数理解析研究所講究録
751巻 1991年 28-44

Lie 代数の包絡代数の正元

山形大学 理学部
中里 博
(Hiroshi Nakazato)

§1. 正定値多項式に関する Hilbert の定理

1888年に, D. Hilbert は, 次のような定理を証明した. (cf [1])

Theorem. 二変数の実係数の6次多項式 $f \in \mathbb{R}[X, Y]$ で,
i) "$f(x, y) \geq 0$ for $^\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$"
かつ ii) "f を (高々3次の) 有限個の実係数多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_m$ の平方の和 $\sum_{j=1}^{m} f_j^2$ の形に表すことができない"
となるものが存在する. ///

1960年代に, Motkin により, 多項式 $f(X, Y) = X^4Y^2 + X^2Y^4 + 1 - 3X^2Y^2$

が 上記のような性質をもつ多項式となっていることが示された。

$$P \underset{\frown}{=} \{ f \in \mathbb{R}[X, Y] : f = \sum_{i=1}^{m} f_i^2 \text{ for some } f_1, f_2, \cdots f_m \in \mathbb{R}[X, Y] \}$$

$$\widetilde{P} \underset{\frown}{=} \{ f \in \mathbb{R}[X, Y] : f(x, y) \geqq 0 \ {}^\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

により $\mathbb{R}[X, Y]$ の二つの positive cone $P \subset \widetilde{P}$ を定めるとき、Hilbertの定理より、$\exists f \in \widetilde{P}$, $\deg(f) = 6$ s.t. $f \notin P$.

また、C. Berg らによって、凸錐 P の次のような特徴づけがなされている。

$P = \{ f \in \mathbb{R}[X, Y] :$ $\mathbb{R}[X, Y]$ の線形汎関数 φ で、$\varphi(h^2) \geqq 0$ for ${}^\forall h \in \mathbb{R}[X, Y]$ となるような任意のものに対して、$\varphi(f) \geqq 0 \}$

$= \{ f \in \mathbb{C}[X, Y] :$ $\mathbb{C}[X, Y]$ の任意の unbounded $*$-representation $\{\pi, H, \mathcal{D}\}$、但し $\mathcal{D}$ は、$\pi(h)$ の定義域 $({}^\forall h \in \mathbb{C}[X, Y])$、に対して、$(\pi(f)\xi, \xi) \geqq 0$ ${}^\forall \xi \in \mathcal{D} \subset H \}$

さらに、Hilbert によって、"$f \in \widetilde{P}$, $\deg(f) \leqq 4 \Rightarrow f \in P$" となることも証明されている。

さて，Motkinの多項式の三変数でのアナロジーである次のような4次多項式

$g(X, Y, Z) = X^2Y^2 + X^2Z^2 + Y^2Z^2 + 1 - 4XYZ$

に対して，$g(x, y, z) \geqq 0 \quad {}^{\forall}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ であって，g を実係数多項式の平方和として表すことができないことも証明される。

一方，一変数の多項式 $f \in \mathbb{R}[X]$ に対しては，" $f(x) \geqq 0 \quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R} \Rightarrow {}^{\exists}g \in \mathbb{C}[X]$ $f(X) = \overline{g(X)} \cdot g(X)$ " となることが，代数学基本定理よりわかる。

§2. K. Schmüdgen による Hilbertの定理のLie代数への一般化.

$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{R}$ 上の有限次元Lie代数，$U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の普遍包絡代数の複素化とする。ここで，$\mathbb{C}$ 上の結合代数 $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ における対合 $*$ (involutive anti-automorphism) を，$X^* = -X$ $({}^{\forall}X \in \mathfrak{g})$ により定める。

ここで，$X^* = X$ $({}^{\forall}X \in \mathfrak{g})$ ではなく，$X^* = -X$ $({}^{\forall}X \in \mathfrak{g})$ と定めるのは，

"$\mathfrak{g}$ が Lie 群 G の Lie 代数であって、$\{\pi, H\}$ が G のユニタリ表現であるとき、$(d\pi)(X) \equiv s\text{-}\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{1}{t}\{\pi(\exp tX) - I\}$ により、$\mathfrak{g}$ の表現 $(X\in\mathfrak{g})$

$$d\pi \ : \quad (d\pi)([X,Y]) = d\pi(X)\,d\pi(Y) - d\pi(Y)\,d\pi(X)$$

を定めるとき、$(d\pi)(X)$ が (essentially) skew-adjoint operator となる" ことに、$U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の $*$-構造を適合させるためである。

