば、上

で定義した意味で $[\rho]=\bigoplus_i[\rho_i]$ となる。$[M:\rho(M)]<\infty$ のときは常に $\dim M\cap\rho(M)'<\infty$ となる。$M\cap\rho(M)'$ の minimal projection $p_i$ と $[\rho_i]$ が対応していることを注意されたい。

Conjugate sector に対しては次の特徴付けがある。

**1)** $\rho\in\mathrm{End}(M)$, $\gamma: M\to\rho(M)$ を canonical endomorphism (定義, 性質については[L3]参照) とすると

$$[\rho\bar\rho]=[\gamma]$$

2) $\rho_1,\rho_2\in\mathrm{End}(M)$ が $[M:\rho_i(M)]<\infty$, $M\cap\rho_i(M)'=\mathbb{C}1$ $i=1,2$ を満たすとする。このとき次は同値

(1) $[\rho_1\rho_2]$ 又は $[\rho_2\rho_1]$ が identity sector $[id]$ を含む

(2) $[\rho_1]=\overline{[\rho_2]}$

このとき $[id]$ の multiplicity は 1である。

次の事実は sector と index theory とを結び付ける上で重要である。

$M\supset\rho(M)\supset\rho\bar\rho(M)\supset\rho\bar\rho\rho(M)\supset\cdots$ は $M\supset\rho(M)$ に付随する tower である。

このように index theory では, $M\supset\rho(M)$ に対し、自然に $[\rho\bar\rho]^n$ $[\rho\bar\rho]^n[\rho]$ という sectors が現われる。これらが $M\supset\rho(M)$ の構造に対する豊かな情報を与えてくれるのである。$[\rho\bar\rho]^n$, $[\rho\bar\rho]^n[\rho]$ の分解によって得られる sectors を $[\rho]$ の descendant sectors 、$[\rho\bar{\rho}]^n$ (resp. $[\rho\bar{\rho}]^n[\rho]$) の分解によって得られるものを $\rho$-even (resp. $\rho$-odd) と呼ぶ。

sectorをあつかう上では minimal index $[M:\rho(M)]_0$ よりも statistical dimension $d_\rho = [M:\rho(M)]_0^{\frac{1}{2}}$ のほうが便利である。その理由を説明するには、次の定理が必要である。

定理 (Hiai) $M$をfactor、$N$をそのsubfactorとし、$E \in E(M,N)$ ($E(M,N)$は$M$から$N$へのfaithful normal conditional expectation全体)とすると 次は同値

1) $E$はminimal expectation

2) $E|_{M\cap N'}$, $E^{-1}|_{M\cap N'}$ がtraceで $E^{-1}|_{M\cap N'} = (\mathrm{Index}E)E|_{M\cap N'}$

3) $\mathrm{Index}\,E_e = E(e)^2\,\mathrm{Index}\,E$ for all projection $e \in M\cap N'$

ここで $E_e = E(e\cdot e)/E(e)\,|\,M_e$

$\rho \in \mathrm{End}(M)$, $N=\rho(M)$, $[\rho] = \oplus[\rho_i]$を$[\rho]$の既約分解、$p_i$を$\rho_i$に対応する$M\cap\rho(M)'$のprojectionとすると3)より

$$d_{\rho_i} = (\mathrm{Index}\,E_{p_i})^{\frac{1}{2}} = E(p_i)(\mathrm{Index}\,E)^{\frac{1}{2}} = E(p_i)\,d_\rho$$

$$\sum_i d_{\rho_i} = \sum_i E(p_i)\,d_\rho = d_\rho$$

となり statistical dimension の加法性が得られる。

statistical dimension の乗法性は、一般的にはわかっていないが応用上は次の定理で十分である。

定理(Kosaki, Longo)　$M$をfactor, $N$をそのsubfactorとし, $M\supset N\supset N_1\supset N_2\supset N_3\supset\cdots$をそれに付随するtowerとする。$\epsilon_0\in E(M,N)$, $\epsilon_i\in E(N_{i-1},N_i)$をminimal expectationsとすると $E_n\equiv\epsilon_n\circ\epsilon_{n-1}\circ\cdots\epsilon_1\circ\epsilon_0$ は$M$から$N_n$へのminimal expectationであり $[M:N_n]_0=[M:N]_0^{n+1}$

