

Drinfeld module の退化について

東大理 藤原 一宏

§0 Introduction

その有名な論文 [D1] において Drinfeld が導入 (精確には再発見. Carlitz が既に定義している) した "elliptic module" の概念は、函数体上における楕円曲線のよい類似であり、その moduli space の研究は函数体の Langlands 予想との関連から大きな興味をひく大問題である。しかしながら現在満足のいく研究がなされているのはその次元が 1 あるいは 2 になる場合に限られており、次元 3 以上ではほとんど不明である。次元がますますよくなる困難の一因としてあげられるのは、考えている空間が affine であるためその非特異コンパクト化が必要とされるのであるが、標数 p であるためその存在が保証されるいことがある。

この小論では、コンパクト化の構成に必要とされる elliptic module の退化理論を論じることにする。実際、elliptic module の moduli space は代数体上での志村多様体の類似であり、Chai, Faltings, 筆者による志村多様体の算術的なトポカル

コンパクト化の手法を適用する際に 退化の理論は必要不可欠である。

§1 では必要な定義を述べ、§2 で結果を述べることにする。
ただし本稿では "elliptic module" ではなく "Drinfeld module" という用語で統一することとし、証明は省略する。

§1. Drinfeld module とその性質

F_q を有限体, C を F_q 上の射影非特異曲線とし、 $\infty \in C$ の F_q 有理点とする。(以後固定して考える) $A \subseteq \text{affine 曲線 } C \setminus \{\infty\}$ の座標環とし、 K をその関数体とする。類似でいうと

$$\begin{aligned} K &\leftrightarrow \mathbb{Q} & , & \quad \infty \leftrightarrow \text{無限素点} \\ A &\leftrightarrow \mathbb{Z} \end{aligned}$$

となっている。

定義. S が A -scheme, \mathcal{L}/S が 1次元 additive group scheme (Zariski 位相に関し局所的に $\mathcal{G}_a = \text{Spec } \mathbb{Q}_s[X]$ と同型) のとき $E = (\mathcal{L}, \phi)$ が A -module scheme であるとは

$\phi: A \rightarrow \text{End}_S \mathcal{L}$ が環準同型であり、 \mathcal{L} の \mathcal{L} 係数 \mathcal{L} は \mathcal{L}/S に引きおこされる A の作用は A による multiplication つまり $a \in A$ は \mathcal{L} は \mathcal{L}/S 上 a 倍で作用することとする

特に $G_a = \text{Spec } \mathcal{O}_S[X]$ と座標を指定されているときには $\text{Ends } \mathcal{L} = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i X^{pi} \mid a_i \in P(\mathcal{O}_S) \right\}$

という表示ができて、 ϕ による a の像 ϕ_a が

$$\phi_a(X) = \sum_{i \geq 0} a_i X^{pi} \quad a_0 = a$$

をみたすことが必要かつ十分である。

定義 S 上の A -module scheme $E = (\mathcal{L}, \phi)$ が rank d (≥ 1) の Drinfeld module であるとは

局所座標で表示したとき $a \in A$ の作用が

$$\phi_a(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^{pi} \quad a_n \text{ は可逆}$$

と書け、 $|a|_\infty = p^{hd}$ を満たす

ことをいう。ただし $| \cdot |_\infty$ は ∞ での値

特に $A = \mathbb{F}_q[t]$ のときは t の作用だけを決めれば十分なので Drinfeld module は elliptic curve と比べてもより初等的な対象である。(特に $d=2$ のときはこの二つの概念がよい類似となる)。

ここで Drinfeld module の moduli space についてもう少し述べておく。 $I \subset A$ を non-zero ideal とするとき level I -structure とする概念が定まる。つまり E/S を Drinfeld module としてその I 分岐 $E[I]$ を $E[I] = \text{Ker}(\phi_a: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L})$ ($I = (a)$ のとき)。

