

Extensions of Unbounded Representations

福岡大・理 黒瀬 秀樹

(Hideki Kurose)

§1 序

ある $*$ -多元環 A のヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の (一般に有界でない) 表現が与えられた時、それと同じ \mathcal{H} 上の表現に拡大する方法を考える。 $*$ -環の表現とは下の意味で使う。

定義 π が (多元)環 A のヒルベルト空間 \mathcal{H} における表現であるとは \mathcal{H} の dense な部分空間 $\mathcal{D}(\pi)$ があって

と \mathcal{H} の dense な部分空間 $\mathcal{D}(\pi)$ があって

i) 任意の $a \in A$ に対し、 $\pi(a)$ は $\mathcal{D}(\pi)$ を定義域とする可閉線型作用素、

ii) $\pi(a)\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi)$ ($\forall a \in A$)

iii) $\pi: A \rightarrow \pi(A)$ は 準同型

を満たすときを言う。さらに A が $*$ -環であり、 $\pi(a^*) \subset \pi(a)^*$

($a \in A$) を満たすとき π は $*$ -preserving または π を $*$ -

表現という。環 A の 2 つの表現 π, ρ が 同じヒルベルト

空間において与えられたとき、 ρ が π の拡大 ($\rho \supset \pi$) で

あるとは

$\mathfrak{D}(\rho) \supset \mathfrak{D}(\pi)$ から $\rho(a)|_{\mathfrak{D}(\pi)} = \pi(a)$ ($a \in \mathcal{A}$)
 と表現できるとも言う。

我々の問題を述べる前に、実に簡単な例をあげる。
 $\mathcal{P}(x)$ と x の複素係数多項式全体の可換 $*$ -環とし、

$$\mathcal{G} = L^2[0, 1]$$

$$\mathfrak{D}(\pi) = \left\{ f \in C^\infty[0, 1]; f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) = 0 \ (n=0, 1, 2, \dots) \right\}$$

$$\mathfrak{D}(\rho) = \left\{ f \in C^\infty[0, 1]; f^{(n)}(0) = f^{(n)}(1) \ (n=0, 1, 2, \dots) \right\}$$

$$\pi\left(\sum c_k x^k\right) = \sum c_k \left(i \frac{d}{dx}\right)^k \Big|_{\mathfrak{D}(\pi)}$$

$$\rho\left(\sum c_k x^k\right) = \sum c_k \left(i \frac{d}{dx}\right)^k \Big|_{\mathfrak{D}(\rho)}$$

とすれば π, ρ は $\mathcal{P}(x)$ の $*$ -表現で ρ は π の拡大になっている。

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(x)$ の表現, 特に $*$ -表現の状況は非常に簡単である。
 π は $\mathcal{P}(x)$ の $*$ -表現とすれば $\pi(x)$ は $\mathfrak{D}(\pi)$ を不変にする対称作用素であり、 π の $*$ -表現としての拡大は、 $\pi(x)$ の対称作用素としての拡大とその不変定義域の問題とすればよい。従って $\mathcal{P}(x)$ の $*$ -表現の拡大の議論は、Cayley 変換を用いた対称作用素の拡大の議論に帰着される。しかし $\mathcal{P}(x)$ 以外の $*$ -環に対する $*$ -表現とその拡大については事情が一変する。例えば 2 変数の多項式環 $\mathcal{P}(x, y)$ の $*$ -表現 π を考えた時、 $\pi(x), \pi(y)$ は $\mathfrak{D}(\pi)$ を不変定義域とする可換な対称作用素であ

るが、その構造は非常に複雑であることは良く知られている
 し、可換性を保つたまま $\pi(x), \pi(y)$ の対称作用素として拡張
 することも非常に困難である。我々がここで問題にしたのは、
 ある $*$ -環 \mathcal{A} の $*$ -表現が与えられた時、これを $*$ -
 表現として拡張する一の方法を与えることである。特にこれ
 を使って、対称作用素の自己共役作用素への拡張と同じこ
 とを、 $*$ -表現における考えの一例として挙げる。

