

ヒルベルトモジュラースキームの局所ゼータ関数

岐阜大学教育学部数学 畑田-幸 (Kazuyuki Hatada)

序. Hatada [7, Theorem 1], [8, Theorems 4 and 5], [9, Theorems 4 and 5] において, 高次元 (即, 任意次元) モジュラー多様体の適当な smooth compact 化の, 任意次数の, \mathbb{Z} 係数特異ホモロジー群と ℓ -進コホモロジー群に, Λ ッケ環が自然に作用する事を示した。この講演では, 総実代数体 K に関するヒルベルトモジュラースキームの, smooth compact 化に対して, これらの作用素を用いて, その素点 p における局所ゼータ関数 (ここで p は good reduction な素数 p で, p は K で remain prime であるとする) が書き表せた事と, それらの作用素の任意の固有値のアルキメデス的絶対値による評価を与えた事を, 主として話した。(cf. Hatada [11])

§ 1.

K : 総実代数体; $g = [K:\mathbb{Q}]$; 記法を簡単にする為,
 K の strict な類数を 1 とこの講演では仮定したが, 以下に記
 した諸結果はこの条件なしに成立する事を, 我々は示す事が
 できる。 \mathcal{O}_K : K の代数的整数全体の環; N : 3 以上
 の任意整数; ζ_N : 1 の原始 N 乗根;
 $\Gamma(1)_K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathcal{O}_K) \mid ad-bc \text{ は } \mathcal{O}_K \text{ の総正整数} \right\}$;
 $\Gamma(N)_K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma(1)_K \mid a-1 \equiv d-1 \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{N\mathcal{O}_K} \right\}$;
 \mathfrak{h}_g : 複素上半平面; \mathfrak{h}_g^g : \mathfrak{h}_g の g 個の直積;
 $GL^+(2, K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(K) \mid ad-bc \text{ は 総正} \right\}$;
 $GL^+(2, K)$ を \mathfrak{h}_g^g に通常のように作用させる (cf.
 Shimizu [16])。 $\Gamma(N)_K \backslash \mathfrak{h}_g^g$: 複素解析商空間 (Hilbert
 modular 多様体); φ : Euler phi 函数; level N 構造
 付の, \mathcal{O}_K による real multiplication を持つ Abel 多様体の
 moduli の理論により, 次の性質を備えた $\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の
 moduli の scheme $\mathcal{M}(N)$ が存在する:

$\mathcal{M}(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \mathbb{C} = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} \Gamma(N)_K \backslash \mathfrak{h}_g^g$ (disjoint),
 右辺は 1 の原始 N 乗根と 1 対 1 に対応している。(cf.

Rapoport [15]).

半群 $G_2^+(\mathcal{O}_K) \stackrel{\text{def.}}{=} GL^+(2, K) \cap M_{2,2}(\mathcal{O}_K)$; $HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$
 $\stackrel{\text{def.}}{=} \Gamma(N)_K$ と半群 $G_2^+(\mathcal{O}_K)$ に関する Hecke 環。

Toroidal Compact 化を考へる。族 $\{\Gamma(N)_K \setminus \mathfrak{h}_g^g\}_{N \geq 3}$ の同時 toroidal compact 化の爲に, regular かつ projective な $\Gamma(1)_K$ -admissible family $\Sigma = \{\Sigma_\alpha\}_{\Sigma_\alpha: \text{rational components of polyhedral cone decomposition}}$ をひとつ定めよ。 $M(N)_\mathbb{C} = (\Gamma(N)_K \setminus \mathfrak{h}_g^g) \sim \mathbb{Z}^n$ この Σ に関する $\text{Spec } \mathbb{C}$ 上の toroidal compact 化を表す。 $M(N) = \mathcal{M}(N) \sim \mathbb{Z}^n$ この Σ に関する $\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の toroidal compact 化を表す。 morphism $M(N) \rightarrow \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ は proper かつ smooth となる。この時次の結果が成立する。

$$M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \mathbb{C} = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} M(N)_\mathbb{C} \quad (\text{disjoint});$$

$$M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N] = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} B(N) \quad (\text{disjoint});$$

$B(N)$ は $\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]$ 上で絶対既約;

$$B(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]} \text{Spec } \mathbb{C} = M(N)_\mathbb{C};$$

今 p を $p \nmid N$ をみたす任意素数とする。 \mathfrak{f} を $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]$ の素イデアルで $\mathfrak{f} | p$ なるものとし, $D(N) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{B(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]} \text{Spec } (\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N] / \mathfrak{f})}$ と定める。(この $D(N)$ は $D_p(N)$ と書いた方が正確。) ここで $\overline{\mathbb{F}_p} = \overline{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N] / \mathfrak{f}}$ 。 $D(N) (= D_p(N))$ は $\text{Spec } \overline{\mathbb{F}_p}$ 上 proper かつ smooth となる。この時,

$$M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} D(N) \quad (\text{disjoint})$$

が成立する。

まず次の2つの定理を得る。

定理1 (Hatada [7]). There is a natural ring homomorphism $f_n: HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{Z}} H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ for each integer $n \geq 0$.