$E[I] = \bigcup_{a \in I \setminus \{0\}} E[(a)]$ (一般のとき) と定めると $E[I]$ は有限

平坦なスキーム S とする。そこで S の標数 m と素数 l とは
 $\alpha: F[l] \rightarrow F[A/\mathfrak{a}]$ という同型を level l -structure とする。
 (標数に条件をつけるなくても level structure は定義可能であり
 性質をもっとよく知られている) ところで A 上の stack \mathcal{M}_I^d は
 A -scheme S に対し

$$\mathcal{M}_I^d(S) = \{ (E, \alpha) \mid E \text{ は } S \text{ 上の Drinfeld module} \\ \alpha \text{ は } E \text{ の level } l\text{-str.} \}$$

射は上記構造を伴った同型射

と定義すると \mathcal{M}_I^d は代数的な stack (l が 2 つの異なる素数
 で割れればスキームとなり) A 上平坦, 相対次元 $d-1$ の正則な
 stack となる (Intw. で述べたように coarse space は affine).

\mathcal{M}_I^d 又はその A 上の生成ファイバーを Drinfeld modular scheme
 という。ここでは $\mathcal{M}_{I \times A}^d K_{\infty}$ K_{∞} : K の ∞ での完備化
 の記述が標数 p の対称空間によって可能であることを示す。

つまり C_{∞} を K_{∞} の代数閉包の完備化とすると

定理 (Drinfeld)

C_{∞} 上の rank d の Drinfeld module $\Leftrightarrow C_{\infty}(K)$ の discrete A -lattice
 of rank d .

$$E = C_{\infty}/\Lambda \quad \Lambda: \text{lattice}$$

この定理より $\mathcal{M}_I^d \times_A C_{\infty}$ の連結成分が $P \backslash Q^d$

Q^d : $GL(d, K_{\infty})$ に対する対称空間. i.e.

$$\mathcal{Q}^d(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}_\infty}^{d-1} \setminus \{ \text{all } \mathbb{K}_\infty\text{-rational hyperplanes} \}$$

$\Gamma: \mathrm{GL}(d, \mathbb{K}_\infty)$ 内の arithmetic subgroup

と表わせることがわかる

このように Drinfeld modular scheme は 志村多様体の類似であるが、 $d > 2$ のときにはその代数体上の対応物が存在しない。

($\mathrm{GL}(d)$ に対する対称空間は複素構造をもたない)。

逆に、函数体のときには $d > 2$ のときの (分岐) Langlands 予想に Drinfeld modular scheme (の極小コンパクト化の交叉コホモロジーの計算) によりせまる可能性は十分にあることとなる

この日の最後に Drinfeld module の退化として最も重要な semi-Drinfeld module の概念を導入しておく。

定義. S を normal scheme, E/S を A -module scheme とする。このとき E/S を semi-Drinfeld module だとは

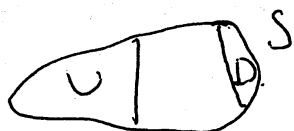
E/S の $\forall s \in S$ での fiber E_s/S が s 上の Drinfeld module である

ことをいう。

各点での fiber の rank は異なることに注意しよう。

§2. Drinfeld module の semi-stable 退化.

この § では $S = \text{Spec } V$, $D = V(m)$ を閉集合, $U \subset S$ を open set とし S は normal, $U \cap D = \emptyset$, V は m 進完備を仮定する.



与えられた semi-Drinfeld module E/S の

(E_U は rank d の Drinfeld module ($E_U = U$ の制限)
 $E \times_S D$ は rank d' の Drinfeld module

の 2 条件をみたすとする. (必ず $d' \leq d$). 立場を変えれば E_U が D 方向に退化していく状況となるわけである

Drinfeld によれば この状況で.

Proposition - Definition.

rank d の Drinfeld module \tilde{E}/S , 形式 A -準同型

$\hat{u}: \hat{E} \rightarrow \hat{E}$ (\wedge : m 進完備化) があって

$\hat{u} \bmod m$ は同型となる. (\hat{E}, \hat{u}) は unique に定まる

がわかる. ここで \tilde{E} を E の fixed part. とすることにする

(semicabel 多様体の時の Raynaud group の類似).