§2 環 \mathcal{A} の表現の議論は、前セクションの話から類推される
 ように、可換作用素の議論とある程度平行に行なうことが
 できる。

定義 \mathcal{A} を環、 π を \mathcal{A} のヒルベルト空間 \mathcal{H} における表現とする。
 る。

$$\|\xi\|_a = \|\pi(a)\xi\| + \|\xi\| \quad (a \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{D}(\pi))$$

と定義し、semi-norms $\{\|\cdot\|_a : a \in \mathcal{A}\}$ による $\mathcal{D}(\pi)$ の位相 $\tau_\pi(\mathcal{A})$
 による induced 位相 (t_π) と呼ぶ。 $\mathcal{D}(\pi)$ の t_π による完備化を
 $\mathcal{D}(\widehat{\pi})$ と書けば $\mathcal{D}(\widehat{\pi}) \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{D}(\widehat{\pi}) \subset \overline{\mathcal{D}(\pi)}$ である。

$$\widehat{\pi}(x) = \overline{\pi(x)}|_{\mathcal{D}(\widehat{\pi})} \quad (x \in \mathcal{A})$$

とすれば $\widehat{\pi}$ は \mathcal{A} の表現となる。 $\widehat{\pi}$ は π の閉包、 $\widehat{\pi} = \pi$ のとき
 π は閉であるという。

定義 \mathcal{A} , π は前のとおりとし,

$$\mathfrak{D}(\pi^*) = \bigcap_{x \in \mathcal{A}} \mathfrak{D}(\pi(x)^*) \quad , \quad \pi^*(x) = \pi(x^*)^* |_{\mathfrak{D}(\pi^*)} \quad (x \in \mathcal{A})$$

とある。 $\mathfrak{D}(\pi^*)$ が \mathfrak{D} で dense なとき、 π^* はやはり \mathcal{A} の表現になっている。 π^* を π の adjoint 表現という。

$*$ -環 \mathcal{A} の表現 π が $*$ -preserving であることは $\pi \subset \pi^*$ と同値である。非有界作用素との対応をかんぱんに書いておく。

可閉作用素 $T \longleftrightarrow$ 表現 π

$\bar{T} \longleftrightarrow \tilde{\pi}$

$T^* \longleftrightarrow \pi^*$

対称作用素 \longleftrightarrow $*$ -表現

π が $*$ -表現 ならば、対称作用素と同様に、 $\pi \subset \tilde{\pi} \subset \pi^*$ となっている。自己共役作用素に相当する表現は $\pi = \pi^*$ で定義すればよいであろうである。(実際には満たすとき自己共役表現と呼ぶ。) \mathfrak{D} の $*$ -表現 π, ρ が $\pi \subset \rho$ ならば $\pi \subset \rho \subset \rho^* \subset \pi^*$ であるから、自己共役表現 π は $*$ -表現として極大なものである。しかし、自己共役表現にはある意味で病的なものもたくさん含むから、実際には自己共役作用素に相当するものではない。いくつかの $*$ -環のクラスに対し、自己共役作用素に相当する表現と、その表現への拡大の方法を次セクション以下で考える。

§3 可換 *-環と ε の表現の induced extension

\mathcal{A} は *-環. π と ε の *-表現 とする.

$$\pi(\mathcal{A})'_\omega = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; (B\pi(x), \eta) = (B\xi, \pi(x^*)\eta) \right. \\ \left. \text{for } \forall x \in \mathcal{A}, \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi) \right\}$$

$$\pi(\mathcal{A})'_s = \left\{ B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; B\pi(x) \subset \pi(x)B \text{ for } \forall x \in \mathcal{A} \right\}$$

とある. ε は ε の $\pi(\mathcal{A})$ の weak, strong commutant と呼ぶ. 換言すれば

$$B \in \pi(\mathcal{A})'_\omega \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi^*), B\pi(x) = \pi^*(x)B \text{ on } \mathcal{D}(\pi)$$

$$B \in \pi(\mathcal{A})'_s \Leftrightarrow B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), B\mathcal{D}(\pi) \subset \mathcal{D}(\pi), B\pi(x) = \pi(x)B \text{ on } \mathcal{D}(\pi)$$

から左へにわかるように

$\pi(\mathcal{A})'_\omega$ は *-不変, 弱肉, 線型空間 (一般に環ではない.)