この定理と前の定理を組み合わせると次が示せる。
補題　$\varphi\equiv\lim E_n|\bigvee_m(M\cap N_m')$とすると, $\varphi$は$\bigvee_n M\cap N_n'$上のtraceで, $\varphi|M\cap N_n'=E|M\cap N_n'$ を満たす。

$M\supset N$のdepthが有限のとき, $\bigvee_m(M\cap N_m')$上のtraceは一意的であり, その値はprincipal graphのPerron-Frobenius eigen vectorから決定される。さらに$N=\rho(M)$を仮定し, $[\rho\bar{\rho}]^n=\oplus[\rho_i]$ (resp. $[\rho\bar{\rho}]^n[\rho]=\oplus[\rho_i]$) を$[\rho\bar{\rho}]^n$の(resp. $[\rho\bar{\rho}]^n[\rho]$の)既約分解, $e_i$を$\rho_i$に対応するprojectionとすると

$$d_{\rho_i}=(\mathrm{Index}(E_{2n-1})e_i)^{\frac{1}{2}}=E_{2n-1}(e_i)\,d_\rho^{2n}=\varphi(e_i)\,d_\rho^{2n}$$

$$(\text{resp. } d_{\rho_i}=\varphi(e_i)\,d_\rho^{2n+1})$$

となる。これは, descendant sectorsのstatistical dimensionをPerron-Frobenius eigen vectorから決める公式を与えている。

## §2. 応用(1)

sectorを使った議論に慣れるため、まずprincipal graphが$A_n$のときの、descendant sectorsの様子を見てみよう。

$M$をtype III factor、$\rho_1 \in \mathrm{End}(M)$を$M \supset \rho_1(M)$のprincipal graphが$A_n$となるものとする。§1.で注意したように、downward basic constructionによるtowerは次で与えられる。

$$M \supset \rho_1(M) \supset \rho_1\bar{\rho}_1(M) \supset \rho_1\bar{\rho}_1\rho_1(M) \supset \cdots$$

よって、

$$M\cap M' = \mathbb{C} \subset M\cap\rho_1(M)' \subset M\cap\rho_1\bar{\rho}_1(M)' \subset M\cap\rho_1\bar{\rho}_1\rho_1(M)' \cdots$$

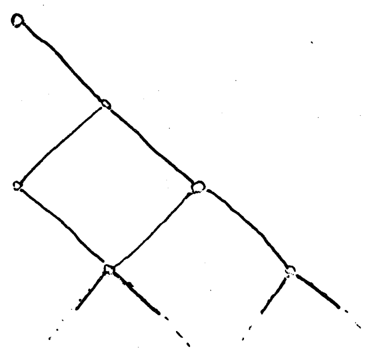
のBratteli diagramは次のようになる。

$M\cap M' = \mathbb{C}$

$M\cap\rho_1(M)' = \mathbb{C}$

$M\cap\rho_1\bar{\rho}_1(M)'$

$M\cap\rho_1\bar{\rho}_1\rho_1(M)'$



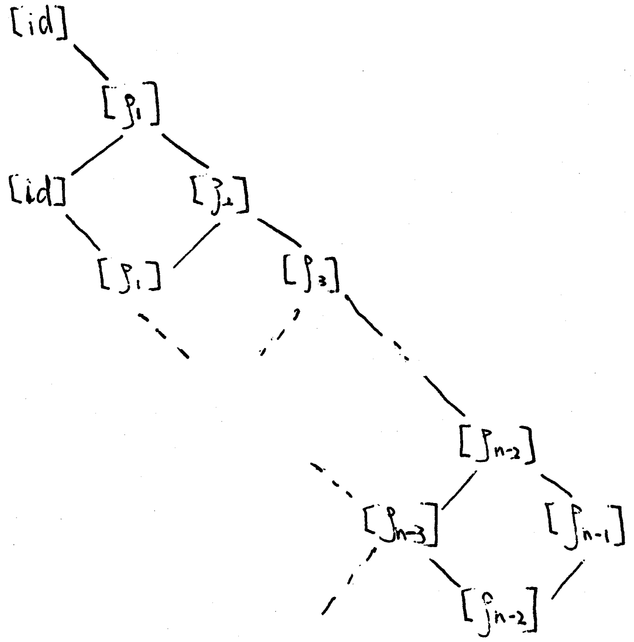
まず、$M\cap\rho_1\bar{\rho}_1(M)' = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$に対応して$[\rho_1\bar{\rho}_1]$が2つのsectorsに分解することがわかる。§1のconjugate sectorの特徴付けにより、1つはidentity sector $[\mathrm{id}]$であるので、残りを$[\rho_2]$と名付けよう。ところで、$M\cap\rho_1\bar{\rho}_1(M)'$のレベルの2点のうちどちらが$[\mathrm{id}]$に対応しているのだろうか。答は左側である。なぜなら、