さて、G を連結 Lie 群とし、$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする。ここで、次のような、$U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の二つの positive cone $\mathcal{P}(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ と $\widetilde{\mathcal{P}}(G)$ について考えよう

$$\mathcal{P}(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}) \equiv \left\{ \sum_{j=1}^{m} D_j^* \cdot D_j \ : \ D_j \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \quad (j=1,2,\cdots,m,\ m=1,2,3,\cdots) \right\}$$

$$\underset{(*)}{\equiv} \{ D \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} : \ U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \text{ の任意の unbounded } *\text{-representation } \{\pi, H, \mathcal{D}\} \text{ に対して、} (\pi(D)\xi, \xi) \geq 0 \ \ {}^{\forall}\xi\in\mathcal{D} \}$$

但し、$\mathcal{P}(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ の $(*)$ のような特徴づけは、Schmüdgen によるものである。

$\widetilde{P}(G) \equiv \{ D \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$: Gの任意のユニタリ表現 $\{\pi, H\}$ の微分表現 $d\pi$ として得られる $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の $*$−表現 $d\pi$ に対して, $((d\pi)(D)\xi, \xi) \geq 0$ for ${}^{\forall}\xi \in C_{\pi}^{\infty} \subset H \} \supseteq P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$

但し, C_{π}^{∞} は, 任意の $X_1, \cdots, X_n \in \mathfrak{g}$ に対して $d\pi(X_1 X_2 \cdots X_n)$ の定義域に含まれるような H の元全体から成る Hの稠密な線形部分空間とする.

1978年に, K. Schmüdgen は, 前記の Hilbert の定理の一般化である次のような定理を証明した.

Theorem. [K. Schmüdgen] (cf. [4] [5])

1°) G を $\mathbb{R}^1$ と同型でない連結 Lie 群とすれば, $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の高々 6 階の元 $D = D^*$ で $D \in \widetilde{P}(G)$ かつ $D \notin P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ となるものが存在する.

2°) G が, $\mathbb{T}^1$ と同型な閉部分群を含むような Lie 群であるならば,

$\exists D = D^* \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$, s.t.

$$\deg(D) = 2, \quad D \in \widetilde{P}(G), \quad D \notin P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}).$$

特に、G が単連結ではない Lie 群のとき、及び、G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Levi 部分代数（$\mathfrak{g}$ の半単純部分）が、$\mathfrak{sl}(2:\mathbb{R})$ と同型でない直和因子を含むとき、$\exists D \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$, s.t. $\deg(D) = 2$, $D \in \widetilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$.

3°) G が $SL(2:\mathbb{R})$ の普遍被覆群であるとき、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2:\mathbb{R})$ の基底 $\{X_0, X_1, X_2\}$ を $[X_0, X_1] = X_2$, $[X_0, X_2] = -X_1$, $[X_1, X_2] = -X_0$ と取るとき、

$$D \equiv (-X_1^2 - X_2^2 + iX_0)(-X_1^2 - X_2^2 - iX_0)$$

により、$U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の 4 階の元 D を定めれば、$D \in \widetilde{P}(G)$ かつ $D \notin P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ ///

§3. Schmüdgen の定理の改良

G を連結な Lie 群とし、$D \in U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ で、$D \in \widetilde{P}(G)$ かつ $D \notin P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ となる D の階数 $\deg(D)$ の最小値を $\nu(G)$ と表す。

《目標》 任意の連結 Lie 群 G に対し、G の一つの不変量である $\nu(G)$ を決定する。

まず，"$D \in U(\mathfrak{g})$，$D \in \tilde{P}(G) \Rightarrow D = D^*$" 及び "$D = D^* \in \tilde{P}(G) \Rightarrow D$の階数は，偶数" が成り立つ．

特に後者は，Gの$L^2(G)$における正則表現Rの微分表現dRを$D = D^*$かつDの階数が奇数であるようなものに適用することによりわかる。

このこと及び，Schmüdgenの定理より

$$\begin{cases} \text{i)}\ G \not\cong \mathbb{R}^1 \Rightarrow \nu(G) = 2 \text{ または } \nu(G) = 4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{または } \nu(G) = 6 \\ \text{ii)}\ G = \mathbb{R}^1 \Rightarrow \nu(G) = +\infty \end{cases}$$