$\pi(\mathcal{A})'_s$ は (π : 肉包) 強肉線型空間 (一般に *-不変ではない.)

3-1. $\pi(\mathcal{A})'_\omega$ を使った表現 π の拡大の方法を与える.

$I \in \mathcal{M} \subset \pi(\mathcal{A})'_\omega$ なる任意の \mathcal{M} に対して

$$\mathcal{D}(\pi_m^\circ) = \text{linear span of } \mathcal{M}\mathcal{D}(\pi)$$

$$\pi_m^\circ(x) \left(\sum c_k \xi_k \right) = \sum c_k \pi(x) \xi_k \quad (c_k \in \mathcal{M}, \xi_k \in \mathcal{D}(\pi))$$

となくと π_m° は π の表現として \mathcal{M} の拡大となる, である. ($\pi_m^\circ(x) \subset \pi^*(x)$ for $\forall x \in \mathcal{A}$ に注意)

$\pi_m = \widetilde{\pi}_m^\circ$ (π_m° の肉包) は π の

\mathcal{M} による induced extension とする.

一般に $\pi(\mathcal{A})'_s \subset \pi(\mathcal{A})'_\omega$ であるが, 上の \mathcal{M} が, $\mathcal{M} \not\subset \pi(\mathcal{A})'_s$

のとき, π_m は π の真の拡大となる, である.

3-2 命題 3-1 に おいて 表現 π_M が $*$ -preserving とするには $M^*M \subset \pi(A)'_0$ が 必要十分。

($M \subset \pi(A)'_0$ とするには $M^* \subset \pi(A)'_0$ であるが、一般に $\pi(A)'_0$ は 積で閉じているので、 $M^*M \subset \pi(A)'_0$ も一般には成立しない。)

3-3 定義 A を可換な $*$ -環 とする。 A の表現 π が standard であるとは $\overline{\pi(x)} = \pi(x^*)^*$ が 任意の $x \in A$ で 成立すると する。 これは 任意の A の エルミート元 x に対して $\pi(x)$ が 本質的 自己共役 であるという条件と 同値である。

(integrable と 言うてもよい。 c.f. レクチャー)

§1 で述べた例における P は $P(x)$ の standard 表現 になっている。 §2 での 内作用素 と 表現 の 対応 といえば、 $*$ -環 A が 可換 の とき、 standard 表現 が 自己共役作用素 に 相当する ものである。

3-4 定理 (Schmüdgen) π を 可換な $*$ -環 A の $*$ -表現 とし、 π は A の standard 表現 P を π の 拡大 として もつ とする。 この とき P は π の induced extension として 実現 できる。

(証明) P が standard であり、 任意の $a = a^*, b = b^* \in A$ に 対して 自己共役作用素 $\overline{P(a)}, \overline{P(b)}$ の spectral projection は 互に

に可換となる。 $\{\overline{P(a)}\} (a=a^* \in \mathcal{A})$ の spectral projection 全体の生成する可換 v. Neumann 環 \mathcal{M} と可換 $1 \in \mathcal{M} \subset P(\mathcal{A})_s \subset \pi(\mathcal{A})_w$ 。このとき $P = \pi_{\mathcal{M}}$ と得る。 \parallel

§4 Induced extension の問題点と \mathcal{E} の一般化.