$$[\rho_1\bar{\rho}_1\rho_1]=[\rho_1\bar{\rho}_1][\rho_1]=([id]\oplus[\rho_2])[\rho_1]=[id][\rho_1]\oplus[\rho_2][\rho_1]$$

であり$[id][\rho_1]=[\rho_1]$は既約なので分解しないからである。

次に、$M\cap\rho_1\bar{\rho}_1\rho_1(M)'$のレベルを見よう。上の議論から、左の点に$[\rho_1]$が対応し、$[\rho_2][\rho_1]$は２つのsectorに分解して、その１つは$[\rho_1]$であることがわかる。$[\rho_2][\rho_1]$の残りの既約成分を、$[\rho_3]$と名付けよう。

このような議論をくり返し、新しく出てくるsectorを順に$[\rho_2],[\rho_3],[\rho_4],\cdots,[\rho_{n-1}]$と名付けていくと、次のような図と、basic fusion rulesが得られる。




$$[\rho_{2k+1}]\overline{[\rho_1]}=[\rho_{2k}]\oplus[\rho_{2k+2}] \qquad 1\leqq 2k+1\leqq n-2$$

$$[\rho_{2k}][\rho_1]=[\rho_{2k-1}]\oplus[\rho_{2k+1}] \qquad 2\leqq 2k\leqq n-2$$

$$[\rho_{n-1}]\begin{pmatrix}[\rho_1], & n:\text{odd}\\ \overline{[\rho_1]}, & n:\text{even}\end{pmatrix}=[\rho_{n-2}]$$

descendant sectors $\{[\rho_i]\}_{i=1}^{n-1}$ の statistical dimension は次のようにして得られる。$A_n$ の Perron-Frobenius eigen vector は次である。

$$
\begin{array}{cccccc}
\dfrac{\sin\frac{1}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}} & \dfrac{\sin\frac{2}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}} & \dfrac{\sin\frac{3}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}} & & \dfrac{\sin\frac{n-1}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}} & \dfrac{\sin\frac{n}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}} \\
\circ \text{———} & \circ \text{———} & \circ \text{———} & \cdots\cdots & \circ \text{———} & \circ
\end{array}
$$

$$
d_{id} = 1 = \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\sin\frac{\pi}{n+1}}, \quad d_{\rho_1} = 2\cos\frac{\pi}{n+1} = \frac{\sin\frac{2}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}}
$$

であることと、§1 の議論に注意すると

$$
d_{\rho_i} = \frac{\sin\frac{i+1}{n+1}\pi}{\sin\frac{\pi}{n+1}}
$$

が得られる。

次に $D_n$ が $M \supset \rho_1(M)$ の principal graph であると仮定してみよう。上と同様な議論により次の図と basic fusion rules を得る。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & & & {[\rho_{n-2}]} \\
{[id]} \arrow[r, dash] & {[\rho_1]} \arrow[r, dash] & {[\rho_2]} \arrow[r, dash] & \cdots\cdots \arrow[r, dash] & {[\rho_{n-3}]} \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & & & & {[\rho_{n-1}]}
\end{tikzcd}
$$

$$
[\rho_{2k+1}][\overline{\rho_1}] = [\rho_{2k}] \oplus [\rho_{2k+2}] \qquad 1 \leqq 2k+1 \leqq n-2
$$

$$
[\rho_{2k}][\rho_1] = [\rho_{2k-1}] \oplus [\rho_{2k+1}] \qquad 2 \leqq 2k \leqq n-2
$$