となる．

また，単連結な可換Lie群に対しては，Hilbertの定理等により，次のことがわかる

$$\begin{cases} \text{i)}\ \nu(\mathbb{R}^1) = +\infty \\ \text{ii)}\ \nu(\mathbb{R}^2) = 6 \\ \text{iii)}\ \nu(\mathbb{R}^n) = 4 \quad \text{for } n \geq 3 \end{cases}$$

さらに，Schmüdgenの結果に先行して，1970年に Woronowitz は，3次元Heisenberg群Gに対し，$\mathfrak{g}$の基底$\{X, Y, Z\}$を$[X, Y] = Z$，$[X, Z] = [Y, Z] = 0$と取るとき，$D = (-X^2 - Y^2 + iZ) \cdot (-X^2 - Y^2)$に対して$D \in \tilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^c)$

となることを示している. (cf. [2])

さて，次のような結果が得られた

Theorem. G を連結 Lie 群とする

1°) $G \neq \mathbb{R}^1$ かつ $G \neq \mathbb{R}^2$ ならば

$\nu(G) = 2$ または $\nu(G) = 4$.

2°) $\widetilde{SL(2:\mathbb{R})}$ を $SL(2:\mathbb{R})$ の普遍被覆群とし，$D \in U(\mathfrak{g})$，$\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ を $D = -X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - 8iX_1$，

$$-\alpha = \inf\{((d\pi)(D)\xi, \xi) : \xi \in C_\pi^\infty, \|\xi\| = 1, \pi \in \widehat{\widetilde{SL(2:\mathbb{R})}}\}$$

により定めるとき，$D + \alpha I \in \tilde{P}(\widetilde{SL(2:\mathbb{R})}) \setminus P(U(SL(2:\mathbb{R})))$ となる.

また 2°) より，

3°) $\nu(G) \geqq 4$ ならば，G は単連結な可解 Lie 群である.

さらに，4°) $\nu(G) \geqq 4$ ならば，G は exponential 型の単連結な可解 Lie 群である. 即ち 各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して，$ad_{\mathfrak{g}^c}(X) : \mathfrak{g}^c \longrightarrow \mathfrak{g}^c$ は $\{\sqrt{-1}\lambda : \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$

に含まれるような固有値をもたない。

5°) G が，巾零 Lie 群のとき，

$$[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \neq \{0\}$$ ならば，

$$\nu(G) = 2$$ となる。

6°) 次のような基底をもつ，三系列に属する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする単連結な Lie 群 G に対しては，

$$\nu(G) = 4$$ となる。

i) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{T, X_1, X_2, \cdots, X_n, Z_1, \cdots, Z_m\}$

$(1 \leqq n \quad , 0 \leqq m)$

$$[T, X_j] = X_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$[T, Z_k] = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

$$[X_j, X_{j'}] = [Z_k, Z_{k'}] = [X_j, Z_k] = 0$$

$$(1 \leqq j, j' \leqq n, \quad 1 \leqq k, k' \leqq m)$$

ii) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n, Z,$
$U_1, U_2, \cdots, U_m\}$ $\quad (1 \leqq n, \ 0 \leqq m)$

$$[X_j, Y_j] = Z \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

$$[X_j, X_{j'}] = [Y_j, Y_{j'}] = 0 \quad (1 \leqq j, j' \leqq n)$$

$$[X_j, Y_{j'}] = 0 \quad (1 \leqq j \neq j' \leqq n)$$

$$[X_j, U_k] = [Y_j, U_k] = [Z, U_k] = 0$$

$(1 \leqq j \leqq n)$, $\quad [X_j, Z] = [Y_j, Z] = 0 \quad (1 \leqq j \leqq n)$

iii) $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Z_1, Z_2, \dots, Z_n, U_1, U_2, \dots, U_m\}$ $(1 \leqq n,\ 0 \leqq m)$

$$[X, Y_j] = Z_j \qquad (1 \leqq j \leqq n)$$

$$[X, Z_j] = [X, U_k] = 0 \qquad (1 \leqq j \leqq n,\ 1 \leqq k \leqq m)$$

$\{Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n, U_1, \dots, U_m\}$ は、互いに可換