座標系をかけた $\hat{u}(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^{p^i}$, $a_0 = 1$, $a_i \in m$ ($\forall i > 0$)

$\hat{u}(\tilde{\rho}_a(x)) = \phi_a(\hat{u}(x)) \quad \forall a \in A$

となることとなる. Drinfeld 自身が考えたのは $\dim S = 1$ のとき.

つまり V が離散付値環の時. このときはさらに次のよう

ことかゝる:

\hat{E} は単に m 進の形式巾級数でなく, rigid-analytic な意味で収束し整函数 $e^{an} : \hat{E}^{an} \rightarrow E^{an} / K$. $U = \text{Spec} K$ を定義する. e^{an} は全射で, 従って $\Lambda = \text{Ker}(\hat{E}^{an} \xrightarrow{e^{an}} E^{an})$ とかくと Λ は rank $d-d'$ の discrete A -module $\subset \hat{E}(K^{sep})$ (K^{sep} : 分離閉包)

$$E^{an} = \hat{E}^{an} / \Lambda \quad (\text{rigid-analytic に})$$

と高表示される. として

$$\left. \begin{array}{l} \text{S} \text{ の semi-Drinfeld modules } E \\ \updownarrow \\ \text{S} \text{ の Drinfeld module } \hat{E} \\ \text{discrete } A\text{-lattice } \Lambda \subset \hat{E}(K^{sep}), \text{ Gal}(K^{sep}/K)\text{-stable} \end{array} \right\} \begin{array}{l} E \\ \updownarrow \\ (\hat{E}, \Lambda) \end{array}$$

は圏の同値となる. (Raynaud-Tate の semiabelian scheme の一意化理論の類似).

この $\dim S = 1$ の場合の理論は非常に満足できるものであり, いかにか高次元の場合に拡張するか問題となる.

まず注意すべきことは上述の証明法は通用しなくなることである. $\dim S > 1$ の場合にも rigid geometry と呼ばれるものは存在するか (Raynaud) " \hat{E}^{an} " の構成等に無理かである.

従って, 他の方法による直接証明以外に道はない (一意化の問題, semi-abelian な場合にも全く同じ困難が生じた).

このことをふまえた上で

定理. § 初めの E に対する仮定の下で

A -lattice $\Lambda \subset \widehat{E}(K^{nr})$, $\text{rank } \Lambda = d-d'$ がある

(ただし K^{nr} は V の最大不分岐拡大の高体)

a) $\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda^{-1}$ は V 上整, $\lambda^{-1} \equiv 0 \pmod{m}$.

$\forall n > 0$ に対し有限個の λ を除き $\lambda^{-1} \equiv 0 \pmod{m^n}$

また λ 自身が U 上整

b) (\widehat{E}, Λ) の構成は admissible base change と可換.

ただし $S' \rightarrow S$ が admissible とは base change 後も同じ条件が満たされることをいう

c) $\dim S = 1$ のとき (\widehat{E}, Λ) の構成は Drinfeld によるものと一致.

上記定理の証明は非常に技術的だが、しかし naive なものである。また、 (\widehat{E}, Λ) と E との関係については

定理. 前定理の (a) を満たす (\widehat{E}, Λ) に対し semi-Drinfeld module E が存在し、 (\widehat{E}, Λ) は E に伴う pair となる。そして $E \rightarrow (\widehat{E}, \Lambda)$ は圏の同値を与える。

標榜的には " $E = \widehat{E}/\Lambda$ " と思ってもよいことになる。これらの定理によって完備な環上の Drinfeld module の semi-stable reduction は容易に記述される。Wild reduction の場合も同様の理論を考えることは望ましいだろうか。応用上は

必要ではない。また, Anderson の t -motive などに拡張することもある。これは興味深いように思う [A]。

上記の圏同値を compact 化に応用するときには, 関手の構成 $E \rightarrow (\mathcal{E}, A)$ のより詳しい性質が必要となる (例えば振動に対する安定性, D に至る中間段階の退化の記述等)。これらについては現在準備中である。

