数理解析研究所講究録
第 752 巻 1991 年 164-172

テータ級数と $S_2(\Gamma_0(q))$ の分解

高知大学 理学部　　塩 田 研 一 (Ken-ichi Shiota)

§0. 序

これは一変数の保型形式について行った数値実験の報告である。

保型形式の空間の Q-rational Hecke-module としての既約分解については一般的な結果は何も知られていない。たとえ実験的にでも、これと「何か別のもの」とを関連付けたい、と思う。

手掛かりとしては Basis Problem がある。

Hecke に始まる Basis Problem — 二次形式に付随するテータ級数による保型形式の空間の生成問題— は、Eichler が最初の証明を与え、今では 土方先生、Pizer 、Shemanske らによって elliptic modular case には非常に一般的な形で解かれている。(cf. [HPS] 。尚、Siegel modular case についは吉田先生の [Yo80] 、[Yo84] 等を見られたい。)

これらのテータ級数から幾つかの Q-rational Hecke-submodule が得られることに着目しよう。もしそれらの中に自明でない部分空間が現れれば、そのことから「既約分解」の説明がつくことも考えられなくはない。実際、唯一つではあるがその様な例が知られていた。

そこで、素数レベル、重さ 2 の場合に絞って沢山の例を計算してみた。すると、上述の「説明可能性」について或る判定条件らしきものが観察された。また副産物として (一番弱い形での)「 Hecke の予想」の反例がみつかった。

§ 1. 記号と準備

まずは記号から。

$q=$ 素数,

$$\Gamma_0(q)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \;\middle|\; c\equiv 0 \ (\bmod q)\right\},$$

$\mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))=\{$ elliptic modular forms of weight 2 w.r.t. $\Gamma_0(q)\}$,

$\mathrm{S}_2(\Gamma_0(q))=\{$ elliptic cusp forms of weight 2 w.r.t. $\Gamma_0(q)\}$,

$\mathrm{M}_2^{\pm}(\Gamma_0(q))$, $\mathrm{S}_2^{\pm}(\Gamma_0(q))=$ the (± 1)-eigenspaces of the Atkin-Lehner involution

$$f\longmapsto f\Big|_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix},$$

$f\in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))$ の Fourier 展開を

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a(f,n)\exp(2\pi\sqrt{-1}nz)$$

と書く。

$a(f,1)=1$ なる Hecke-eigenform $f\in \mathrm{S}_2(\Gamma_0(q))$ を *newform* と呼び、$\mathrm{S}_2(\Gamma_0(q))$ の $\mathbf{Q}$-rational Hecke-module としての既約成分を簡単に *factor* と呼ぶことにする。

以下の記号については、詳しくは Pizer [Pi80] を見られたい。

$\mathcal{D}=$ the (q,∞)-quaternion algebra over $\mathbf{Q}$,

$\mathcal{O}=$ a maximal order in $\mathcal{D}$,

$H=$ the class number of $\mathcal{O}$,

$\mathcal{I}_1,\cdots,\mathcal{I}_H$: left $\mathcal{O}$-ideal classes の完全代表系,

$\mathcal{I}_{ij}=\mathcal{I}_j^{-1}\mathcal{I}_i$,

$\mathcal{O}_j=\mathcal{I}_{jj}=$ the right order of $\mathcal{I}_j$ (also a maximal order in $\mathcal{D}$),

$$\theta_{ij}(z)=\frac{1}{\sharp\mathcal{O}_j^{\times}}\sum_{x\in\mathcal{I}_{ij}}\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\mathrm{N}_{\mathcal{D}/\mathbf{Q}}(x)}{\mathrm{N}(I_{ij})}z\right),$$

: rank 4 の正定値二次形式に付随したテータ級数.