定理2 (Hatada [8], [9]). Let l and p be prime numbers with $p \nmid (lN)$. There is a natural anti-ring homomorphism $f_p^{(n)}: HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}_l} H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_l)$ (resp. $f_p^{(n)}: HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_l \longrightarrow \text{End}_{\mathbb{Q}_l} H^n(D(N), \mathbb{Q}_l)$) for each integer $n \geq 0$.

各々の整数 $n \geq 0$ に対し, $H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_l) \cong H^n(D(N), \mathbb{Q}_l)$ が成立する。この同型の下で $f_p^{(n)} = f_p^{(n)}$ とみなせる。標準的同型 $H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ により, $h \in HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$ に対し, $f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id.} \in \text{End}_{\mathbb{C}} H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ を得る。Kronecker index による complete duality $H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \times H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ に関する $f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id.}$ の転置写像 ${}^t(f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id.}) \in \text{End}_{\mathbb{C}} H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ が得られる。よって, 次の様にして自然な anti-ring homo-

morphism $f^{(n)}: HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}} H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ が定義される。

定義. n を $0 \leq n \leq 2 \dim_{\mathbb{C}} M(N)_{\mathbb{C}} = 2g$ を満たす整数とする。上記の記号の下で, $f^{(n)}(h) = {}^t(f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id.})$ for all $h \in HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$, により $f^{(n)}$ を定義する。

さて, $M(N)_{\mathbb{C}}$ は smooth な projective variety なので, その上に少なくともひとつは Hodge metric が存在する。この Hodge metric に関して, よく知られている様に, Hodge 分解: $H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\substack{u+v=n \\ u \geq 0 \\ v \geq 0}} H^{(u,v)}(M(N)_{\mathbb{C}})$

が成立している。次の定理3と定理4は, この $f^{(n)}$ が具体的に, 調和形式の空間にどう作用するのかを示すものである。 $\Gamma = \Gamma(N)_K$ とおく。 $HR(\Gamma, G_2^+(\mathcal{O}_K))$ に属する任意の double coset $\Gamma \alpha \Gamma$ ($\alpha \in G_2^+(\mathcal{O}_K)$) に対し, $\Gamma \alpha \Gamma = \bigcup_{\nu} \Gamma \alpha_{\nu}$ (disjoint union) と書く。 Ω を $M(N)_{\mathbb{C}}$ 上のひとつの Hodge metric とする (必ず存在する)。 $H^{(u,v)}(M(N)_{\mathbb{C}})$ で, $M(N)_{\mathbb{C}}$ 上の type (u,v) の, Ω に関する, 調和形式の空間を表す。 ω を $H^{(u,v)}(M(N)_{\mathbb{C}})$ の任意の元とし, $\omega_0 = \text{the pull back of } \omega|_{\Gamma \backslash h_y^g} \text{ to } h_y^g$ と書く。

定理3 (cf. Hatada [7]). 上記の記号を用いる。 h_y^g 上の

微分形式 $\sum \omega_0 \circ \alpha_\nu$ は, $\Gamma \backslash \mathfrak{h}_g^3$ 上の微分形式とみなせるが, 更に, これは $M(N)_\mathbb{C}$ 全体上での $\text{type}(u, v)$ の連続微分形式として, 一意的に拡張される。

定理3における $M(N)_\mathbb{C}$ 上の微分形式を今 $\langle \omega \rangle$ で書き表す。 G を Ω に関する $M(N)_\mathbb{C}$ 上の Green 作用素とする。 $\text{id.} = H + d\delta G + \delta dG$ をポテンシャル理論における直交分解とする。上記及び定理3における記号の下で次の定理4を得る。定理4において, u と v は任意の非負整数を表す。

定理4 (cf. Hatada [7]).

$$(f^{(u+v)}(\Gamma \alpha \Gamma))(\omega) = H \langle \omega \rangle \quad \text{が成立する。}$$