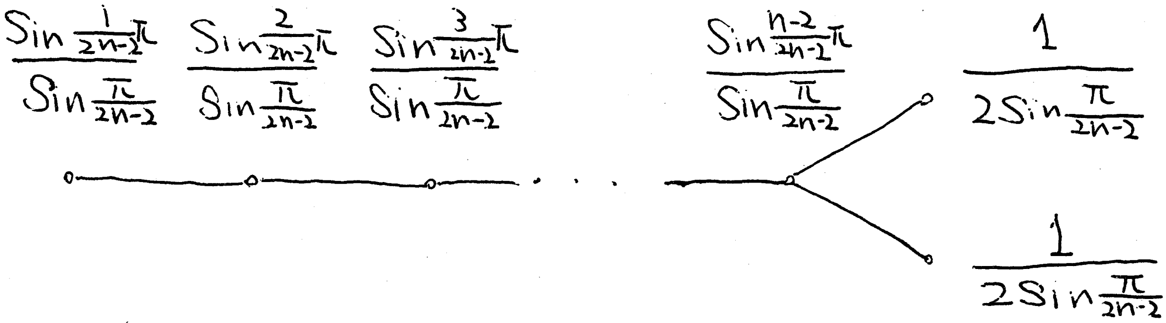
$$[\rho_{n-3}]\begin{pmatrix}[\rho_1] & , n:\text{odd}\\ \overline{[\rho_1]} & , n:\text{even}\end{pmatrix} = [\rho_{n-4}]\oplus[\rho_{n-2}]\oplus[\rho_{n-1}]$$

$$[\rho_{n-2}]\begin{pmatrix}[\rho_1] & , n:\text{even}\\ \overline{[\rho_1]} & n:\text{odd}\end{pmatrix} = [\rho_{n-3}]$$

$$[\rho_{n-1}]\begin{pmatrix}[\rho_1] & , n:\text{even}\\ \overline{[\rho_1]} & , n:\text{odd}\end{pmatrix} = [\rho_{n-3}]$$

ただし、図は principal part のみを書いた。

$D_n$ の Perron-Frobenius eigen vector は次である。




前と同様に、descendant sectors の statistical dimension は、

$$d_{\rho_i} = \frac{\sin\frac{i+1}{2n-2}\pi}{\sin\frac{\pi}{2n-2}} \qquad 1 \leqq i \leqq n-3$$

$$d_{\rho_{n-2}} = d_{\rho_{n-1}} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2n-2}}$$

である。

ここで $n=5$ としてみよう。

$$d_{\rho_3} = d_{\rho_4} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{8}} \simeq 1.306 \notin \left\{2\cos\frac{\pi}{N}\ ;\ N=3,4,\dots\right\}$$

これは不可能であり $D_5$ が principal graph に現われないことがわかる。

同様な議論により $E_7$が現われないことも示せる。一般の$D_{odd}$については、fusion rulesのより詳しい計算を実行することにより、矛盾を得る。

<u>定理</u>　$M \supset N$を同型なfactorのinclusionとする。このとき、$E_7$, $D_{odd}$はprincipal graphには現われない。

証明は[I1]を参照。

<u>系</u>　$M \supset N$をAFD factorのinclusionとする。このとき、$E_7$, $D_{odd}$はprincipal graphには現われない。

(証明)　$M \supset N$をAFD factorのinclusionとする。$M_0$をtype$\mathrm{III}_1$ AFD factorとすると、$M \supset N$と$M \otimes M_0 \supset N \otimes M_0$のprincipal graphは一致するので、Mがtype$\mathrm{III}_1$のときに命題を証明すればよい。Mがtype$\mathrm{III}_1$のとき、$[M:N] < \infty$であれば、Loiの定理[Li]によりNもtype$\mathrm{III}_1$である。よってtype$\mathrm{III}_1$ AFD factorの一意性により、MとNは同型であり、上の定理が使える。

## §3. 応用2

次の定理は、Kosaki [K3]のcrossed productの特徴付けと同値である。

<u>定理</u>　$M \supset N$ を type III factor の inclusion で $M \cap N' = \mathbb{C}$, $[M:N] < \infty$ を満たすものとする。このとき、次の条件は同値である。

(i) 有限群 $G$ とその $M$ への outer action $\alpha$ が存在して、$N = M^{\alpha}$

(ii) $\gamma : M \longrightarrow N$ を canonical endomorphism, $[\gamma] = \bigoplus_i [\alpha_i]$ を既約分解とすると、$d_{\alpha_i} = 1$ つまり、$[\gamma]$ は $\mathrm{Out}(M)$ の元に分解する。

上の条件が満たされているとき、$\{[\alpha_g]\}_{g \in G} = \{[\alpha_i]\}$.