θ_{ij} を (i,j)-成分にもつ $H\times H$-行列を

$$\left(\theta_{ij}\right)_{1\le i,j\le H}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{B}(n)\exp(2\pi\sqrt{-1}nz)$$

with the Brandt matrices $\mathrm{B}(n)\in \mathrm{M}_H(\mathbf{Q})$

と書く。$n\geq 1$ ならば $\mathrm{B}(n)\in \mathrm{M}_H(\mathbf{Z})$ である。

素数レベルの場合の Basis Problem は、

Theorem (Eichler) $\theta_{ij}\in \mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))$ であって、

(1) $\mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))=\left\langle \theta_{ij} \;\middle|\; 1\le i,j\le H\right\rangle_{\mathbf{C}}$: the **C**-span of θ_{ij}'s,

(2) $H=\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))$,

(3) $\left(\theta_{ij}\mid \mathrm{T}(n)\right)_{1\le i,j\le H}=\mathrm{B}(n)\left(\theta_{ij}\right)_{1\le i,j\le H}$

ただし、$\mathrm{T}(n)$ = the n-th Hecke operator 。

Remark 各 j $(1\le j\le H)$ に対して、$\left(\theta_{ij}\right)$ の第 j 列の生成する部分空間

$$W_j=\left\langle \theta_{ij} \;\middle|\; 1\le i\le H\right\rangle_{\mathbf{C}}$$

は、(3) から $\mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))$ の **Q**-rational Hecke-submodule である。

W_j は H 個の元で生成された、H 次元 vector space $\mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))$ の部分空間だが、（小さいレベルの例を計算して）Hecke は次を予想した。

Conjecture 1 (Hecke) $^\forall W_j=\mathrm{M}_2(\Gamma_0(q))$?

これが正しくないことは次の 2 つの Theorems からわかる。それを述べる為に、

Definition $\mathcal{O}_j$: of type I (resp. II)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ \mathcal{O}_j\cong \text{no other (resp. just one another) } \mathcal{O}_k$$

Fact (1) $^\forall$ maximal order in $\mathcal{D}\cong$ some $\mathcal{O}_j$,

(2) Each $\mathcal{O}_j$ is of type I or II.

ここで

$T =$ the type number of $\mathcal{D}$

$= \sharp\{$ isomorphism classes of maximal orders in $\mathcal{D}\}$

と置くと、

Theorem (1) $T = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(q))$,

(2) $\frac{H}{2} < T \leq H$,

(3) $T = H \iff q \leq 31,\ q = 41, 47, 59$ or 71.

Theorem (Ponomarev) $\mathcal{O}_j$: of type I ならば、

(1) $\theta_{ij} \in \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(q))$ for ${}^\forall i$ i.e. $W_j \subseteq \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(q))$,

(2) $\mathcal{O}_i \cong \mathcal{O}_k \implies \theta_{ij} = \theta_{kj}$.

(従って W_j は本質的に T個の元で生成される。)

Example $q = 37$ の時は、

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{M}_2(\Gamma_0(37)) = 3, \qquad \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(37)) = 2$$

であって、${}^\exists W_j \subseteq \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(37)) \neq \mathrm{M}_2(\Gamma_0(37))$.

だが、小さいレベルではまだ次が成り立っている:

Conjecture 2

$$\begin{cases} \mathcal{O}_j : \text{of type I} \implies W_j = \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(q)) \\ \mathcal{O}_j : \text{of type II} \implies W_j = \mathrm{M}_2(\Gamma_0(q)) \end{cases} \quad ?$$

§ 2. 説明可能性

Conjecture 2 には次の反例が見つかっていた。

Example (Pizer-Ohta)　$q = 67$ のとき、$H = 6$ 、$T = 4$ であって、

$$\mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(67)) = \underset{2}{\langle f_A \rangle_{\mathcal{H}}}, \qquad \mathrm{S}_2^-(\Gamma_0(67)) = \underset{1\,,\,2}{\langle f_B,\ f_C \rangle_{\mathcal{H}}}.$$