この講演記録において, 以後すべて, p で $p\mathcal{O}_K$ が素イデアルである様な任意の素数を表すものとする。集合 $S(p\mathcal{O}_K)$ と $S(p\mathcal{O}_K)(N)$ を次の様に定める。

$$S(p\mathcal{O}_K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathcal{O}_K) \mid \frac{ad-bc}{p} \text{ は } \mathcal{O}_K \text{ の総正な単数} \right\},$$

$$S(p\mathcal{O}_K)(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S(p\mathcal{O}_K) \mid a-1 \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{N\mathcal{O}_K} \right\}.$$

$S(p\mathcal{O}_K)(N)$ を cosets の disjoint な union として書く:

$$S(p\mathcal{O}_K)(N) = \bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma(N)_K \alpha_i = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Gamma(N)_K \beta_j \Gamma(N)_K.$$

この時 Hecke 環 $HR(\Gamma(N)_K, \mathcal{G}_2^+(\mathcal{O}_K))$ の元 $T(p\mathcal{O}_K)$ を

$T(p\mathcal{O}_K) = \sum_{j=1}^v \Gamma(N)_K \beta_j \Gamma(N)_K$ により定める。 $p \nmid N$ の時、
 $SL(2, \mathbb{Z})$ の元 σ_p で $\sigma_p \equiv \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \pmod{N}$ を満たすもの
 が存在する。 σ_p は $\Gamma(1)_K$ の元として $\Gamma(N)_K \backslash \mathcal{H}_K^g$ の iso-
 morphism $\hat{\sigma}_p$ を引き起こす。 またこの σ_p は一意的に次
 の4つの isomorphisms を引き起こす。

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_p &: M(N)_{\mathbb{C}} \longrightarrow M(N)_{\mathbb{C}} && (\mathbb{C} \text{ 上}), \\ \tilde{\sigma}_p &: M(N) \longrightarrow M(N) && (\mathbb{Z}[\frac{1}{N}] \text{ 上}), \\ \tilde{\sigma}_p &: D(N) \longrightarrow D(N) && (\overline{\mathbb{F}}_p \text{ 上}), \\ \tilde{\sigma}_p &: M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p \longrightarrow M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p. \end{aligned}$$

これらの4つの $\tilde{\sigma}_p$ は別々の記号を用いるべきだが簡略して
 同じ記号で書いた。 これらの $\tilde{\sigma}_p$ 達は皆素体上で定義されてい
 る。 各々の整数 n に対して、 $\tilde{\sigma}_{p,n} \in GL(H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_\ell))$
 (resp. $[\tilde{\sigma}_{p,n}] \in GL(H^n(D(N), \mathbb{Q}_\ell))$) を、 $\tilde{\sigma}_p$ より引き
 おこされる標準的同型とする。

次の命題1と定理5を得る。

命題1 (Hatada [11, prop. 1]). $T(p\mathcal{O}_K)$ の correspondence であ
 る、 $\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の $M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} M(N)$ の subscheme
 $\mathcal{Z}(p\mathcal{O}_K)$ が構成される。 よして、 $(M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} M(N)) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \mathbb{C}$
 の各々の component $M(N)_{\mathbb{C}} \times_{\text{Spec } \mathbb{C}} M(N)_{\mathbb{C}}$ 上で、
 $\mathcal{Z}(p\mathcal{O}_K) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]} \text{Spec } \mathbb{C}$ は、 Hatada [8, p. 63 の下から4行

目と p.65 の Remark 2] と [9] に書いたものと同じ方法で定義される correspondence と一致する。

定理5 (Hatada [11]). 合同関係式。 $P \nmid N$ とする。

$(M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} M(N)) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ 上の correspondence として次の等式を得る。

$$\zeta(p\mathcal{O}_k) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p = \text{Frob}(p) + p^{g-1} \langle \tilde{\sigma}_p \rangle \circ {}^t(\text{Frob}(p)).$$

ここで, $\langle \tilde{\sigma}_p \rangle = M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ 上の各々の成分

$D(N)$ 上での morphism $\tilde{\sigma}_p : D(N) \rightarrow D(N)$ の correspondence;

$\text{Frob}(p) = M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p$ の各々の成分 $D(N)$ 上での

の Frobenius (p -th power) endomorphism of correspondence;

${}^t(\text{Frob}(p)) = \text{Frob}(p)$ の transposed correspondence;