References

- [D1] V. G. Drinfeld, Elliptic modules, Mat. Sb. 94 no. 4, 594-627 (1974)
- [D2] ———, Elliptic modules II, Mat. Sb. 102 no. 2, 182-194 (1977)
- [A] G. W. Anderson, t -motives, Duke Math J. 53, no. 2, 457-502 (1986)

訂正 Drinfeld 加群とその退化について

藤原 一宏

main な statement と述べられている semi-Drinfeld 加群の一意化であるが、その後、そのまゝの形では成り立たないことがわかった。以下のようにする。

S は ^{affine} regular scheme, D_1, D_2, \dots, D_r は S の既約因子で reduced normal crossing になっているものとし、 $D = D_1 \cdots D_r$ とする。 S は D に関して完備。 $U = S \setminus \{D_1 \cup \dots \cup D_r\}$ とする

E/S は semi-Drinfeld 加群。 r

*1 D_1 上 rank d_1 の Drinfeld 加群

*2 $D_2 \setminus D_1 \cap D_2$ 上 rank $d_2 (> d_1)$ の Drinfeld 加群

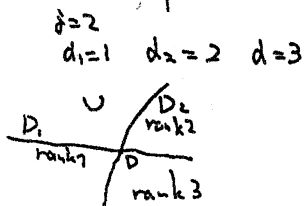
*3 $D_3 \setminus (D_1 \cup D_2) \cap D_3$ 上 rank $d_3 (> d_1 > d_2)$ の

⋮

* i : $D_i \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) \cap D_i$ 上 rank $d_i (> d_{i-1} > \dots > d_1)$ の Drinfeld 加群

かつ U 上 rank $d > d_i (> d_{i-1} > \dots > d_1)$ の Drinfeld 加群になっているものとする

example:



さらに技術的な仮定として

$D_i \setminus (D_1 \cup \dots \cup D_{i-1}) \cap D_i$ の閉点 x_i

$\text{Spec } A$ (記号は本文と同じ) の閉点 $x \in \text{supp}(x_i)$ があるとする。

(左の例のときにはこの仮定は成り立たない)

このとき

"Theorem" :

$S = \text{Spec } V$. $K =$ 高体, K^{sep} : separable closure

$\hat{V} = V$ の K^{sep} 内の normalization.

D_i : D_i には、 E の fixed point E_i .

f_i : D_i の defining equation.

の非 $\text{Gal}(K^{\text{sep}}/K)$ -stable な $\Lambda_i \subset E_i(\hat{V}[\frac{1}{f_i}])$ がある

sublattice

$\lambda_i \in \Lambda_i \setminus \{0\} \Rightarrow \frac{1}{\lambda_i}$ は S 上 regular である。 D_i 上 λ_i は

D_2 : $E_2 = "E_1/\Lambda_1"$ (適切の意味での quotient. $(f_1$ -adic topology を与える))

とある。

$\Lambda_2 \subset E_2 (D[\frac{1}{f_2}])$ とある (Gal-stable)

$\lambda_2 \in \Lambda_2(0) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_2}$ は S 上 regular と $D_1 \cup D_2$ 上 消える。

D_3, \dots

D_j : $E_j = "E_{j-1}/\Lambda_{j-1}"$ とある $\Lambda_j \subset E_j (D[\frac{1}{f_1 \dots f_j}])$ とある (Gal-stable)

$\lambda_j \in \Lambda_j(0) \Rightarrow \frac{1}{\lambda_j}$ は S 上 regular と $D_1 \cup \dots \cup D_j$ 上 消える

そして最後に $E = "E_j/\Lambda_j"$ ($f_1 \dots f_j$ -adic topology を与える quotient)

とある

これは (上記条件を満たす) $(E_1 \supset \Lambda_1, E_1/\Lambda_1 \supset \Lambda_2, \dots, E_j \supset \Lambda_j)$

と与えられる。最初の与えられた E を作る。

ほとんどの部分の check が与えられている。example として書かれた case については D.I.C.)

このように、semi-Drinfeld 加群を control するのは複雑な data が与えられている。

しかし、与えられた $Q(\zeta)$ のときに限れば、上述の classification の moduli space の compact 化が構成される。