ただし、

$f_A,\ f_B,\ f_C$: newforms in $\mathrm{S}_2(\Gamma_0(67))$,

$\langle\ \ \rangle_{\mathcal{H}}$ = the $\mathbf{C}$-span of their conjugates,

$\dim_{\mathbf{C}}\langle f_A \rangle_{\mathcal{H}} = 2, \quad \dim_{\mathbf{C}}\langle f_B \rangle_{\mathcal{H}} = 1, \quad \dim_{\mathbf{C}}\langle f_C \rangle_{\mathcal{H}} = 2.$

そして、

$\mathcal{O}_1,\ \mathcal{O}_2$: of type I,

$\mathcal{O}_3 \cong \mathcal{O}_4,\ \mathcal{O}_5 \cong \mathcal{O}_6$: of type II,

$W_1 = W_2 = \mathrm{M}_2^-(\Gamma_0(67))$,

$W_3 = W_4 = \langle$ Eisenstein 級数, $f_B,\ f_C \rangle_{\mathcal{H}}$

$W_5 = W_6 = \mathrm{M}_2(\Gamma_0(67))$.

上の例では $W_5 = W_3 \oplus \langle f_B \rangle_{\mathcal{H}}$ となっていて、factor $\langle f_B \rangle_{\mathcal{H}}$ の分解は「テータ級数によって説明がつく」。

Problem　この様な現象はどのくらいの頻度でおこるのか？

Pizer は $q \leq 97$ の範囲の例を計算していたが、その中では $q = 67$ の場合が唯一であった。

Remark　Conjecture 2 が OK $\Longleftrightarrow$ $^{\forall}$newform が次の意味で「説明不可能」。

Definition　newform f が「説明不可能」

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{i)} & f \in \mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(q)) \text{ のとき、} f \in W_j \text{ for } {}^{\forall} j \text{ s.t. } \mathcal{O}_j : \text{of type II}, \\ \text{ii)} & f \in \mathrm{S}_2^-(\Gamma_0(q)) \text{ のとき、} f \in {}^{\forall}W_j, \end{cases}$$

そうでないとき「説明可能」という。

(unexplainable, explainable と訳してみましたが、「あんな英語はない」と不評でした。何か良い訳語はないものでしょうか。)

Example $q = 67$ の場合は f_A, f_C が「説明不可能」、f_B が「説明可能」。

筆者は Pizer-Hijikata のアルゴリズムと、斎藤 裕先生のアイデアを用いて、997 までの全ての素数レベルについて、テータ級数、W_j、$S_2^{\pm}(\Gamma_0(q))$ の既約分解等を計算した。後半はそのデータの観察結果を述べる。

§ 3. 一番弱い形の Hecke の予想

Conjecture 3 各 q ごとに $W_j = M_2(\Gamma_0(q))$ なる W_j が必ず存在するか？

これにも反例がみつかった：

Counter Example $q = 307$ のとき、$H = 26, T = 16$ 、

$$\begin{array}{ll} S_2^+(\Gamma_0(307)) = \langle f_A \rangle_{\mathcal{H}}, & S_2^-(\Gamma_0(307)) = \langle f_B,\ f_C,\ f_D,\ f_E,\ f_F,\ f_G \rangle_{\mathcal{H}}. \\ \qquad\qquad\qquad\quad 10 & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 1,\ \ 2,\ \ 9 \end{array}$$

であって、

$$\sharp\Big(\{ f_B,\ f_C,\ f_D,\ f_E \} \cap W_j \Big) \le 3 \quad \text{for } {}^\forall j.$$

従って、

$${}^\forall W_j \ne M_2(\Gamma_0(307)) \ !$$

H個のテータ級数でH次元を張るのが Basis Problem の理想だったが、それは夢に終わった。

§ 4. 観察

$q \leq 997$ の範囲の素数レベルについて次の事実が成立している。

Observation 1 newform f が「説明可能」

$$\Longrightarrow {}^{\exists}i \neq j \quad \text{s.t.} \quad W_i = W_j \oplus \langle f \rangle_{\mathcal{H}}$$