前セクションでは、 \mathcal{A} が可換のとき、induced extension を使って我々の目的が達成できたのを見た。このセクションでは、 \mathcal{A} が CCR-algebra としたとき、induced extension では我々の目的が果たせないので見て、induced extension の拡大の方法を一般化することを目指す。

\mathcal{A} を n 次元有限自由度 \mathcal{E} もつ CCR-algebra とする。すなわち、 \mathcal{A} は次の交換関係 \mathcal{E} を満たす hermite $\pi \{p_i, q_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ と単位元 1 から生成される $*$ -環とする。

$$\begin{aligned} [p_i, p_j] &= [q_i, q_j] = 0 \\ [p_i, q_j] &= -i\delta_{ij}1 \end{aligned} \quad (\text{正準交換関係})$$

この CCR-algebra \mathcal{A} に対する \mathcal{E} のよい表現は次の Schrödinger 表現である。

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= L^2(\mathbb{R}^n) \\ \mathcal{D}(P_i) &= \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ (P_i(p_i) f)(t) &= -i \frac{\partial f}{\partial t_i}(t), \end{aligned}$$

$$(P_s(q_i) f)(t) = t_i f(t)$$

とすれば P_s は CCR-algebra \mathcal{A} の $\mathcal{D}(P_s)$ 上定義域とする $*$ -表現となる。 $\therefore \mathcal{A}$ は Schrödinger 表現となる。

さて: α CCR-algebra と Schrödinger 表現に対して 定理 3-4 の類似が成立するかどうかをみよう。

命題 4-1. \mathcal{A} , P_s は上の α とする。

$$\mathcal{D}(\pi) = \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) ; f^{(k)}(0) = 0 \quad k=1,2,3,\dots,0\}$$

$$\pi = P_s|_{\mathcal{D}(\pi)}$$

と置く。 $\therefore \alpha$ の時

$$\pi(\mathcal{A})'_\omega = \begin{cases} \mathbb{C}1 & (n \geq 2) \\ \{M_k ; k \text{ は } \{x > 0\}, \{x < 0\} \text{ 上 } \mathbb{C}^n \text{ 上の } k \text{ 定数}\} & (n=1) \end{cases}$$

$\therefore \mathbb{C}$ の M_k は 実数 k による かけ算作用素である。従って $\mathcal{D}(\pi)$ と $\pi(\mathcal{A})'_\omega$ は不変にする。よって P_s は π の induced extension としては実現できる。

上の命題を示すように、 \mathcal{A} が 非可換 α とするには induced extension は $\mathcal{D}(\pi)$ の 強力な拡大の方法では行ない。以下 α の拡大の方法を一般化する α とを試みる。

以下、 \mathcal{A} は一般の $*$ -環、 π は \mathcal{A} の $*$ -表現とする。 $\alpha \in \text{End}(\mathcal{A})$ に対して

$$(\pi(A), \alpha)'_{\omega} = \{ A \in B(\mathcal{Y}); (A\pi(\alpha(x))\xi, \eta) = (A\xi, \pi(\alpha^*)\eta) \}$$

$$\text{for } x \in \mathcal{X}, \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi) \}$$

$$(\pi(A), \text{End})'_{\omega} = \bigcup_{\alpha \in \text{End}(\mathcal{X})} (\pi(A), \alpha)'_{\omega}$$

$$(\pi(A), \text{Aut})'_s = \bigcup_{\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{X})} (\pi(A), \alpha)'_{\omega}$$

と示す。

定理 4-2 ([IKO], [K]) $\mathcal{M} \in \mathcal{M} \subset (\pi(A), \text{End})'_{\omega}$ ならば \mathcal{M} に対して

$$\mathcal{D}(\pi_{\mathcal{M}}) = \text{linear span of } \mathcal{M}\mathcal{D}(\pi)$$

$$\pi_{\mathcal{M}}(x)(\sum A_i \xi_i) = \sum A_i \pi(\alpha_i(x)) \xi_i$$

$$(A_i \in \mathcal{M}, A_i \in (\pi(A), \alpha_i)'_{\omega}, \xi_i \in \mathcal{D}(\pi))$$

と定義すれば $\pi_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{D}(\pi_{\mathcal{M}})$ で定義域とされる \mathcal{A} の表現で、これは π の拡大となる、である。

$\pi_{\mathcal{M}}$ の内包とあることは、 \mathcal{M} によって得られる \mathcal{A} の $\pi_{\mathcal{M}}$ と同じ。