である。

次の定理6とこの系を得る。

定理6 (Hatada [11]). $P \nmid N$ とする。 n を $0 \leq n \leq 2g$ を満足する任意整数とし, λ_p を $f^{(n)}(T(p\mathcal{O}_k))$ の任意の固有値を表す。 ($f^{(n)}$ は定理2において定義された写像である。) この時, 任意のアルキメデス的絶対値 $|\cdot|$ with $|2| = 2$ に対して, $|\lambda_p| \leq p^{n/2} + p^{(2g-n)/2}$ が成立する。

定理2と定理6により次の系を得る。

系6.1. 定理6におけると同じ記号を用いる。 m を正整数で、素因子分解 $m = p_1 p_2 \cdots p_r$ した時 各々の素数 p_i は「 $p_i \mathcal{O}_K$ は \mathcal{O}_K の素イデアル」である様な、任意の素数とする。この時、 $|f^{(n)}(T(m\mathcal{O}_K))$ の任意の固有値 $|\leq \prod_{i=1}^r (p_i^{n/2} + p_i^{(2g-n)/2})$ が成立する。

下記の定理7, 定理8と定理9において、 $f^{(n)}$ は定理2における写像を表す。次の定理7と定理8を、まず、得る。

定理7 (Hatada [11]). $p \nmid (lN)$ と仮定する。 n を $0 \leq n \leq 2g$ を満たす任意の整数とする。変数 X の多項式 $P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X)$ を次の式により定める。

$$P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X) \stackrel{\text{def}}{=} \det(X^2 - f^{(n)}(T(p\mathcal{O}_K))X + \tilde{\sigma}_{p,n} p^g).$$

この $P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ に含まれる monic 多項式であり、 l のとり方に依存しない。更に、 $P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X)$ の満たす次の式を得る。

$$P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(X - [\text{Frob}(p)]_n) \cdot \det(X - p^g [\tilde{\sigma}_{p,n}] [\text{Frob}(p)]_n^{-1}).$$

ここで、 $\text{Frob}(p) = D(N)$ の Frobenius (p -th power) endomorphism;
 $[\text{Frob}(p)]_n = \text{Frob}(p)$ によって引き起こされる $H^n(D(N), \mathbb{Q}_\ell)$ の

endomorphism; である。

定理7の系7.1. $n \neq g$ と仮定する。 $P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \prod_y (X - \rho_y)$ と書く。この時, $\det(X - [\text{Frob}(p)]_n) = \prod_{y'} (X - \rho_{y'})$ が成立する。但しここで y' は $|\rho_{y'}| = p^{n/2}$ を満たすすべての y 全体を動く。

定理8 (Hatada [11]). 定理7におけると同じ記法を用いる。 n を $0 \leq n \leq 2g$ を満たす任意の整数とする。次の等式を得る。

$$P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(X - [\text{Frob}(p)]_n) \cdot \det(X - [\text{Frob}(p)]_{2g-n}).$$

定義. $0 \leq n \leq 2g$ を満たす各々の整数 n に対して $P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X)$ を, $P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(1 - f^{(n)}(T(p\mathcal{O}_K))X + \tilde{\theta}_{p,n} p^g X^2)$ により, 定める。

V を有限体 k 上定義された非特異射影的代数多様体とする。^(smooth projective variety)
 $Z(V, X)$ を V のゼータ関数を表す。[即: $V_0 = V^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ とおくと, V_0 は $\text{Spec } k$ 上の variety になる。 k_j を $[k_j : k] = j$ を満たす k の拡大体とする。 $\theta_j =$ 体 k_j に係数を持つ V_0 の geometric points の個数, とおく。 $Z(V, X)$

は変数 X の形式的巾級数 $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} \theta_j j^{-1} X^j)$ として定義される。これが X の有理式になる事はよく知られている。]

Smooth projective variety $D(N)$ (resp. $M(N)_{\mathbb{C}}$) は素体 \mathbb{F}_p (resp. \mathbb{Q}) 上定義されている。グロタンディックの定理を用いれば, $\text{Spec } \overline{\mathbb{F}_p}$ 上の variety $D(N)$ のゼータ関数 $Z(D(N), X)$ は次の等式を満たす事がわかる。

$$Z(D(N), X) = \prod_{n=0}^{2g} (\det(1 - [\text{Frob}(p)]_n X))^{(-1)^{n+1}}$$

ここで $[\text{Frob}(p)]_n$ は定理7において説明したものを表す。

$D(N)$ のゼータ関数 $Z(D(N), X)$ について次の等式(定理9)を得る。

定理9 (Hatada [11]). $p \nmid N$ と仮定する。次の等式を得る。

$$Z(D(N), X) = \sqrt{\prod_{n=0}^{2g} P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X)^{(-1)^{n+1}}}$$