(証明) (i)⇒(ii) 省略。(ii)⇒(i) $M$ と $N$ が同型のときのみ証明する。$\rho \in \mathrm{End}(M)$ を $\rho(M) = N$ となるようにとると、(ii) の仮定より $[\rho\bar{\rho}] = \bigoplus_i [\alpha_i]$ が成立する。$[\rho\bar{\rho}]$ が self-conjugate より、$\{[\alpha_i]\}$ は self-conjugate set であり、$\mathrm{Out}(M)$ 上 conjugation と inverse が一致することに注意すると、$\{[\alpha_i]\}$ は inverse に関して閉じた集合である。$[\rho\bar{\rho}] = \bigoplus_i [\alpha_i]$ の両辺に左から $[\alpha_j]$ を掛けると

$$[\alpha_j \rho][\bar{\rho}] = \bigoplus_i [\alpha_j \alpha_i]\ 。$$

右辺は $[id]$ を含み、$[\alpha_j \rho]$, $[\bar{\rho}]$ が既約なことに注意すると、§1. の conjugate sector の特徴付けにより、$[\alpha_j \rho] = [\rho]$ が得られその結果 $\bigoplus_i [\alpha_j][\alpha_i] = \bigoplus_i [\alpha_i]$ となる。$[\rho]$, $[\bar{\rho}]$ が既約なので、$\{[\alpha_i]\}$ は $[id]$ を一つのみ含み、$\bigoplus_i [\alpha_j][\alpha_i] = \bigoplus_i [\alpha_i]$ より、$[\alpha_j]$

はすべて異なることがわかる。よって$\{[\alpha_i]\}$はOut(M)の部分群であり$\{[\alpha_i]\}_i=\{[\alpha_g]\}_{g\in G}$と書くことにして、$[\alpha_g]$の代表元を$\alpha_g\circ\rho=\rho$となるように取る。これが求めるouter actionである。$g_1, g_2, \in G$とすると$\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}\circ\alpha_{g_1g_2}^{-1}$はinnerである。ところが、$M\cap\rho(M)'=\mathbb{C}$であり、$\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}\circ\alpha_{g_1g_2}^{-1}\circ\rho=\rho$より$\alpha_{g_1}\circ\alpha_{g_2}\circ\alpha_{g_1g_2}^{-1}=id$がでる。$\rho(M)\subset M^G$は$\alpha\circ\rho=\rho$より明らかで、indexを比べれば、$\rho(M)=M^G$が出る。 Q.E.D.

§4. 応用(B)

定理 type $\mathrm{III}_1$ AFD factorのindex 3のinclusionは、II型的である。つまり、Mをtype $\mathrm{III}_1$ AFD factor、NをMのsubfactorで、$[M:N]_0=3$とする。このときtype $\mathrm{II}_1$ AFD factorのinclusion $R\supset P$が存在して、

$$M\supset N\simeq R\otimes M_0\supset P\otimes M_0$$

となる。ここで$M_0$は、type $\mathrm{III}_1$ AFD factorである。

(証明の概略) type $\mathrm{III}_1$ AFD factorへの有限群の作用は、II型的であることがわかっているので[KST]、群の話に帰着させることを考える。$M\supset N$のprincipal graphが$D_4$の場合は$N=M^{\mathbb{Z}_3}$なので、$A_5$の場合のみ考える。Loiの定理[Li]より、Nもtype $\mathrm{III}_1$ AFD factorであり、$\rho_1\in End(M)$で、$\rho_1(M)=N$となるものが存在する。descendant sectorsと

basic fusion rules は次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
{[id]} \arrow[dr, dash] & & & & \\
& {[\rho_1]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & & \\
{[id]} \arrow[dr, dash] & & {[\rho_2]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
& {[\rho_1]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & {[\rho_3]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
{[id]} \arrow[dr, dash] & & {[\rho_2]} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & {[\rho_4]} \arrow[dl, dash] \\
& {[\rho_1]} & & {[\rho_3]} &
\end{tikzcd}
$$