これは π の \mathcal{M} による g -(-一般化) induced extension と呼ばれることができる。

定義 4-3. $\mathcal{M} \subset (\pi(A), \text{End})'_{\omega}$ に対して $*$ -consistent であるとは

$$(A\pi(\alpha(x))\xi, B\eta) = (A\xi, B\pi(\beta(x^*))\eta)$$

$$\text{for } \forall A, B \in \mathcal{M}, \forall x \in \mathcal{X}, \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}(\pi)$$

が成立するとする。したがって、 $\alpha, \beta \in \text{End}(A)$ は $A \in (\pi(A), \alpha)'_\omega$ $B \in (\pi(A), \beta)'_\omega$ とみたすことができる。

命題 4-4. $\mathcal{K} \subset (\pi(A), \text{End})'_\omega$ に対して π の \mathcal{K} に g -induced extension $\pi|_{\mathcal{K}}$ が $*$ -表現と見たためには \mathcal{K} が $*$ -consistent であることが必要十分。

注意 特に $\mathcal{K} \subset (\pi(A), \text{Aut})'_\omega$ ならば \mathcal{K} が $*$ -consistent であるならば任意の $A, B \in \mathcal{K}$ に対して $A \in (\pi(A), \alpha)'_\omega, B \in (\pi(A), \beta)'_\omega$ と仮定すると $\alpha, \beta \in \text{Aut}(A)$ であるとき $B^*A \in (\pi(A), \alpha\beta^{-1})'_\omega$ が成立すると同値である。

$\mathcal{K} \subset (\pi(A), \text{id}_A)'_\omega = \pi(A)'_\omega$ ならば \mathcal{K} は g -induced extension の確率に induced extension の一般化として見ることができ、命題 4-4 は命題 3-2 に対応している。

定理 4-2 に述べた g -induced extension は §4 の最初に述べた CCR-algebra A , Schrödinger 表現 P_S , $\pi(C P_S)$ に適用してみたところ P_S は π の g -induced extension の実現とみることが出来る。以下でも、一般的な定理を述べよう。

定義 4-5 \mathcal{A} は 前 $\mathcal{U}(\mathcal{N})$ 空間 K 上 の CCR-algebra とする。 \mathcal{A} には Schrödinger 表現の一般化として Fock 表現と "3-5-9" 表現がある。(c.f. [BR]) \mathcal{A} の表現が normal とは、 \exists の表現が Fock 表現の直和に書けることを言う。

定理 4-6 [K] \mathcal{A} は CCR-algebra over K , $\pi \in \mathcal{A}$ の $\mathcal{U}(\mathcal{N})$ 空間 \mathcal{H} 上の $*$ -表現で、 \mathcal{A} の normal 表現 $\rho \in \mathcal{E}$ の拡大として持つことができる (同じ空間 \mathcal{H} 上で)。このとき ρ は π の g -induced extension として実現できる。

最後に定理 3-4 の一般化を述べよう。

$G \in \text{Lie 群}$, $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ の Lie 環, $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g}) \in \mathfrak{G}$ の包絡環とする。 G の unitary 表現があるならば、これに対する C^∞ -級ベクトル全体を定義域とする \mathcal{A} の $*$ -表現 ρ が自然に作れる。これを $\mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の integrable 表現としよう。

定理 4-7 [K] $\pi \in \mathcal{A} = \mathcal{E}(\mathfrak{g})$ の $*$ -表現で同じ表現空間 \mathcal{H} 上に integrable 表現 $\rho \in \mathcal{E}$ の拡大として持つことができる。この時 ρ は π の g -induced extension として実現できる。

References

- [BR] O. Bratteli and D.W. Robinson, Operator Algebras and Quantum Mechanics II, Springer (1981)
- [IKO] A. Inoue, H. Kurose and S. Ôta, Extensions of unbounded representations, preprint (1990)
- [K] H. Kurose, A Generalization of induced extensions of unbounded representations, in preparation.
- [S] K. Schmüdgen, Unbounded Operator algebras and Representation Theory, Birkhäuser (1990)