この観察から「説明可能」という命名をした訳だが、これはたとえ事実であっても証明するのは難しそうだ。

Observation 2 $\mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(q))$ の 1 次元 factor $\langle f \rangle_{\mathcal{H}}$ (f は newform) について、

$$f : \text{「説明不可能」} \Longleftrightarrow \langle f \rangle_{\mathcal{H}} = \mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(q))$$

(特に $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(q)) = 1$)

ちなみに、$q \leq 997$ の範囲で

$\sharp\{$「説明不可能」な $\mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(q))$ の 1 次元 factor $\} = 9$,

$\sharp\{$「説明可能」な $\mathrm{S}_2^+(\Gamma_0(q))$ の 1 次元 factor $\} = 24$.

Observation 3 $\mathrm{S}_2^-(\Gamma_0(q))$ の 1 次元 factor $\langle f \rangle_{\mathcal{H}}$ (f は newform) について、

f :「説明不可能」 $\Longleftrightarrow$ f に対応する strong Weil curve が

rational torsion point をもつ。

rational torsion point の存在は Fourier 係数の合同式

$$a(f,p) \equiv 1 + p\ \Big(= a(\text{Eisenstein 級数}, p)\Big) \mod \ell \quad \text{for } {}^{\forall}\text{prime } p \neq q$$

(ℓ=torsion の order) を導くが、そうすると思い出すのが、

Theorem (Brumer-Doi) ℓ を $\dfrac{q-1}{12}$ の分子を割る素数とするとき、各 j に対して、

${}^{\exists} f \in \mathrm{S}_2(\Gamma_0(q)) \cap W_j$: newform,

$^{\exists} l \mid \ell$: f の Fourier 係数の体 $K_f = \mathbf{Q}(a(f,n)\text{'s})$ の prime

s. t.

$a(f,n) \equiv a(\text{Eisenstein 級数}, n) \quad \bmod l \quad \text{for } {}^{\forall} n \geq 1$

この形の合同式を Brumer-Doi の合同式と呼ぶことにすると、

Observation 4 $S_2^-(\Gamma_0(q))$ の newform f について、

f :「説明不可能」

$\Longleftrightarrow$ f は適当な ℓ について Brumer-Doi の合同式を満たす。

$q \leq 997$ の範囲で

$\sharp\{$「説明不可能」な $S_2^-(\Gamma_0(q))$ の factor $\} = 178$,

$\sharp\{$「説明可能」な $S_2^-(\Gamma_0(q))$ の factor $\} = 48$

であり、例外がひとつもなかった。

尚、$S_2^+(\Gamma_0(q))$ の 2 次元以上の factor については、まだ判定条件らしきものはみつかっていない。

参考文献

[Ei] M. Eichler, The basis problem for modular forms and the traces of the Hecke operators, Lecture Notes in Math. 320, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[He] E. Hecke, Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen, Mathematische Werke, 789-918.

[HPS] H. Hijikata, A. Pizer, T. Shemanske, The basis problem for modular forms on $\Gamma_0(N)$, Memoirs of the Amer. Math. Soc., Vol.82, No.418, 1989.

[Pi78] A. Pizer, A note on a conjecture of Hecke, Pacific J. Math. 79 (1978), 541-547.

[Pi80] A. Pizer, An Algorithm for Computing Modular Forms on $\Gamma_0(N)$, J. of Algebra 64 (1980), 340-390.

[Sh] K. Shiota, On theta series and the splitting of $S_2(\Gamma_0(q))$, to appear.

[Yo80] H. Yoshida, Siegel's Modular Forms and the Arithmetic of Quadratic Forms, Inv. math. 60 (1980), 193-248.

[Yo84] H. Yoshida, On Siegel modular forms obtained from theta series, J. reine angew. Math. 352 (1984), 184-219.