$$[\rho_1][\overline{\rho_1}] = [id] \oplus [\rho_2]$$

$$[\rho_2][\rho_2] = [\rho_1] \oplus [\rho_3]$$

$$[\rho_3][\overline{\rho_1}] = [\rho_2] \oplus [\rho_4]$$

$$[\rho_4][\rho_1] = [\rho_3]$$

$$d_{\rho_i} = \frac{\sin \frac{i+1}{6}\pi}{\sin \frac{\pi}{6}}$$

$[\rho_1\bar{\rho}_1] = [id] \oplus [\rho_2]$, $[\rho_1\bar{\rho}_1]$ が self-conjugate より $[\rho_2]$ が self-conjugate. 同様に $[\rho_1\bar{\rho}_1\rho_1\bar{\rho}_1] = 2[id] \oplus 3[\rho_2] \oplus [\rho_4]$ より $[\rho_4]$ が self-conjugate であり、$d_{\rho_4} = 1$ より、$\rho_4 \in Aut(M)$ であることに注意する。さらに計算すると

$$[\rho_3] = [\alpha\rho_1]$$

$$[\rho_2]^2 = [id] \oplus [\alpha] \oplus [\rho_2]$$

$$[\alpha][\rho_2] = [\rho_2][\alpha] = [\rho_2]$$

が得られ、$\alpha\circ\rho_2=\rho_2$ と代表元を取ると、§3の定理の証明と同様にして、$\alpha^2=id$ つまり、$\mathbb{Z}_2$ actionが得られる。

ここで type $\mathrm{II}_1$ AFD factor の場合を考えてみよう。この場合、$R\supset P$ の principal graph が $A_5$ であれば常に、$P$ の subfactor $Q$ と $Q$ 上の $S_3$ action が存在して、$R=Q\rtimes S_3\supset P=Q\rtimes S_2$ となる。よって $Q$ に相当するものが必要となるが、実はこれは $\rho_1(M^\alpha)$ である。$M\supset\rho_1(M^\alpha)$ の関係が crossed product になることを示すには、もっと準備を必要とするので省略するが、このときに $\mathbb{Z}_2$ action の一意性を必要とし、type $\mathrm{III}_1$ AFD という条件が必要になるのである。

## §5. 応用4

詳しくは、[I2]に書く予定なので、ここでは motivation のみを書く。[L2]で Longo は次のことを示している。

Fact　$M$ を type III factor、$\rho\in End(M)$ を self-conjugate で $d_\rho<\infty$, $M\cap\rho(M)'=\mathbb{C}1$ とする。このとき $H(\rho)=\{v\in M; vx=\rho^2(x)v\}$ は一次元であり、$v\in H(\rho)$, $\|v\|=1$ ならば $v^*\rho(v)=\pm\frac{1}{d_\rho}$.

＋のとき、$\rho$ を real sector、－のとき pseudo-real sector

と彼は呼んでいる。real sector の例として、$M \supset \rho_1(M)$ の principal graph が $A_4$ になる場合を考えてみよう。desendant sectors と、basic fusion rules は次のようになる。

$$
\begin{array}{ccccccc}
[id] & & & & & & \\
 & \diagdown & & & & & \\
 & & [\rho_1] & & & & \\
 & \diagup & & \diagdown & & & \\
[id] & & & & [\rho_2] & & \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
 & & [\rho_1] & & & & [\rho_3] \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
[id] & & & & [\rho_2] & &
\end{array}
$$

$$[\rho_1][\overline{\rho_1}] = [id] \oplus [\rho_2]$$

$$[\rho_2][\rho_1] = [\rho_1] \oplus [\rho_3]$$

$$[\rho_3][\overline{\rho_1}] = [\rho_2]$$

$$d_{\rho_i} = \frac{\sin\frac{i+1}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}$$