ここで右辺の定数項は 1 とする。

(この $Z(D(N), X)$ は X の有理式になる。)

定理9の系9.1 (Hatada [11]). $p \nmid N$ と仮定する。次の

等式を得る。

$$Z(M(N) \times_{\text{Spec } \mathbb{Z}[1/N]} \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}_p, X) = Z(D(N), X)^{\varphi(N)}$$

注1. $f^{(n)}$ を定理2における写像とする。各々の整数 n に対し、

$$\tilde{\sigma}_{p,n} = f^{(n)}(\Gamma(N)_K \sigma_p \Gamma(N)_K) \text{ を得る。}$$

注2. 標準的同型 $H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$

の下で、次の等式を得る。 n を $0 \leq n \leq 2g$ をみたす任意の整数とする。 f_n を定理1における写像とする。

$$P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(1 - (f_n(T(p\sigma_K)) \otimes \text{id.})X + (f_n(\Gamma(N)_K \sigma_p \Gamma(N)_K) \otimes \text{id.})p^g X^2)$$

モジュラー曲線のゼータ函数は、多くの数学者により詳しく研究されてきた。しかし高次元のモジュラー多様体のゼータ函数については、モジュラー曲線の場合程は、充分によく研究が未だなされていない。本研究では、筆者は、ヒルベルトモジュラースキームの場合に、Hatada [7], [8], [9] が与えた方法を用いて、これらの性質を研究した。

REFERENCES

[1] Artin, M., Grothendieck, A., and Verdier, J. L. :

- Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4). Lect. Notes in Math, v. 269, 270, 305, Springer, Berlin Heidelberg (1972-1973).
- [2] Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M., and Tai, Y.: Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties. Math. Sci. Press, Brookline (1975).
- [3] Deligne, P.: Formes modulaires et représentations l -adiques. Sémin. Bourbaki 1968/1969, exp. 355, Lect. Notes in Math., v. 179, Springer, Berlin Heidelberg, pp. 139-172 (1971).
- [4] Deligne, P.: La Conjecture de Weil, I. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 43, 273-307 (1974).
- [5] Eichler, M.: Quarternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktionen. Arch. Math., 5, 355-366 (1954).
- [6] Hatada, K.: Siegel cusp forms as holomorphic differential forms on certain compact varieties. Math. Ann., 262, 503-509 (1983).
- [7] Hatada, K.: Homology groups, differential forms and Hecke rings on Siegel modular varieties. (1986-1987). Topics in Mathematical Analysis (A volume dedicated to the memory of

- A. L. Cauchy) (edited by Th. M. Rassias), World Scientific Pub., Singapore, pp. 371-409 (1989).
- [8] Hatada, K.: Correspondences for Hecke rings and ℓ -adic cohomology groups on smooth compactifications of Siegel modular varieties. Proc. Japan Acad., 65A, 62-65 (1987).
- [9] Hatada, K.: Correspondences for Hecke rings and (co-)homology groups on smooth compactifications of Siegel modular varieties. Tokyo J. Math., 13, 37-62 and 493 (1990).
- [10] Hatada, K.: On the action of Hecke rings on homology groups of smooth compactifications of Siegel modular varieties and Siegel cusp forms. Tokyo J. Math., 13, 191-205 (1990).
- [11] Hatada, K.: On the local zeta functions of the Hilbert modular schemes. Proc. Japan Acad., 66A, 195-200 (1990).
- [12] Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. L'Enseign. Math., 71, 183-281 (1973).
- [13] Namikawa, Y.: A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties,

- I. Math. Ann., 221, 57-141 (1976); II. *ibid.*, 201-241 (1976).
- [14] Namikawa, Y.: Toroidal Compactification of Siegel Spaces. Lect. Notes in Math., v. 812, Springer, Berlin Heidelberg (1980).
- [15] Rapoport, M.: Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. *Comp. Math.*, 36, 255-335, (1978).
- [16] Shimizu, H.: On discontinuous groups operating on the product of upper half planes. *Ann. Math.*, 77, 33-71 (1963).
- [17] Shimura, G.: Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Iwanami, Tokyo (1971).
- [18] Shimura, G.: On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables. *Ann. Math.*, 97, 491-515 (1976).
- [19] Hatada, K.: Correction of Printing to:
Correspondences for Hecke rings and (co-)homology groups on smooth compactifications of Siegel modular varieties. *Tokyo J. Math.*, 13, p.493 (1990).

Kazuyuki Hatada, Dept. of Math., Fac. of Edu., Gifu Univ.