7°) 次のような基底 $\{T, X, Y\}$ をもつ Lie 代数 $\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする 3 次元の単連結な Lie 群 G に対しては、

$$\nu(G) = 2 \qquad \text{となる.}$$

$$[T, X] = X, \qquad [T, Y] = \alpha Y,$$

$$\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1,\ \alpha \neq -1$$

$$[X, Y] = 0. \qquad ///$$

註. 上記の定理の 6°), 7°) より

$$\nu(G_1) = 4, \quad \nu(G_2) = 4$$

かつ直積群 $G_1 \times G_2$ に対して

$$\nu(G_1 \times G_2) = 2$$

となる例があることがわかる。

以下、定理の証明の概略を述べる。まず、R. P. Langlands の定理より、次のことがわかる。

Theorem [R. P. Langlands] (cf. [3])

G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を その Lie 代数 とする.
$D = D^*$ を $U(\mathfrak{g})^c$ の $2m$ 階 $(m \in \mathbb{N})$ の元 とし, $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ に関する $U(\mathfrak{g})^c$ の Poincaré - Birkhoff - Witt 基底 $\{X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n} : 0 \leq i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ による D の表示を

$$D = \sum_{k=0}^{2m} \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=k} a_{i_1, i_2, \cdots i_n} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$$

とする. このとき, 条件 :

(3.1) "$0 < {}^{\exists}\rho < \infty$ s.t. $(-1)^m \mathrm{Re}\left(\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=2m} a_{i_1 i_2 \cdots i_n} \xi_1^{i_1} \xi_2^{i_2} \cdots \xi_n^{i_n}\right)$

$$\geq \rho\,(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)^m$$

for ${}^{\forall}(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ "

が成り立つならば, $-\infty < {}^{\exists}L < \infty$ s.t. G の任意の連続 unitary 表現 $\{\pi, H\}$ に対して. $(d\pi(D)\varphi, \varphi) \geq L(\varphi, \varphi)$.
$({}^{\forall}\varphi \in C_\pi^\infty)$

また, G の既約な unitary 表現 $\{\pi_0, H_0\}$ 及び, π_0 の analytic vector $\varphi_0 \in H_0$ で $\|\varphi_0\| = 1$ かつ

(3.2) $(d\pi_0(D)\varphi_0, \varphi_0) = \inf\{(d\pi(D)\varphi, \varphi) : \pi \in \widehat{G}, \varphi \in H_\pi, \|\varphi\| = 1\}$ となるものが存在する. ///

この定理より $D = \sum_{j=1}^{m} D_j^* \cdot D_j$ のとき、
上記のような $\{\pi_0, \varphi_0\}$ に対して

(3.3) $d\pi_0(D_j)\varphi_0 = 0 \quad (j=1,2,\dots,m)$

となることがわかる。

定理の 2°) の証明

一般に次のことが言える

Proposition. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2:\mathbb{R})$ とし、その基底
$\{X_0, X_1, X_2\}$ $\quad$ ($[X_0, X_1] = X_2$, $[X_0, X_2] = -X_1$,
$[X_1, X_2] = -X_0$) を取る。このとき、任意の
狭義正定値実対称行列 $\{a_{ij}\}_{0 \le i,j \le 2}$ に
対し、$D = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} X_i X_j$ と定めれば、
$\mathfrak{g}$ の自己同型写像 σ で

$$\sigma(D) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}\, \sigma(X_i)\, \sigma(X_j)$$
$$= \lambda X_0^2 + \mu(X_1^2 + X_2^2) + b(X_0X_1 + X_1X_0)$$

for some $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $b \in \mathbb{R}$

となるものが存在する。 ///

この命題は、上記のような D に対して、

$$\mathrm{ad}_{U(\mathfrak{g})}(X)\,(D) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(XX_iX_j - X_iX_jX)$$
$$= XY + YX \quad \text{for some } Y \in \mathfrak{g}$$

となるような $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$ が存在することを用いて、証明される。