$[\rho_2]$ は self-conjugate であり $[\rho_2]^2 = [\rho_1][\overline{\rho_3}][\rho_3][\overline{\rho_1}] = [\rho_1][\overline{\rho_1}] = [id] \oplus [\rho_2]$ を満たす（$d_{\rho_3} = 1$ より $\rho_3 \in Aut(M)$ を使った。）。 $id, \rho_2$ と $\rho_2^2$ の間の intertwiner を $S_1, S_2$ とすると実際に、$S_1, S_2$ 上の $\rho_2$ の action が計算でき、up to relative phase で

$$
\begin{cases}
\rho_2(S_1) = \dfrac{S_1}{d} + \dfrac{S_2 S_2}{\sqrt{d}} \\[2ex]
\rho_2(S_2) = S_2 S_1 S_1^* + \left(\dfrac{S_1}{\sqrt{d}} - \dfrac{S_2 S_2}{d}\right) S_2^*
\end{cases}
$$

$$d = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

となる。つまり$[\rho_2]$がreal sectorであることがわかる。ところが、この計算結果は、それ以上のことを言っているのである。$C^*(S_1, S_2) = \mathcal{O}_2$であることに注意してもらいたい。Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$上に、上の関係式でendomorphismを定義すると、$\mathcal{O}_2 \supset \rho_2(\mathcal{O}_2)$がWatataniの意味[W]で、index $d^2$のinclusionになっていることは、容易に想像がつく。実際$E(x) = \rho_2(S_1^* \rho_2(x) S_1)$でconditional expectationを定義すると、$dS_1$をquasi basisとしてindexが$d^2 = 4\cos^2\frac{\pi}{5}$となることが示せる。又、$\gamma_t(S_1) = e^{i2t}S_1$, $\gamma_t(S_2) = e^{it}S_2$で、$\mathbb{R}$ actionを入れ、そのKMS-stateで表現することにより、type $\mathrm{III}_{\lambda}$のinclusionを作ることができる。このような方法で作られるindexの値として今のところ知られているのは$4+2\sqrt{3}$, $3+2\sqrt{2}$, integerなどである。ただし、すべてreal sectorであり、pseudo-real sectorの例は、まだ知られていない。

**Reference**

[C] M.Choda, in preparation

[H] F.Hiai, *Minimizing indices of conditional expectations on a subfactor,* Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 673-678.

[Ka] Y.Kawahigashi, *On flatness of Ocneanu's connection on the Dynkin diagrams and clssificcation of subfactors,* preprint.

[KST] Y.kawahigashi, C.E.Sutherland, M.Takesaki, *The structure of an injective factor and the cocycle conjugacy of discrete abelian group action*, to appear in Acta.Math.

[K1] H.Kosaki, *Extension of Jonnes theory on index to arbitrary factors,* J. Funct. Anal. **66** (1986), 123-140.

[K2] H.Kosaki, private communiction

[K3] H.Kosaki, *Chararcterization of crossed product (properly infinite case),* Pacific J. Math. **137** (1989), 159-167. [KL] H.Kosaki, and R.Longo, in preparation

[L1] R.Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields. I* , Commun. Math. Phy. **126**(1989), 217-247 .

[L2] R.Longo, *Index of subfactors and statistics of quantum fields. II* , Commun. Math. Phy. **130** (1990), 285-309.

[L3] R.Longo, *Simple injective subfactors*, Adv. Math. **63** (1987), 152-171.

[Li] P.H.Loi, *On the theory of index and type III factors*, thesis, Pennsylvania State University, 1988.

[O1] A.Ocneanu, *Quantized group string algebrar and Galois theory for algebra,* in "Operator algebras and applications, Vol. 2 (Warwick, 1987)," London Math. Soc. Lect. Note Series Vol. 136, Cambridge University Press, 1988, pp. 119-172.

[O2] A.Ocneanu, *Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classifica-*

*tion of subfactors,* University of Tokyo Semminary Notes, (Notes recorded by Y.Kawahigashi), 1990.

[P1] S.Popa, *Classification of subfactors: reduction to commuting squares,* Invent. Math. **101** (1990), 19-43.

[P2] S.Popa, *Sur la classification des sousfacteurs d'indice fini du facteur hyperfini,* C. R. Acad. Sc. Paris. **311** (1990), 95-100.

[P3] S.Popa, *Correspondences,* preprint.

[I1] M. Izumi, Some results on classification of subfactors, preprint

[I2] M. Izumi, in preparation.