また、$D = -\sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} X_i X_j + \sqrt{-1}\sum_{j=0}^{2} b_j X_j$ ($\{a_{ij}\}_{0 \leq i,j \leq 2}$ は、狭義正定値実対称行列、$b_j \in \mathbb{R}$) に対し、$G = SL(2;\mathbb{R})$ の既約 unitary 表現 π_0 及び、analytic vector ξ_0 ($\|\xi_0\| = 1$) を (3.2) の如く取り、$-\alpha = (d\pi_0(D)\xi_0, \xi_0)$ と置く。ここで、

$$D + \alpha I = \sum_{j=1}^{m} (V_j + C_j I)^* (V_j + C_j I)$$

($V_j \in \mathfrak{g}^C$, $C_j \in \mathbb{C}$) と仮定すれば、(3.3) より、$d\pi_0(V_j)(\xi_0) = -C_j \xi_0$ ($1 \leq j \leq m$) となる。従って、$V_1, V_2, \cdots, V_m$ から生成される $\mathfrak{g}^C$ の部分Lie代数を $\mathcal{B}$ とすれば、

$V_j \longmapsto -C_j$ ($1 \leq j \leq m$) は $\mathcal{B}$ の一次元表現に拡大される。ゆえに、$d\pi_0$ が、$\mathfrak{g}$ の non-trivial 表現ならば、$\mathfrak{g}^C$ の単純性より $\dim_C \mathcal{B} \leq 2$ となる。一方 $(a_{ij})_{0 \leq i,j \leq 2}$ が狭義正定値であることより、$\dim_C \mathcal{B} \geq 2$ となる。定理の2°)の例の如く D を取っておけば、π_0 は、non-trivial 表現となる。このような場合、$\mathcal{B}$ は、$\mathfrak{g}^C$ の2次元部分Lie代数、

従って，必然的に，Borel 部分代数（極大可解部分代数）となる．ここで，$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の Borel 部分代数 B の non-zero の 1 次元表現が，$G=\widetilde{SL(2:\mathbb{R})}$ の non trivial 表現の微分表現に拡大できるは，$\mathcal{B}=\mathbb{C}\tilde{X}_0+\mathbb{C}(\tilde{X}_1+\varepsilon\sqrt{-1}\tilde{X}_2)$ の場合のみである．但し $\tilde{X}_0, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 \in \mathfrak{g}$，
$[\tilde{X}_0, \tilde{X}_1]=\tilde{X}_2$，$[\tilde{X}_0, \tilde{X}_2]=-\tilde{X}_1$，$[\tilde{X}_1, \tilde{X}_2]=-\tilde{X}_0$，
$\varepsilon=\pm 1$．さらに，L. Pukansky の G の既約 unitary 表現の分類を用いることにより，

$$-[\lambda X_0^2+\mu(X_1^2+X_2^2)]+\sqrt{-1}(b_0X_0+b_1X_1+b_2X_2)+\alpha I = \sum_{j=1}^{m} D_j^{*}\cdot D_j \qquad (\lambda>0,\ \mu>0,\ b_0, b_1, b_2\in\mathbb{R})$$

ならば，$b_1=b_2=0$ となることが言える．

このことより，定理の 2° の $D+\alpha I$ が，$\sum_{j=1}^{m} D_j^{*}\cdot D_j$ と表わせないことがわかる．

定理の 1°)，4°)，5°) の証明

まず，$\mathfrak{g}$ が，巾零 Lie 代数であって，$\exists X, \exists Y, \exists Z \in \mathfrak{g}$ s.t. $[X, [Y, Z]]\neq 0$ ならば，$\exists X, \exists Y\in\mathfrak{g}$ $[X, [X, Y]]\neq 0$ となることが言え，さらに，$\mathfrak{g}$ は，次のような基底をもつ Lie 代数 $\mathfrak{g}_4$，または $\mathfrak{g}_{5,4}$ と同型な部分代数をもつ．

$\mathfrak{g}_4$: 基底 $\{T, X, Y, Z\}$: $\{X, Y, Z\}$ は互いに可換, $[T, X] = Y$, $[T, Y] = Z$, $[T, Z] = 0$.

$\mathfrak{g}_{5,4}$: 基底 $\{T, X, Y, Z_1, Z_2\}$: $\{Y, Z_1, Z_2\}$ は互いに可換, $[T, X] = Y$, $[T, Y] = Z_1$, $[T, Z_1] = 0$, $[X, Y] = Z_2$, $[X, Z_1] = [X, Z_2] = 0$.

また, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ $(\dim \mathfrak{g} \geq 3)$ が, $\mathbb{R}^3$も, $aX+b$ 群の Lie 代数も 3次元の Heisenberg型の Lie 代数も, その部分代数として含まないならば, $\mathfrak{g}$ は, 次のような Lie 代数を部分 Lie 代数として含む.

(3.4) $\mathfrak{k}$: $\mathfrak{k}$ の基底 $\{T, X, Y\}$, $[X, Y] = 0$.
$[T, X] = \alpha X + Y$, $[T, Y] = -X + \alpha Y$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

さらに, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, "$\exists X \in \mathfrak{g}$ s.t. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^c}(X) : \mathfrak{g}^c \longrightarrow \mathfrak{g}^c$ の固有値の少なくとも, 一つは, $\{\sqrt{-1}\lambda : \lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\}$ に属する" ならば, $\mathfrak{g}$ は, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_{5,4}$ または次のような Lie 代数 $\mathfrak{k}_1$ または $\mathfrak{k}_2$ と同型な部分代数をもつ.

(3.4)' $\mathfrak{k}_1$: $\mathfrak{k}_1$の基底 $\{T, X, Y\}$, $[X, Y] = 0$,

$[T, X] = Y, \quad [T, Y] = -X$

(3.5) $\mathfrak{g}_2$: $\mathfrak{g}_2$ の基底 $\{T, X, Y, Z\}$, Z は $\mathfrak{g}_2$ の中心元. $[T, X] = Y$, $[T, Y] = -X$, $[X, Y] = Z$.

さて, $ax+b$ 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{T, X\}$ を $[T, X] = X$ と取り, $U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$ の 4階の元 D を

$$D = \left(-\frac{1}{4}T^2 - X^2 - 2iX + \frac{9}{16}I\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}T^2 - X^2 - 2iX + \frac{1}{16}I\right)$$

により定めるとき, $D \in \widetilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$.

また, 次のような単連結な可解 Lie 群 G に対し D_0 を下記のように定めるとき, $D_{\tilde{\alpha}} \in \widetilde{P}(G) \setminus P(U(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}})$ となる. 但し, $\tilde{\alpha}$ は, D_0 に依存する定数. $\tilde{\alpha} > 0$.
$D_{\tilde{\alpha}} = D_0 + \tilde{\alpha} I$.

$$\mathfrak{g}_{5,4} : D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2 + Z_1^2 + Z_2^2) + 4iZ_1 + 4iZ_2$$

$$\mathfrak{g}_4 : D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2) + 4iZ$$

(3.4) の $\mathfrak{g}$, $\alpha \neq 0$ の場合, ($\alpha > 0$ と仮定する)

$$D_0 = -\alpha^{-2} T^2 - (X^2 + Y^2) + 3i \exp(2\alpha + 2\alpha^{-1}) \cdot (\alpha^{-1} + e^{3\alpha}) X$$

(3.4)$'$ の $\mathfrak{g}_1$: $D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2) + 9iX$

(3.5) の $\mathfrak{g}_2$: $D_0 = -(T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2) + 9iY + 12iZ$.

定理の 6°) の証明: $\widetilde{P}(G)$ に属する任意の2階の元 D を、$U(\mathfrak{g})^c$ の $*$-自己同型により標準化することにより証明できる。

(cf. i) で, $n=1$, $m=0$ の場合,

$$-T^2-X^2-2iX+\frac{1}{4}I=\left(T+iX-\frac{1}{2}I\right)^*\left(T+iX-\frac{1}{2}I\right)$$

となるから[5]でSchmüdgenの掲げている例は、誤りである)

References.

[1] D. Hilbert. "Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten" Math. Ann. (1888). Bd. 32 pp 342-350.

[2] P. E. T. Jorgensen, R. T. Powers "Positive Elements in the Algebra of the Quantum Momement Problem", 1990.

[3] R. P. Langlands "Semi-groups and Representations of Lie groups". thesis. Yale Univ, 1960.

[4] K. Schmüdgen. "Positive Cones in Enveloping Algebras". Reports on Math. Phys. (1978) vol. 14 pp 385-404

[5] K. Schmüdgen. "Ein positives Element der einhüllenden Algebra der $SL(2:\mathbb{R})$, das keine Quadratsumme ist" Wiss. Z. Karl-Marx-Univ. (1978)